

## Стохастическая оценка параметров ориентации антенного комплекса по результатам измерений бесплатформенной инерциальной системы

С. В. Соколов<sup>1</sup>, В. А. Погорелов<sup>1</sup>, А. Б. Шаталов<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Российский университет дружбы народов, Институт инновационных инженерных технологий, Москва, Российская Федерация, e-mail: s.v.s.888@yandex.ru, vadim.pogorelov.rnd@gmail.com

<sup>2</sup>АО «Серпуховский завод «Металлист», Серпухов, Московская обл., Российская Федерация, e-mail: shatalovab@yandex.ru

Рассмотрена задача высокоточного определения пространственной ориентации антенн радиотехнических комплексов, размещённых на высотных мачтах различных конструкций. Установлено, что применяемые в настоящее время методы, основанные на измерениях спутниковых навигационных систем и автономных измерениях бесплатформенных инерциальных систем ориентации, не обеспечивают требуемой точности решения поставленной задачи. Показано, что низкая точность существующих методов обусловлена как слабой помехоустойчивостью алгоритмов обработки информации, так и отсутствием возможности учёта динамических свойств параметров ориентации, измеряемых в условиях помех высокой интенсивности, свойства которых, как правило, не учитываются. Предложен динамический алгоритм оценки стохастических параметров ориентации антенны радиотехнического комплекса, инвариантный к характеру движения основания мачты и обеспечивающий устойчивость и требуемую точность оценивания при общих предположениях о характере помех чувствительных элементов бесплатформенной инерциальной системы ориентации. В качестве наблюдаемого вектора состояния – вектора параметров ориентации антенны, использован вектор параметров Родрига–Гамильтона, а в качестве вектора наблюдения за ним – вектор измерений датчиков угловой скорости бесплатформенной инерциальной системы. В приборный состав бесплатформенной инерциальной системы входят три акселерометра и три датчика угловой скорости, расположенные ортогонально в центре масс антенны. На основании полученных нелинейных стохастических уравнений динамики изменения вектора параметров текущей ориентации бесплатформенной инерциальной системы ориентации на подвижном основании и уравнений их наблюдения – стохастической модели сигналов измерения чувствительных элементов бесплатформенной инерциальной системы ориентации, построен нелинейный (обобщённый) фильтр Калмана, обеспечивающий искомое решение задачи оценки параметров текущей ориентации антенны на возмущённом основании. Приведены результаты проведённого численного эксперимента, сделан вывод о возможности применения фильтра для решения задачи оперативной ориентации антенн радиотехнических комплексов с использованием средне- и высокоточных бесплатформенных инерциальных систем ориентации и без коррекции в течение длительного времени.

**Ключевые слова:** антенна, подвижная мачта, нелинейная стохастическая оценка, пространственная ориентация, параметры Родрига–Гамильтона, бесплатформенная инерциальная система ориентации.

**Введение.** Непрерывное повышение требований к точности пространственной ориентации антенн радиотехнических комплексов (РТК), размещённых на мачтах различной конструкции и высоты, приводит к повышению требований к точности угловой ориентации этих антенн в условиях возмущённого движения мачты и помех измерения параметров ориентации [1–6]. В настоящее время существуют различные методы определения угловой ориентации антенны в условиях действия внешних возмущений и внутренних помех измерительного комплекса [7–17]. Так, например, широко используется метод, основанный на показаниях глобальных навигационных спутниковых

систем (ГНСС) [7]. В зависимости от решаемой задачи он предполагает установку на подвижном объекте двух или трёх пространственно-разнесённых антенн и определение угловой ориентации объекта по показаниям разнесённых спутниковых приёмников. Преимуществом такого подхода является отсутствие процедуры интегрирования показаний инерциальных чувствительных элементов, приводящей к накоплению погрешностей измерений с течением времени. В то же время низкая частота (1–20 Гц) получения выходной информации от ГНСС и слабая помехоустойчивость алгоритмов обработки информации с разнесённых спутниковых приёмников существенно

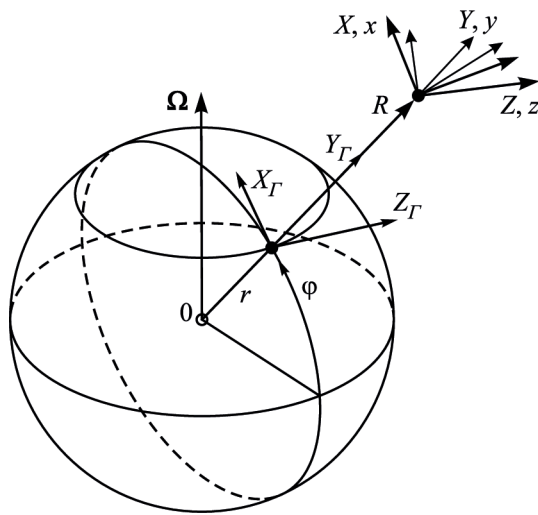


Рис. 1. Приборная  $Oxyz$ , географическая  $Ox_fY_fZ_f$  и сопровождающая  $OXYZ$  системы координат

Fig. 1. Coordinate system:

$Oxyz$  – instrument coordinate system (UCS)  $J$ ;  $Ox_fY_fZ_f$  – Earth-centered earth-fixed (ECEF)  $G$ ;  $OXYZ$  – Local-Level Frame (LLF)  $S$

затрудняют применение данного метода для решения задачи ориентации антенны, находящейся на высокочастотном подвижном основании [17–21].

