

Восстановление характеристик нестационарных динамических систем по трём тестовым сигналам

И. В. Бойков, Н. П. Кривулин

Пензенский государственный университет, Пенза, Российская Федерация,
e-mail: i.v.boykov@gmail.com, krivulin@bk.ru

Рассмотрены нестационарные непрерывные и дискретные динамические системы, моделируемые соответственно интегральными уравнениями Вольтерра первого рода и их дискретными аналогами. Построены алгоритмы точного восстановления импульсной характеристики (в аналитическом виде) для непрерывных систем и переходной характеристики для дискретных систем. Рассмотрен алгоритм точного восстановления импульсной характеристики нестационарной непрерывной динамической системы по трём, связанным между собой, входным сигналам. Показано, что первый сигнал может быть произвольным, а второй и третий сигналы связаны с первым интегральным оператором. В качестве динамической характеристики выбрана точная формула преобразования Лапласа импульсной характеристики, представленная алгебраическим выражением от преобразования Лапласа выходных сигналов системы. Приведён модельный пример, иллюстрирующий эффективность работы представленного алгоритма. Также построен алгоритм точного восстановления переходной характеристики нестационарной дискретной динамической системы по трём, связанным между собой, входным сигналам. Показано, что первый сигнал может быть произвольным, а второй и третий сигналы связаны с первым оператором суммирования. Дана точная формула Z-преобразования переходной характеристики, представленная алгебраическим выражением от Z-преобразования выходных сигналов системы. Приведён модельный пример. Описаны динамические системы, на которые могут быть распространены предложенные алгоритмы.

Ключевые слова: нестационарная динамическая система, непрерывная система, дискретная система, импульсная характеристика, переходная характеристика, идентификация.

Введение. Вопросам определения динамических характеристик измерительных систем посвящено множество работ. Общие вопросы идентификации параметров динамических систем подробно освещены в работах [1–7]. Отдельно следует отметить методы точного восстановления динамических характеристик (в аналитическом виде) стационарных систем. В работах [8–10] предложены методы восстановления динамических характеристик стационарных систем по двум тестовым сигналам. Метод, рассмотренный в работе [8], используется при построении алгоритмов аналитического определения динамических характеристик нелинейных стационарных систем по нескольким тестовым сигналам, а также для вычисления задержек в стационарных системах с запаздываниями. Также он распространён на информационно-измерительные системы, моделируемые многомерными уравнениями в свёртках. Подробное изложение метода и его обоснование приведено в работе [7].

Аналитические методы восстановления динамических характеристик информационно-измерительных систем кроме непосредственного теоретического и практического интереса позволяют с высокой точностью рассчитать коэффициенты дифференциальных уравнений, моделирующих эти системы [11]. Настоящая работа посвящена распространению

этих результатов на нестационарные системы, описываемые уравнениями:

$$\int_0^t g(t, \tau) x(\tau) d\tau = f(t), \quad 0 \leq t < \infty; \quad (1)$$

$$\sum_{l=0}^k g(k, l) x(l) = f(k), \quad k = 0, 1, \dots, \quad (2)$$

где $g(t, \tau)$, $0 \leq t, \tau < \infty$ – импульсная характеристика; $x(t)$, $f(t)$, $0 \leq t < \infty$ – соответственно входной и выходной сигналы непрерывной нестационарной системы; $g(k, l)$, $0 \leq k, l < \infty$ – переходная характеристика; $x(k)$, $f(k)$, $k = 0, 1, \dots$ – соответственно входной и выходной сигналы дискретной системы.

Импульсная характеристика подлежит определению и удовлетворяет условиям физической реализуемости для непрерывных (1) и дискретных (2) систем соответственно:

$$g(t, \tau) = 0 \quad \text{при} \quad t < \tau;$$

$$g(k, l) = 0 \quad \text{при} \quad k < l.$$

Отметим, что при исследовании уравнений (1), (2) восстановление динамических характеристик проводится по трём тестовым сигналам.

Точное восстановление динамических характеристик непрерывных систем. Наряду с динамическими системами, функционирование которых описывается интегральными уравнениями в свёртках и обыкновенными дифференциальными уравнениями, имеются большие классы динамических систем, моделируемых интегральными уравнениями Вольтерра [12, 13] и уравнениями в частных производных (параболическими и гиперболическими уравнениями) [14–18]. В случае, когда математическая модель динамической системы описывается уравнением в частных производных, задача идентификации системы сводится к определению коэффициентов этого уравнения. Существуют различные постановки задач идентификации параметров динамических систем, объединяемые общим названием – обратные задачи [15–18]. В книге [7] изложены методы идентификации динамических систем, описываемых уравнениями в частных производных, по их реакции на два входных тестовых сигнала.