В современных РТК всё большее внимание уделяется автономным методам, основанным на использовании бесплатформенных инерциальных систем ориентации (БИСО) [8–10, 22–24]. Однако существенным недостатком разработанных методов, обращающихся к показаниям БИСО, является невозможность учёта динамических свойств параметров ориентации. Такие параметры измеряются в условиях помех высокой интенсивности, а свойства этих помех не учитываются. [4, 11, 16]. Поэтому в существующих автономных системах нельзя достичь ориентации требуемой на сегодняшний день точности и невозможно добиться устойчивости процесса определения ориентации антенны РТК, размещённой на подвижном основании [1, 2].

Цель работы – разработать динамический алгоритм оценки стохастических параметров ориентации антенны РТК, инвариантный к характеру движения основания (мачты) и обеспечивающий устойчивость и требуемую точность оценивания при самых общих предположениях о характере помех чувствительных элементов БИСО.

**Постановка задачи.** Для решения задачи автономной ориентации антенны на подвижном основании будем полагать, что её центр масс соединён жёстким стержнем, моделирующим мачту, с точкой на поверхности Земли. Длина стержня –  $R$ , широта точки –  $\varphi$ . Центр масс антенны может вращаться вокруг указанной точки с произвольной угловой скоростью во всех направлениях под действием

внешних возмущений (рис. 1). Введём следующие системы координат:

приборная система координат (ПСК)  $J$   $Oxyz$  с началом в центре масс антенны, оси которой направлены по взаимно ортогональным осям чувствительного элемента БИСО;

географическая система координат (ГСК)  $G$   $Ox_fY_fZ_f$  с началом в точке крепления стержня. Ось  $X_f$  этой системы лежит в плоскости местного меридиана ( $\Omega$  – угловая скорость вращения Земли), ось  $Y_f$  направлена от центра Земли, а ось  $Z_f$  дополняет систему координат до правой;

сопровождающая система координат (ССК)  $S$   $OXYZ$  с началом в центре масс антенны, ось  $Y$  которой направлена вдоль стержня длиной  $R$ . Направления осей  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  в начальный момент времени совпадают с направлениями соответствующих осей ГСК  $X_f$ ,  $Y_f$ ,  $Z_f$ .

В соответствии с введёнными системами координат под задачей ориентации антенны на подвижной мачте далее будем понимать текущую оценку параметров разворота ПСК  $J$  относительно ГСК  $G$ , в качестве которых рассмотрим параметры Родрига–Гамильтона.

Пусть в состав БИСО в качестве чувствительных элементов входят три акселерометра и три датчика угловой скорости, расположенные ортогонально в центре масс антенны. Для сохранения общности решения в качестве моделей помех чувствительных элементов БИСО выберем аддитивные белые гауссовы шумы (БГШ) с нулевыми математическими ожиданиями и известными интенсивностями. Аддитивные БГШ наиболее адекватны в практике использования БИСО. Учёт корреляции помех или наличия в них регулярных составляющих, в том числе с неизвестными параметрами, обеспечивается соответствующим расширением вектора оцениваемых параметров и не влияет на существо предложенного далее подхода [24]. В этом случае модели выходных сигналов чувствительных элементов БИСО имеют следующий вид [22].

Для акселерометров

$$\mathbf{Z}_a = \mathbf{a}_J + \mathbf{W}_a, \quad (1)$$

где  $\mathbf{Z}_a = [Z_{a_x} \ Z_{a_y} \ Z_{a_z}]^T$  – вектор выходных сигналов трёх ортогональных акселерометров;  $\mathbf{a}_J = [a_x \ a_y \ a_z]^T$  – вектор ускорений центров масс антенны в ПСК;  $\mathbf{W}_a = [W_{a_x} \ W_{a_y} \ W_{a_z}]^T$  – вектор помех измерения акселерометров (центрированный БГШ с матрицей интенсивностей  $D_a$ ).

Для датчиков угловой скорости

$$\mathbf{Z}_d = \mathbf{\Omega}_J + \mathbf{W}_d, \quad (2)$$

где  $\mathbf{Z}_d = [Z_d_x \ Z_d_y \ Z_d_z]^T$  – вектор выходных сигналов трёх ортогональных датчиков угловой скорости;  $\mathbf{\Omega}_J = [\Omega_x \ \Omega_y \ \Omega_z]^T$  – вектор абсолютной угловой скорости вращения ПСК;  $\mathbf{W}_d = [W_d_x \ W_d_y \ W_d_z]^T$  – вектор помех измерения датчиков

угловой скорости (центрированный БГШ с матрицей интенсивностей  $D_d$ ).

Таким образом, окончательно сформулируем поставленную задачу как задачу стохастического оценивания текущей ориентации ПСК  $J$  (триэдра БИСО) относительно ГСК  $G$  по зашумленным измерениям чувствительного элемента БИСО. При этом будем учитывать априорно неопределенный характер изменения, во-первых, вектора угловой скорости центра масс антенны относительно начала ГСК  $G$  (точки крепления мачты длиной  $R$ ), а во-вторых, вектора угловой скорости триэдра БИСО относительно центра масс антенны при неизвестных углах начального рассогласования ПСК  $J$  и ГСК  $G$ .

**Решение задачи.** На первом шаге для построения алгоритма оценки случайного текущего вектора параметров Родрига–Гамильтона  $\eta = [\eta_0 \ \eta_1 \ \eta_2 \ \eta_3]^T$  разворота ПСК  $J$  относительно ССК  $S$  рассмотрим уравнения истинного изменения во времени параметров Родрига–Гамильтона [25]:

$$\dot{\eta} = \frac{1}{2} \Phi(\eta) \omega_J; \quad (3)$$

$$\eta(0) = \eta_0,$$

где  $\eta(0) = \eta_0$  – неизвестные параметры начального рассогласования ПСК  $J$  и ССК  $S$  (и ГСК  $G$ );  $\omega_J = [\omega_x \ \omega_y \ \omega_z]^T$  – вектор случайной угловой скорости ПСК  $J$  (триэдра БИСО) относительно ССК  $S$ , который в общем случае может быть описан центрированным БГШ с матрицей интенсивностей  $D_\omega$ :

$$\Phi(\eta) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -\eta_1 & -\eta_2 & -\eta_3 \\ \eta_0 & -\eta_3 & \eta_2 \\ \eta_3 & \eta_0 & -\eta_1 \\ -\eta_2 & \eta_1 & \eta_0 \end{bmatrix}. \quad (4)$$

На втором шаге рассмотрим динамику изменения вектора текущих параметров Родрига–Гамильтона  $\lambda = [\lambda_0 \ \lambda_1 \ \lambda_2 \ \lambda_3]^T$  разворота ССК  $S$  относительно ГСК  $G$ , которая описывается уравнением, аналогичным (3):

$$\dot{\lambda} = \frac{1}{2} \Phi(\lambda) \omega_S; \quad (5)$$

$$\lambda(0) = \lambda_0,$$

где  $\omega_S = [\omega_x \ \omega_y \ \omega_z]^T$  – вектор угловой скорости вращения ССК  $S$  относительно ГСК  $G$ .

Для описания вектора  $\omega_S$  применим выражение для вектора ускорения, возникающего при движении материальной точки по сфере радиуса  $R$ . Данное уравнение в ССК  $S$  запишем следующим образом [23]:

$$\mathbf{A}_S = \dot{\mathbf{V}}_S + (2\boldsymbol{\Omega}_S + \boldsymbol{\omega}_S) \times \mathbf{V}_S - \mathbf{g}_S, \quad (6)$$

где  $\mathbf{A}_S = [A_x \ A_y \ A_z]^T$  – вектор ускорений материальной точки в ССК;  $\mathbf{V}_S = [V_x \ V_y \ V_z]^T$  – вектор скорости материальной точки в ССК;  $\boldsymbol{\Omega}_S = [\Omega_x \ \Omega_y \ \Omega_z]^T$  – вектор угловой скорости вращения Земли в ССК;  $\boldsymbol{\omega}_S = [\omega_x \ 0 \ \omega_z]^T$  – вектор угловой скорости ССК относительно ГСК;  $\mathbf{g}_S = [g_x \ g_y \ g_z]^T$  – вектор ускорения силы тяжести в ССК;  $\times$  – знак векторного произведения.

Проекция вектора угловой скорости вращения Земли на оси ГСК  $G$  имеют вид

$$\Omega_{x_r} = \Omega \cos \varphi;$$

$$\Omega_{y_r} = \Omega \sin \varphi;$$

$$\Omega_{z_r} = 0.$$

Проекция вектора ускорения силы тяжести  $\mathbf{g}_r = [g_{x_r} \ g_{y_r} \ g_{z_r}]^T$  можно записать как

$$g_{x_r} = -\Omega^2 r \cos \varphi \sin \varphi;$$

$$g_{y_r} = \Omega^2 r \cos^2 \varphi - g;$$

$$g_{z_r} = 0,$$

где  $g$  – гравитационное ускорение;  $r$  – радиус Земли.