Метод точного восстановления динамических характеристик основан на применении следующего утверждения [7], [19].

Утверждение. Пусть преобразование Лапласа L_t по переменной t импульсной характеристики $g(t, \tau)$ системы (1) удовлетворяет условию

$$G(p, \tau) = L_t[g(t, \tau)] = \int_0^{\infty} g(t, \tau) e^{-pt} dt = \hat{G}(p) e^{-q(p)\tau}, \quad (3)$$

где $\hat{G}(p)$, $q(p)$ – аналитические функции комплексной переменной $p = u + iv$, u , v – действительные числа; $C = \text{const}$ – вещественная постоянная, $u > C > 0$.

Тогда изображение уравнения (1) примет вид

$$\hat{G}(p) X[q(p)] = F(p). \quad (4)$$

Задача восстановления импульсной характеристики сводится к определению функций $\hat{G}(p)$, $q(p)$. В работах [7], [19] рассмотрены методы приближённого определения функций $\hat{G}(p)$, $q(p)$ по двум тестовым сигналам. В настоящей работе авторы предлагают метод точного определения функций $\hat{G}(p)$, $q(p)$ по трём входным сигналам.

Постановка задачи. Требуется по серии тестовых входных сигналов

$$x_1(t); \quad x_2(t) = \int_0^t x_1(v) dv; \quad x_3(t) = \int_t^{\infty} x_1(v) dv$$

определить импульсную характеристику $g(t, \tau)$ системы (1), удовлетворяющую условию (3). При этом предполагается, что сигнал $x_1(t)$ удовлетворяет условию

$$A = \int_0^{\infty} x_1(v) dv = \text{const} \neq 0. \quad (5)$$

Отметим, что в качестве сигнала $x_1(t)$ может выступать произвольный финитный сигнал, для которого выполнено условие

$$\int_0^{\infty} x_1(v) dv \neq 0.$$

Сигнал $x_3(t)$ при условии (5) можно представить в виде

$$x_3(t) = A - \int_0^t x_1(v) dv. \quad (6)$$

Заметим, что условие (5) выполняется для входных сигналов большинства измерительных преобразователей, так как их функционирование в режиме эксплуатации проходит на конечном временном отрезке. Выбор сигнала $x_1(t)$ осуществляется из условия $A \neq 0$.

Восстановление импульсной характеристики. Найдём изображение входных сигналов. Используя теорему об изображении интеграла от оригинала и учитывая выражение (6), запишем следующие выражения:

$$\left. \begin{aligned} X_1(p) &= L_t[x_1(t)]; \\ X_2(p) &= L_t[x_2(t)] = X_1(p)/p; \\ X_3(p) &= L_t[x_3(t)] = [A - X_1(p)]/p. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Здесь $X_1(p)$, $X_2(p)$, $X_3(p)$ – изображения входных сигналов $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$.

Для входных сигналов $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$ соответствующие выходные сигналы $f_1(t)$, $f_2(t)$, $f_3(t)$ будут иметь вид

$$\int_0^t g(t, \tau) x_1(\tau) d\tau = f_1(t);$$

$$\int_0^t g(t, \tau) x_2(\tau) d\tau = f_2(t);$$

$$\int_0^t g(t, \tau) x_3(\tau) d\tau = f_3(t).$$

Найдём их изображения $F_1(p)$, $F_2(p)$, $F_3(p)$, применив формулы (3), (4), (7):