Поэтому для рассматриваемой ориентации осей ССК проекции векторов  $\mathbf{g}_S$ ,  $\boldsymbol{\Omega}_S$  на оси ССК определяются выражениями

$$\boldsymbol{\Omega}_S(\lambda) = [\Omega_x \ \Omega_y \ \Omega_z]^T = A(\lambda) \begin{bmatrix} \Omega \cos \varphi \\ \Omega \sin \varphi \\ 0 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{g}_S(\lambda) = [g_x \ g_y \ g_z]^T = A(\lambda) \begin{bmatrix} -\Omega^2 r \cos \varphi \sin \varphi \\ \Omega^2 r \cos^2 \varphi - g \\ 0 \end{bmatrix},$$

где матрица поворота  $A(\lambda)$  (направляющих косинусов) ССК  $S$  относительно ГСК  $G$  вычисляется по формуле [25]:

$$A(\lambda) = \begin{bmatrix} 2\lambda_0^2 + 2\lambda_1^2 - 1 & 2(\lambda_1\lambda_2 + \lambda_0\lambda_3) & 2(\lambda_1\lambda_3 - \lambda_0\lambda_2) \\ 2(\lambda_1\lambda_2 - \lambda_0\lambda_3) & 2\lambda_0^2 + 2\lambda_2^2 - 1 & 2(\lambda_2\lambda_3 + \lambda_0\lambda_1) \\ 2(\lambda_1\lambda_3 + \lambda_0\lambda_2) & 2(\lambda_2\lambda_3 - \lambda_0\lambda_1) & 2\lambda_0^2 + 2\lambda_3^2 - 1 \end{bmatrix}.$$

Система уравнений (6) в проекциях на оси выбранной ССК с учётом равенств  $\omega_X = V_Z R^{-1}$ ,  $\omega_Z = -V_X R^{-1}$  и приведённых выше проекций векторов  $\mathbf{g}_S$ ,  $\mathbf{\Omega}$  трансформируется к виду

$$\dot{\omega}_Z R = -A_X + 2\Omega_Y(\lambda)R\omega_X - g_X(\lambda); \quad (7)$$

$$0 = A_Y + [2\Omega_Z(\lambda) + \omega_Z]\omega_Z R + [2\Omega_X(\lambda) + \omega_X]\omega_X R + g_Y(\lambda);$$

$$\dot{\omega}_X R = A_Z - 2\Omega_X(\lambda)R\omega_Z + g_Z(\lambda).$$

Вектор ускорений  $\mathbf{A}_S$  можно представить через вектор ускорений  $\mathbf{a}_J$ , измеряемых акселерометрами (1), следующим образом:

$$\mathbf{A}_S = \mathbf{A}_*^T(\boldsymbol{\eta})\mathbf{a}_J = \mathbf{A}_*^T(\mathbf{Z}_a - \mathbf{W}_a),$$

где  $\mathbf{A}_*^T(\boldsymbol{\eta})$  – матрица поворота (направляющих косинусов) ПСК  $J$  относительно ССК  $S$ .

Данное соотношение совместно с уравнениями (7) позволяет сформировать стохастические уравнения, описывающие вектор  $\boldsymbol{\omega}_S$  угловой скорости движения ССК  $S$  относительно ГСК  $G$ :

$$\begin{vmatrix} \dot{\omega}_X \\ \dot{\omega}_Z \end{vmatrix} = L - R^{-1} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \mathbf{A}_*^T(\boldsymbol{\eta})\mathbf{W}_a, \quad (8)$$

где

$$L = 2 \begin{vmatrix} 0 & -\Omega_X(\lambda) \\ \Omega_Y(\lambda) & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \omega_X \\ \omega_Z \end{vmatrix} + \\ + R^{-1} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \mathbf{A}_*^T(\boldsymbol{\eta})\mathbf{Z}_a + R^{-1} \begin{vmatrix} g_Z(\lambda) \\ -g_X(\lambda) \end{vmatrix}.$$

Отметим, что полученная система уравнений (8), описывающая текущую ориентацию ССК в ГСК, в соответствии с поставленной задачей оказывается полностью инвариантна к характеру динамики движения основания (мачты), которое качается относительно начала ГСК.