$$\begin{aligned} F_1(p) &= L_t[f_1(t)] = L_t\left[\int_0^t g(t, \tau) x_1(\tau) d\tau\right] = \\ &= \int_0^{\infty} L_t[g(t, \tau)] x_1(\tau) d\tau = \\ &= \int_0^{\infty} \hat{G}(p) e^{-\tau q(p)} x_1(\tau) d\tau = \hat{G}(p) X_1[q(p)]; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_2(p) &= L_t \left[\int_0^t g(t, \tau) x_2(\tau) d\tau \right] = \int_0^\infty L_t [g(t, \tau)] x_2(\tau) d\tau = \\ &= \int_0^\infty \hat{G}(p) e^{-\tau q(p)} x_2(\tau) d\tau = \hat{G}(p) \int_0^\infty x_2(\tau) e^{-\tau q(p)} d\tau = \\ &= \hat{G}(p) X_1[q(p)]/q(p); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_3(p) &= L_t \left[\int_0^t g(t, \tau) x_3(\tau) d\tau \right] = \int_0^\infty L_t [g(t, \tau)] x_3(\tau) d\tau = \\ &= \int_0^\infty \hat{G}(p) e^{-\tau q(p)} x_3(\tau) d\tau = \\ &= \hat{G}(p) \left[\int_0^\infty \left[A - \int_0^\tau x_1(v) dv \right] e^{-\tau q(p)} d\tau \right] = \\ &= \hat{G}(p) \left[\frac{A}{q(p)} - \frac{X_1[q(p)]}{q(p)} \right]. \end{aligned}$$

В результате приходим к системе алгебраических уравнений относительно неизвестных $\hat{G}(p)$, $q(p)$:

$$\left. \begin{aligned} \hat{G}(p) X_1[q(p)] &= F_1(p); \\ \hat{G}(p) X_1[q(p)] &= q(p) F_2(p); \\ \hat{G}(p) [A - X_1[q(p)]] &= q(p) F_3(p). \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Система (8) имеет аналитическое решение относительно искомых функций $\hat{G}(p)$, $q(p)$:

$$\left. \begin{aligned} q(p) &= F_1(p)/F_2(p); \\ \hat{G}(p) &= F_1(p) [F_3(p) + F_2(p)] / [A F_2(p)]. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Замечание 1. Сигнал $x_3(t)$ введён для возможности аналитического вычисления функций $\hat{G}(p)$, $q(p)$. При использовании двух сигналов функции $\hat{G}(p)$, $q(p)$ определяются приближённо [7], [19].

Замечание 2. Из уравнений (9) следует, что вид входного сигнала $x_1(t)$ не влияет на полученный результат.

Модельный пример. Рассмотрим нестационарный измерительный преобразователь, описанный уравнением

$$\int_0^t g(t, \tau) x(\tau) d\tau = f(t), \quad 0 \leq t < \infty, \quad (10)$$

где $g(t, \tau)$ – импульсная характеристика, подлежащая определению и удовлетворяющая условию $g(t, \tau) = 0$ физической реализуемости при $t < \tau$.

По серии входных сигналов $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$ и наблюдением соответствующих выходных сигналов $f_1(t)$, $f_2(t)$, $f_3(t)$ требуется определить импульсную характеристику $g(t, \tau)$.

Определение исходных данных. В качестве входных сигналов возьмём

$$x_1(t) = e^{-0,5t};$$

$$x_2(t) = \int_0^t x_1(v) dv = \int_0^t e^{-0,5v} dv = 2(1 - e^{-0,5t});$$

$$x_3(t) = \int_t^\infty e^{-0,5v} dv = \int_0^\infty e^{-0,5v} dv - \int_0^t e^{-0,5v} dv = 2e^{-0,5t}.$$

Проверим условие (5):

$$A = \int_0^\infty e^{-0,5v} dv = 2 \neq 0.$$

Тогда наблюдаемые выходные сигналы имеют вид

$$f_1(t) = \frac{2}{5}(e^{1,5t} - e^{-t});$$

$$f_2(t) = -\frac{2}{15}(6e^{1,5t} - e^{-t} - 5e^{2t});$$

$$f_3(t) = \frac{4}{5}(e^{1,5t} - e^{-t}).$$

Замечание. Запишем выражения для импульсной характеристики $g(t, \tau)$ исследуемого измерительного преобразователя (10):

$$g(t, \tau) = \begin{cases} e^{-(t-2\tau)}, & t \geq \tau; \\ 0, & t < \tau. \end{cases} \quad (11)$$

Этапы решения.

1. Найдём преобразование выходных сигналов $f_1(t)$, $f_2(t)$, $f_3(t)$:

$$F_1(p) = \frac{2}{(2p-1)(p+1)};$$

$$F_2(p) = \frac{2}{(2p-1)(p^2-1)};$$

$$F_3(p) = \frac{4}{(2p-1)(p+1)}.$$

2. Определим функции $\hat{G}(p)$, $q(p)$ по формулам (9):

$$q(p) = \frac{F_1(p)}{F_2(p)} = \frac{2}{(2p-1)(p+1)} \bigg/ \frac{2}{(2p-1)(p^2-1)} = p-1;$$

$$\hat{G}(p) = \frac{F_1(p)[F_3(p) + F_2(p)]}{AF_2(p)} = \frac{2}{(2p-1)(p+1)} \times$$

$$\times \left(\frac{4}{(2p-1)(p+1)} + \frac{2}{(2p-1)(p^2-1)} \right) / \frac{4}{(2p-1)(p^2-1)} = \frac{1}{p+1}.$$

3. Получим выражения:

$$\hat{G}(p) = (p+1)^{-1}; \quad q(p) = p-1.$$

Тогда изображение импульсной переходной функции $g(t, \tau)$ в уравнении (10) примет вид

$$G(p, \tau) = \frac{1}{p+1} e^{-\tau(p-1)}.$$

4. Применив теорему смещения, найдём оригинал – импульсную характеристику

$$g(t, \tau) = e^{-(t-\tau)} e^{\tau} = e^{-(t-2\tau)}.$$

Наложим на полученную функцию условие физической реализуемости и получим формулу

$$g(t, \tau) = \begin{cases} e^{-(t-2\tau)}, & t \geq \tau; \\ 0, & t < \tau, \end{cases}$$

совпадающую с точной импульсной характеристикой (11).

Замечание 1. При практической реализации предложенного алгоритма восстановления импульсной характеристики возникает следующая техническая сложность: по крайней мере один из трёх входных сигналов $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$ имеет скачок при $t=0$. Это вытекает из условия (5) и представления сигнала $x_3(t)$ в виде (6). Уменьшить погрешность, вносимую при технической реализации скачка сигнала $x_3(t)$ в момент времени $t=0$, можно за счёт рационального выбора значения A . Кроме того, следует отметить, что в метрике пространства $L_2[0, \infty)$ замена ступенчатого перепада нулевой длительности реальным сигналом не вызывает большой погрешности при достаточно большой длительности сигнала.

Замечание 2. При практическом применении изложенного выше алгоритма естественно в формуле (9) функции $F_i(p)$, $i=1, 2, 3$, находить приближённо по квадратурным формулам вычисления преобразования Лапласа [20]. Импульсная характеристика $g(t, \tau)$ находится в результате применения обратного преобразования Лапласа к функции

$$G(p, \tau) = \hat{G}(p) e^{-\tau q(p)}.$$

Восстановление переходных характеристик дискретных систем. Восстановление переходных характеристик основано на применении следующего утверждения [11].

Утверждение. Пусть Z-преобразование переходной характеристики системы (2) по переменной k удовлетворяет следующему условию [7]:

$$G(z, l) = Z_k[g(k, l)] = \sum_{k=0}^{\infty} g(k, l) z^{-k} = \hat{G}(z)[q(z)]^{-l}. \quad (12)$$

Тогда Z-преобразование уравнения (2) имеет вид

$$\hat{G}(z)X[q(z)] = F(z). \quad (13)$$

Задача восстановления переходной характеристики сводится к определению функций $\hat{G}(z)$, $q(z)$.

В работе [11] предложены методы приближённого определения функций $\hat{G}(z)$, $q(z)$ по двум тестовым сигналам.

Постановка задачи. По серии тестовых входных сигналов

$$x_1(k); \quad x_2(k) = \sum_{l=0}^k x_1(l); \quad x_3(k) = \sum_{l=k+1}^{+\infty} x_1(l)$$

требуется определить переходную характеристику $g(k, l)$ системы (2), удовлетворяющую условию (12). При этом предполагаем, что сигнал $x_1(k)$ удовлетворяет условию

$$A = \sum_{l=0}^{+\infty} x_1(l) = \text{const} \neq 0. \quad (14)$$

Отметим, что, как и в случае непрерывных систем, в качестве сигнала $x_1(k)$ может выступать произвольный финитный сигнал, для которого выполнено условие

$$A = \sum_{l=0}^{+\infty} x_1(l) \neq 0.$$

Сигнал $x_3(t)$ при условии (14) можно представить как

$$x_3(k) = A - x_2(k). \quad (15)$$

Восстановление переходной характеристики. Найдём Z-преобразование входных сигналов $x_1(k)$, $x_2(k)$, $x_3(k)$. Используя теорему о Z-преобразовании суммируемой последовательности и учитывая формулу (15), имеем

$$\left. \begin{aligned} X_1(z) &= Z_k[x_1(k)]; \\ X_2(z) &= Z_k[x_2(k)] = \frac{z}{z-1} X_1(z); \\ X_3(z) &= Z_k[x_3(k)] = \frac{z}{z-1} [A - X_1(z)]. \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Здесь $X_1(z)$, $X_2(z)$, $X_3(z)$ – Z-преобразования последовательностей $x_1(k)$, $x_2(k)$, $x_3(k)$.