Объединим системы уравнений (3)–(5), (8) и запишем полный вектор параметров текущей ориентации БИСО на подвижном основании следующим образом

$$\dot{\mathbf{Y}} = \mathbf{F}(\mathbf{Y}, t) + \mathbf{F}_1(\mathbf{Y})\mathbf{W}, \quad (9)$$

где

$$\mathbf{Y} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{\eta}^T & \lambda^T & \omega_X & \omega_Z \end{vmatrix}^T; \quad \mathbf{W} = \begin{vmatrix} \omega_J \\ 0 \\ \mathbf{W}_a \end{vmatrix}; \quad \mathbf{F}(\mathbf{Y}, t) = \begin{vmatrix} 0 \\ \Phi(\lambda)\omega_S \\ L \end{vmatrix};$$

$$\mathbf{F}_1(\mathbf{Y}) = \begin{vmatrix} \Phi(\boldsymbol{\eta}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -R^{-1} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \mathbf{A}_*^T(\boldsymbol{\eta}) & 0 \end{vmatrix},$$

где 0 – нулевая матрица соответствующей размерности.

Для стохастической оценки состояния нелинейных динамических систем вида (9) наиболее эффективным подходом в настоящее время считается использование методов теории стохастической фильтрации [28, 29], из которых самым широко известным и общепотребительным является нелинейный (обобщённый) фильтр Калмана. Однако для его применения необходим предварительный синтез уравнения наблюдателя компонент вектора  $\mathbf{Y}$ , т. е. информационной модели сигнала измерения, явно зависящей от составляющих вектора  $\mathbf{Y}$ .

В рассматриваемом в настоящей статье случае в качестве сигналов наблюдения вектора  $\mathbf{Y}$  можно выбрать выходные сигналы трёх ортогональных датчиков угловой скорости. Действительно, вектор  $\mathbf{\Omega}_J$  абсолютной угловой скорости вращения ПСК  $J$ , измеряемый датчиками угловой скорости, определяется суммой вектора  $\boldsymbol{\omega}_J$  и векторов  $\boldsymbol{\omega}_{S_J}$ ,  $\mathbf{\Omega}_{S_J}$ , заданных в ПСК  $J$ :

$$\mathbf{\Omega}_J = \boldsymbol{\omega}_J + \boldsymbol{\omega}_{S_J} + \mathbf{\Omega}_{S_J},$$

где

$$\boldsymbol{\omega}_{S_J} = \mathbf{A}_*(\boldsymbol{\eta})\boldsymbol{\omega}_S;$$

$$\mathbf{\Omega}_{S_J}(\boldsymbol{\eta}, \lambda) = \mathbf{A}_*(\boldsymbol{\eta})\mathbf{A}(\lambda) \begin{vmatrix} \Omega \cos \varphi \\ \Omega \sin \varphi \\ 0 \end{vmatrix}.$$

Это позволяет, исходя из приведённого выражения для  $\mathbf{\Omega}_J$  и уравнения вектора выходных сигналов трёх ортогональных датчиков угловой скорости (2), представить стохастическую модель вектора наблюдения следующим образом:

$$\mathbf{Z}_d = \boldsymbol{\omega}_J + \mathbf{A}_*(\boldsymbol{\eta})\boldsymbol{\omega}_S + \mathbf{A}_*(\boldsymbol{\eta})\mathbf{A}(\lambda) \begin{vmatrix} \Omega \cos \varphi \\ \Omega \sin \varphi \\ 0 \end{vmatrix} + \mathbf{W}_d = \\ = \mathbf{H}(\mathbf{Y}) + \mathbf{E}_* \begin{vmatrix} \omega_J \\ \mathbf{W}_d \end{vmatrix};$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{Y}) = \mathbf{A}_*(\boldsymbol{\eta})\boldsymbol{\omega}_S + \mathbf{A}_*(\boldsymbol{\eta})\mathbf{A}(\lambda) \begin{Bmatrix} \Omega \cos \varphi \\ \Omega \sin \varphi \\ 0 \end{Bmatrix}; \quad (10)$$

$$\mathbf{E}_* = |\mathbf{E}_3; \mathbf{E}_3|,$$

где  $\mathbf{E}_3$  – единичная матрица размерности 3.

Характерная особенность данного наблюдателя – возможность наблюдения всех параметров ориентации антенны в явном виде, что существенно влияет на сходимость и устойчивость процесса их оценивания. Отличительной чертой здесь оказывается наличие корреляции шумов объекта (9) и наблюдателя (10), которую необходимо далее учитывать при последующем построении фильтра Калмана.

Нелинейный фильтр Калмана, построенный по уравнениям «объект–наблюдатель» (9), (10) и обеспечивающий принципиальное решение поставленной задачи, имеет следующий вид [26, 27]:

$$\hat{\mathbf{Y}} = \mathbf{F}(\hat{\mathbf{Y}}, t) + \mathbf{K}(\hat{\mathbf{Y}}, t) [\mathbf{Z}_d - \mathbf{H}(\hat{\mathbf{Y}})]; \quad (11)$$

$$\mathbf{K}(\hat{\mathbf{Y}}, t) = \left( \mathbf{R} \frac{\partial \mathbf{H}^T(\hat{\mathbf{Y}})}{\partial \hat{\mathbf{Y}}} + \mathbf{S}_* \right) (\mathbf{D}_d + \mathbf{D}_\omega)^{-1};$$