Для серии входных сигналов $x_1(k)$, $x_2(k)$, $x_3(k)$, соответствующие выходные сигналы $f_1(k)$, $f_2(k)$, $f_3(k)$ будут иметь вид

$$\sum_{l=0}^k g(k, l) x_1(l) = f_1(k);$$

$$\sum_{l=0}^k g(k, l) x_2(l) = f_2(k);$$

$$\sum_{l=0}^k g(k, l) x_3(l) = f_3(k).$$

При выполнении условий (12), (13) и с учётом выражений (16) Z-преобразования выходных сигналов $f_1(k)$, $f_2(k)$, $f_3(k)$ имеют вид

$$\begin{aligned} F_1(z) &= Z_k[f_1(k)] = Z_k \left[\sum_{l=0}^k g(k, l) x_1(l) \right] = \\ &= \sum_{l=0}^{+\infty} Z_k[g(k, l)] x_1(l) = \hat{G}(z) \sum_{l=0}^{+\infty} x_1(l) q^{-l}(z) = \hat{G}(z) X_1[q(z)]; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_2(z) &= Z_k[f_2(k)] = Z_k \left[\sum_{l=0}^k g(k, l) x_2(l) \right] = \\ &= \sum_{l=0}^{+\infty} Z_k[g(k, l)] x_2(l) = \hat{G}(z) \sum_{l=0}^{+\infty} x_2(l) q^{-l}(z) = \\ &= \hat{G}(z) X_1[q(z)] \frac{q(z)}{q(z)-1}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_3(z) &= Z_k[f_3(k)] = Z_k \left[\sum_{l=0}^k g(k, l) x_3(l) \right] = \\ &= \sum_{l=0}^{+\infty} Z_k[g(k, l)] x_3(l) = \hat{G}(z) \sum_{l=0}^{+\infty} x_2(l) q^{-l}(z) = \\ &= A \hat{G}(z) \frac{q(z)}{q(z)-1} - \hat{G}(z) X_1[q(z)] \frac{q(z)}{q(z)-1}. \end{aligned}$$

В результате приходим к следующей системе алгебраических уравнений относительно $\hat{G}(z)$, $q(z)$:

$$\left. \begin{aligned} \hat{G}(z) X_1[q(z)] &= F_1(z); \\ \hat{G}(z) X_1[q(z)] &= \frac{q(z)-1}{q(z)} F_2(z); \\ \hat{G}(z) A - \hat{G}(z) X_1[q(z)] &= \frac{q(z)-1}{q(z)} F_3(z). \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Система (17) имеет аналитическое решение относительно искомых функций $\hat{G}(z)$, $q(z)$:

$$\left. \begin{aligned} q(z) &= \frac{F_2(z)}{F_2(z) - F_1(z)}; \\ \hat{G}(z) &= \frac{F_1(z)[F_3(z) + F_2(z)]}{A F_2(z)}. \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

Замечание. Сигнал $x_3(k)$ введён для возможности аналитического вычисления функций $\hat{G}(z)$, $q(z)$. При рассмотрении двух сигналов функции $\hat{G}(z)$, $q(z)$ определяются приближённо [7].

Модельный пример. Рассмотрим нестационарный измерительный преобразователь, описываемый уравнением

$$\sum_{l=0}^k g(k, l) x(l) = f(k), \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (19)$$

где $x(k)$, $f(k)$ – входной и выходной сигналы соответственно; $g(k, l)$ – переходная характеристика, подлежащая определению и удовлетворяющая условию физической реализуемости $g(k, l) = 0$ при $k < l$.

По результатам обработки входных сигналов $x_1(k)$, $x_2(k)$, $x_3(k)$ и соответствующих выходных сигналов $f_1(k)$, $f_2(k)$, $f_3(k)$ требуется определить переходную характеристику $g(k, l)$.

Определение исходных данных. В качестве входных сигналов возьмём

$$x_1(k) = \frac{k}{3^k}; \quad x_2(k) = \sum_{l=0}^k \frac{1}{3^l}; \quad x_3(k) = \sum_{l=k+1}^{\infty} \frac{1}{3^l}.$$

Проверим условие (14) и вычислим A :

$$A = \sum_{l=0}^{\infty} x_1(k) = \frac{3}{4} \neq 0.$$

Соответствующие наблюдаемые выходные сигналы имеют вид

$$f_1(k) = 4 \left(\frac{2}{3} \right)^k (k-3) + 12 \left(\frac{1}{2} \right)^k;$$

$$f_2(k) = \left(\frac{2}{3} \right)^k (3-2k) - 4 \left(\frac{1}{2} \right)^k + 2^k;$$

$$f_3(k) = \left(\frac{2}{3} \right)^k (2k-3) + \frac{15}{4} \left(\frac{1}{2} \right)^k.$$

При этом точные значения переходной характеристики следующие:

$$g(k, l) = \begin{cases} 2^{-(k-2l)}, & k \geq l \\ 0, & k < l. \end{cases} \quad (20)$$

Этапы решения.

1. Найдём Z-преобразование выходных сигналов $f_1(k)$, $f_2(k)$, $f_3(k)$:

$$F_1(z) = \frac{12z^2}{(2z-1)(3z-2)^2};$$

$$F_2(z) = \frac{12z^3}{(2z^2-5z+2)(3z-2)^2};$$

$$F_3(z) = \frac{3z^2(9z-2)}{2(2z-1)(3z-2)^2}.$$

2. Определим по формулам (18) функции $\hat{G}(z)$, $q(z)$:

$$q(z) = \frac{F_1(z)}{F_2(z) - F_1(z)} = z/2;$$

$$\hat{G}(z) = \frac{F_1(z)(F_3(z) + F_2(z))}{AF_2(z)} = z/(z-0,5).$$

3. Получим следующие выражения:

$$\hat{G}(z) = z/(z-0,5);$$

$$q(z) = z/2.$$

Тогда изображение переходной характеристики $g(k, l)$ уравнения (19) будет иметь вид

$$G(z, l) = z(z/2)^{-l}/(z-0,5).$$

4. Применив теорему смещения, найдём оригинал – переходную характеристику

$$g(k, l) = 2^l 2^{-(k-l)} = 2^{-(k-2l)}.$$

Наложим на полученную функцию условие физической реализуемости и окончательно получим

$$g(k, l) = \begin{cases} 2^{-(k-2l)}, & k \geq l; \\ 0, & k < l, \end{cases}$$

что совпадает с точной переходной характеристикой (20).

Заключение. Предложены алгоритмы восстановления импульсной характеристики (в случае непрерывных динамических систем) и переходной характеристики (в случае дискретных систем) по трём сигналам, позволяющие точно получить соответствующие характеристики систем. При этом при определении изображений искоемых характеристик применяются только изображения наблюдаемых выходных сигналов. Данный подход можно использовать при исследовании многомерных систем, систем с распределёнными параметрами (непрерывных и дискретных) и систем, описываемых рядами Вольтерра и применяемых, например, при нелинейной фильтрации изображений [21].

Список литературы

1. Пупков К. А., Егупов Н. Д., Баркин А. И., Воронов Е. М., Коньков В. Г., Корнюшин Ю. П., Милов Л. Т., Мышляев Ю. И., Рыбин В. М., Сивцов В. И., Трофимов А. И., Фалдин Н. В., Шевяков О. В. Методы классической и современной теории автоматического управления. Т. 1. Математические модели, динамические характеристики и анализ систем автоматического управления. М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2004. 656 с.
2. Пупков К. А., Егупов Н. Д., Трофимов А. И. Методы классической и современной теории автоматического управления. Т. 2. Статистическая динамика и идентификация систем автоматического управления. М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана. 2004. 640 с.
3. Дейч А. М. Методы идентификации динамических объектов. М.: Энергия, 1979. 240 с.