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{R}}(\hat{\mathbf{Y}}, t) = & \left\{ \frac{\partial \mathbf{F}(\hat{\mathbf{Y}}, t)}{\partial \hat{\mathbf{Y}}} - \mathbf{S}_* (\mathbf{D}_d + \mathbf{D}_\omega)^{-1} \frac{\partial \mathbf{H}(\hat{\mathbf{Y}})}{\partial \hat{\mathbf{Y}}} \right\} \mathbf{R}(\hat{\mathbf{Y}}, t) + \\ & + \mathbf{R}(\hat{\mathbf{Y}}, t) \left\{ \frac{\partial \mathbf{F}(\hat{\mathbf{Y}}, t)}{\partial \hat{\mathbf{Y}}} - \mathbf{S}_* (\mathbf{D}_d + \mathbf{D}_\omega)^{-1} \frac{\partial \mathbf{H}(\hat{\mathbf{Y}})}{\partial \hat{\mathbf{Y}}} \right\}^T + \\ & + \mathbf{F}_1(\hat{\mathbf{Y}}, t) \mathbf{D}_0 \mathbf{F}_1^T(\hat{\mathbf{Y}}, t) - \\ & - \mathbf{R} \frac{\partial \mathbf{H}^T(\hat{\mathbf{Y}})}{\partial \hat{\mathbf{Y}}} (\mathbf{D}_d + \mathbf{D}_\omega)^{-1} \frac{\partial \mathbf{H}(\hat{\mathbf{Y}})}{\partial \hat{\mathbf{Y}}} \mathbf{R} - \mathbf{S}_* (\mathbf{D}_d + \mathbf{D}_\omega)^{-1} \mathbf{S}_*^T, \end{aligned}$$

где  $\hat{\mathbf{Y}}$  – вектор текущей оценки вектора состояния  $\mathbf{Y}(t)$ ;  
 $\mathbf{R}(\hat{\mathbf{Y}}, t)$  – апостериорная ковариационная матрица;

$$\hat{\mathbf{Y}}_0 = \mathbf{M}(\mathbf{Y}_0);$$

$$\mathbf{R}_0 = \mathbf{M} \{ (\mathbf{Y}_0 - \hat{\mathbf{Y}}_0) (\mathbf{Y}_0 - \hat{\mathbf{Y}}_0)^T \};$$

$$\mathbf{D}_0 = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_\omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{D}_a \end{bmatrix}; \quad \mathbf{S}_* = \mathbf{F}_1(\mathbf{Y}) \begin{bmatrix} \mathbf{D}_\omega & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{E}_*^T.$$

Для иллюстрации возможности эффективной практической реализации предложенного подхода рассмотрим следующий пример.

**Результаты имитационного моделирования.** Для анализа устойчивости и сходимости процесса оценивания вектора  $\mathbf{Y} = [\boldsymbol{\eta}^T \lambda^T \boldsymbol{\omega}_X \boldsymbol{\omega}_Z]^T$  с использованием фильтра (11) было выполнено численное моделирование процесса оценки ориентации антенны на высокочастотном подвижном основании. Моделирование осуществлялось на временном интервале [0; 1000] с с применением при интегрировании метода Рунге–Кутты четвертого порядка с шагом 0,01 с. Угловые скорости, определяющие истинную динамику движения антенны относительно ССК, задали центрированными случайными гауссовыми последовательностями с СКО  $10^{-2}$  рад/с, а динамику движения ССК относительно ГСК следующим образом:

$$\omega_X = 0,45 \cos(2,5t) \text{ рад/с};$$

$$\omega_Z = 0,35 \cos(2,8t) \text{ рад/с}.$$

Истинное угловое положение антенны определяли путём интегрирования уравнений (3), (5) с учётом выбранных моделей углового движения. Начальные условия определяли из уравнений связи параметров Родрига–Гамильтона  $\eta$  с углами Эйлера–Крылова  $\alpha, \beta, \gamma$  [25]:

$$\eta_0 = \cos(\alpha/2) \cos(\beta/2) \cos(\gamma/2) - \sin(\alpha/2) \sin(\beta/2) \sin(\gamma/2);$$

$$\eta_1 = \sin(\alpha/2) \cos(\beta/2) \cos(\gamma/2) + \cos(\alpha/2) \sin(\beta/2) \sin(\gamma/2);$$

$$\eta_2 = \sin(\alpha/2) \cos(\beta/2) \cos(\gamma/2) + \cos(\alpha/2) \sin(\beta/2) \sin(\gamma/2);$$

$$\eta_3 = \cos(\alpha/2) \sin(\beta/2) \cos(\gamma/2) - \sin(\alpha/2) \cos(\beta/2) \sin(\gamma/2);$$