4. Грановский В. А. Динамические измерения. Л.: Энергоатомиздат, 1984. 220 с.
5. Ljung L. *System Identification. Theory for the User*. 2nd ed. PTR Prentice Hall, Upper Saddle River, 1999, 609 p.
6. Цыпкин Я. З. Информационная теория идентификации. М.: Наука, 1995. 336 с.
7. Бойков И. В., Кривулин Н. П. Аналитические и численные методы идентификации динамических систем. Пенза: Изд-во ПГУ, 2016. 398 с.
8. Бойков И. В. Об одном методе определения динамических характеристик при использовании реального испытательного сигнала // Измерительная техника. 1991. № 1. С. 9–10.
9. Бойков И. В. Об идентификации нелинейных объектов // Измерительная техника. 1994. № 9. С. 12–14.
10. Бойков И. В. Об идентификации нелинейных систем с запаздыванием // Измерительная техника. 1995. № 4. С. 14–15.
11. Бойков И. В., Кривулин Н. П. Восстановление параметров линейных систем, описываемых дифференциальными уравнениями с переменными коэффициентами // Измерительная техника. 2013. № 4. С. 11–14.
12. Сидоров Д. Н. Методы анализа интегральных динамических моделей: теория и приложения. Иркутск: Изд-во ИГУ, 2013. 293 с.
13. Doyle F. J., Pearson R. K., Ogunnaike B. A. *Identification and Control Using Volterra Models*, Springer-Verlag, 2012, 314 p.
14. Сузииков В. С. Математические методы обработки результатов измерений. СПб.: Политехника, 2001. 240 с.
15. Ватульян А. О. Обратные задачи в механике деформируемого тела. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. 223 с.
16. Кабанихин С. И. Обратные и некорректные задачи. Новосибирск: Сибирское научное издательство, 2009. 457 с.
17. Isermann R., Munchof M., *Identification of Dynamical Systems: An Introduction with Applications*, Springer-Verlag, 2011, 711 p.
18. Hasanov Hasanoğlu A., Romanov V. G., *Introduction to inverse problems for differential equations*, Cham: Springer International Publishing AG, 2017, 261 p.
19. Бойков И. В., Кривулин Н. П. Определение временных характеристик линейных систем с распределёнными параметрами // Метрология. 2012. № 8. С. 3–14.
20. Крылов В. И., Скобля Н. С. Методы приближённого преобразования Фурье и обращения преобразования Лапласа (справочная книга). М.: Наука. 1974. 224 с.
21. Щербаков М. А. Итерационный метод оптимальной нелинейной фильтрации изображений // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Технические науки. 2011. № 4 (20). С. 43–56.

References

1. Pupkov K. A., Egupov N. D., Barkin A. I., Voronov E. M., Konkov V. G., Korniyushin Yu. P., Milov L. T., Myshlyayev Yu. I., Rybin V. M., Sivtsov V. I., Trofimov A. I., Faldin N. V., Shevyakov O. V. *Metody klassicheskoi i sovremennoi teorii avtoma-*

ticheskogo upravleniy. V. 1. Matematicheskie modeli, dinamicheskie kharakteristiki i analiz sistem avtomaticheskogo upravliniya, Moscow, Izdatelstvo Moskovskogo Gosudarstvennogo Technicheskogo Universiteta imeni N. E. Baumana Publ., 2004, 656 p. (in Russian).

2. Pupkov K. A., Egupov N. D., Trofimov A. I. *Metody klasicheskoi i sovremennoi teorii avtomaticheskogo upravleniy. V. 2. Statisticheskay dinamika i identifikatsiy sistem avtomaticheskogo upravliniy*, Moscow, Izdatelstvo Moskovskogo Gosudarstvennogo Technicheskogo Universiteta imeni N. E. Bauman Publ., 2004, 640 p. (in Russian).

3. Deutsch A. M. *Metody identifikatsii dinamicheskikh ob'ektov*, Moscow, Energiy Publ., 1979, 240 p. (in Russian).

4. Granovsky V. A. *Dinamicheskie izmereniy*, Leningrad, Energoatomizdat Publ., 1984, 220 p. (in Russian).

5. Ljung L. *System Identification. Theory for the User*. 2nd ed. PTR Prentice Hall, Upper Saddle River, 1999, 609 p.

6. Tsyppin Y. Z. *Informatsionnay teorii identifikatsii*, Moscow, Nauka Publ., 1995, 336 p. (in Russian).

7. Boikov I. V., Krivulin N. P., *Analiticheskie i chislennye metody identifikatsii dinamicheskikh sistem*, Penza, Penzenskii Gosudarstvennyi Universitet Publ., 2016, 398 p. (in Russian).