Начальные значения углов выбрали следующим образом:

$$\alpha(0) = \frac{\pi}{5}; \quad \beta(0) = \frac{\pi}{4}; \quad \gamma(0) = \frac{\pi}{3}.$$

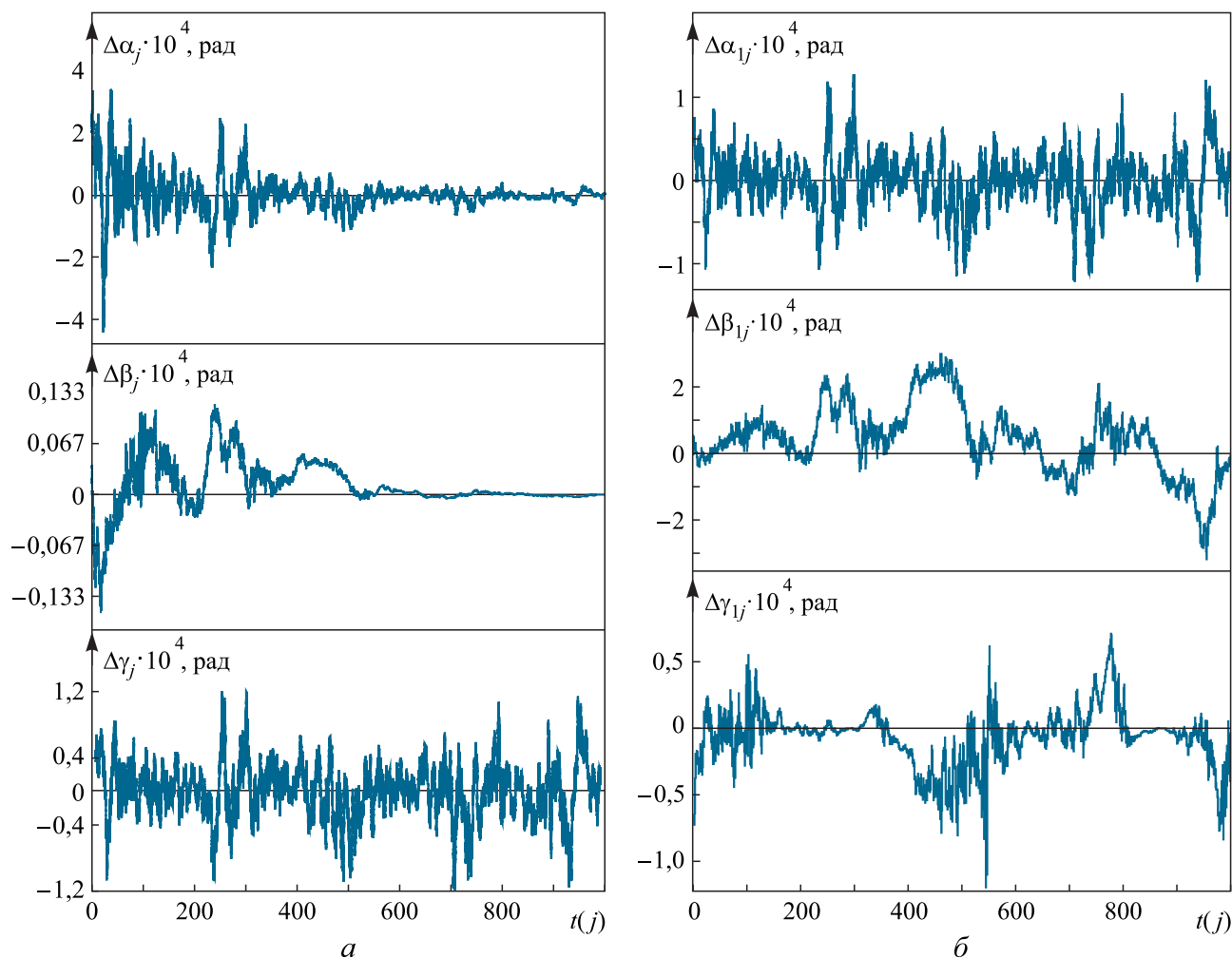


Рис. 2. Погрешности оценки углов  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  (а) и  $\alpha_1$ ,  $\beta_1$ ,  $\gamma_1$  (б)

Fig. 2. Errors estimation of an angle  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  (а) and an angle  $\alpha_1$ ,  $\beta_1$ ,  $\gamma_1$  (б)

Кроме того, начальные условия для нахождения углового положения антенны определяли, исходя из аналогичной связи параметров Родрига–Гамильтона  $\lambda$  с углами Эйлера–Крылова  $\alpha_1$ ,  $\beta_1$ ,  $\gamma_1$ , начальные значения которых задавали как

$$\alpha_1(0) = \frac{\pi}{4}; \beta_1(0) = \frac{\pi}{5}; \gamma_1(0) = \frac{\pi}{4}.$$