8. Boikov I. V., *Measurement Techniques*, 1991, vol. 34, no. 1, pp. 12–15. DOI: 10.1007/BF00978282

9. Boikov I. V., *Measurement Techniques*, 1994, vol. 37, no. 9, pp. 988–993. DOI: 10.1007/BF00980123

10. Boikov I. V., *Measurement Techniques*, 1995, vol. 38, no. 4, pp. 381–383. DOI: 10.1007/BF00976428

11. Boikov I. V., Krivulin N. P., *Measurement Techniques*, 2013, vol. 56, no. 4, pp. 359–367. DOI: 10.1007/s11018-013-0210-5

12. Sidorov D. N. *Metody analiza integralnykh dinamicheskikh modelei: teorii i prilozheniy*, Irkutsk, Irkutskii Gosudarstvennyi Universitet Publ., 2013, 293 p. (in Russian).

13. Doyle F. J., Pearson R. K., Ogunnaike B. A., *Identification and Control Using Volterra Models*, Springer-Verlag, 2012, 314 p.

14. Sizikov V. S., *Matematicheskie metody obrabotki rezultatov izmereniy*, Sankt Peterburg, Politehnika Publ., 2001, 240 p. (in Russian).

15. Vatulyan A. O., *Obratnye zadachi v mekhanike deformiruemogo tela*, Moscow, FIZMATLIT Publ., 2007, 223 p. (in Russian).

16. Kabanikhin S. I., *Obratnye i nekorrektnye zadachi*, Novosibirsk, Sibirskoe nauchnoe izdatelstvo Publ., 2009, 457 p. (in Russian).

17. Isermann R., Munchof M., *Identification of Dynamical Systems: An Introduction with Applications*, Springer-Verlag, 2011, 711 p.

18. Hasanov Hasanoğlu A., Romanov V. G., *Introduction to inverse problems for differential equations*, Springer International Publishing AG, 2017, 261 p.

19. Boikov I. V., Krivulin N. P., *Metrologiy*, 2012, no. 8, pp. 3–14.

20. Krylov V. I., Skoblya N. S., *Metody priblizennogo preobrazovaniy Furie i obrasheniy preobrazovaniy Laplasa (spravochnay kniga)*, Moscow, Nauka Publ., 1974, 224 p. (in Russian).

21. Shcherbakov M. A., *University proceedings, Volga region, Technical sciences*, 2011, no. 4 (20), pp. 43–56 (in Russian).

Дата поступления: 01.07.2019.

Дата принятия: 05.11.2019.

Non-stationary dynamic system characteristics recovery from three test signals

Ilia V. Boikov, Nikolay P. Krivulin

Penza State University, Penza, Russian Federation, e-mail: i.v.boikov@gmail.com, krivulin@bk.ru

Algorithms of exact restoration in an analytical form of dynamic characteristics of non-stationary dynamic systems are constructed. Non-stationary continuous dynamical systems modeled by Volterra integral equations of the first kind and non-stationary discrete dynamical systems modeled by discrete analogues of Volterra integral equations of the first kind are considered. The article consists of an introduction and three sections: 1) The exact restoration of the dynamic characteristics of continuous systems, 2) The restoration of the transition characteristics of discrete systems, 3) Conclusions. The introduction provides a statement of the problem and provides an overview of dynamical systems for which algorithms for exact reconstruction in an analytical form of the impulse response (in the case of continuous systems) and the transition characteristic (in the case of discrete systems) are constructed. In the first section, the algorithm is constructed for the exact reconstruction of the impulse response of a non-stationary continuous dynamic system from three interconnected input signals. The first signal may be arbitrary, the second and third signals are associated with the first signal by integral operator. The exact formula for the Laplace transform of the impulse response, represented by an algebraic expression from the Laplace transform of the system output signals, is given. A model example illustrating the effectiveness of the algorithm is given. The practical application of the presented algorithm is discussed. In the second section, an algorithm is constructed for the exact reconstruction of the transition response of a non-stationary discrete dynamical system from three input signals that are interconnected. The first signal may be arbitrary, the second and third signals are associated with the first summing operator. The exact formula of the Z-transform of the transition characteristic is presented, which is represented by an algebraic expression from the Z-transform of the system output signals. A model example is given. The "Conclusions" section provides a summary of the results presented in the article and describes the dynamic systems to which the proposed algorithms can be extended.

Key words: non-stationary dynamic system, continuous system, discrete system, impulse response, transition characteristic, identification.