Компоненты векторов помех измерения акселерометров  $\mathbf{W}_a$  и датчиков угловой скорости  $\mathbf{W}_d$  моделировались центрированными случайными гауссовыми последовательностями с соответствующими средними квадратическими отклонениями, приведёнными ниже. Формирование реальных показаний датчиков угловой скорости осуществлялось путём наложения случайных гауссовых последовательностей на сумму вектора  $\omega_j$  и векторов  $\omega_{S_j}$ ,  $\Omega_{S_j}$ , заданных в ПСК  $J$ . Формирование матриц направляющих косинусов осуществ-

лялось с использованием параметров  $\eta$ ,  $\lambda$ , полученных при интегрировании уравнений (3), (5).

Для анализа результатов погрешности оценки, определённые в параметрах Родрига–Гамильтона, пересчитывали в углы Эйлера–Крылова в соответствии с известными из работ [24, 25] выражениями:

$$\alpha(t) = \arctan \left[ \frac{2\eta_0(t)\eta_2(t) - 2\eta_1(t)\eta_3(t)}{2\eta_1^2(t) + 2\eta_0^2(t) - 1} \right];$$

$$\beta(t) = \arcsin \{ 2[\eta_1(t)\eta_2(t) + \eta_0(t)\eta_3(t)] \};$$

$$\gamma(t) = \arctan \left[ \frac{2\eta_0(t)\eta_1(t) - 2\eta_2(t)\eta_3(t)}{2\eta_0^2(t) + 2\eta_2^2(t) - 1} \right];$$

$$\alpha_1(t) = \arctan \left[ \frac{2\lambda_0(t)\lambda_2(t) - 2\lambda_1(t)\lambda_3(t)}{2\lambda_1^2(t) + 2\lambda_0^2(t) - 1} \right];$$

$$\beta_1(t) = \arcsin \{ 2[\lambda_1(t)\lambda_2(t) + \lambda_0(t)\lambda_3(t)] \};$$

$$\gamma_1(t) = \arctan \left[ \frac{2\lambda_0(t)\lambda_1(t) - 2\lambda_2(t)\lambda_3(t)}{2\lambda_0^2(t) + 2\lambda_2^2(t) - 1} \right].$$

На рис. 2 представлены графики изменения погрешностей оценивания всех возможных углов текущей ориентации БИСО относительно ГСК. Проанализировав результаты моделирования, можно сделать следующие выводы.

1. Предложенный алгоритм оценки ориентации обеспечивает быструю сходимость и высокую устойчивость процесса оценивания. Погрешности оценивания углового положения антенны по всем углам ориентации не превысили  $10^{-4}$  рад, что соответствует не только современным, но и перспективным, требованиям к системам ориентации.

2. Увеличение погрешностей начальной оценки параметров  $\eta$  приводит к увеличению времени пространственной ориентации. Так, при начальных погрешностях, в угловом выражении равных 0,3 рад по всем трём углам, время достижения точности ориентации, приведённой в п. 1, увеличивается в три раза.

3. Вариации частоты и амплитуды колебаний мачты в пределах 50–80 % приводят к незначительному росту (не более 6 %) погрешностей оценивания, т. е. их влияние на точность ориентации оказывается существенно меньше, нежели погрешностей начальной оценки и СКО шумов измерений.

На рис. 2, а приведены погрешности оценивания углов  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  в ПСК  $J$  относительно ССК  $S$ , выраженные в соответствии с приведёнными выше формулами. Погрешности начальной оценки были заданы в пределах 0,004 рад (весьма критичных для современных систем начальной ориентации [3, 4, 13–16, 24, 26]), СКО помех датчика угловой скорости составило  $10^{-4}$  рад/с, а СКО помех акселерометров –  $10^{-5}$  м/с<sup>2</sup>.

При данном уровне помех погрешность оценки угла  $\alpha$  не превысила  $4 \cdot 10^{-4}$  рад на всём интервале моделирования. Для угла  $\beta$  погрешности оценки достигали значения  $1,2 \cdot 10^{-4}$  рад, но в целом лежали внутри интервала  $[-2,5 \cdot 10^{-4}; 2,5 \cdot 10^{-4}]$  рад. Погрешность оценки  $\gamma$  находилась внутри интервала  $[-2,5 \cdot 10^{-5}; 2,5 \cdot 10^{-5}]$  рад практически в течение всего времени моделирования. В конце интервала моделирования наблюдался некоторый рост погрешности оценки  $\gamma$ , но он не превысил  $1 \cdot 10^{-4}$  рад, что свидетельствует о высокой точности и устойчивости процедуры оценивания.

На рис. 2, б приведены погрешности оценивания ориентации ССК  $S$  относительно ГСК  $G$ , выраженные в углах  $\alpha_1$ ,

$\beta_1$ ,  $\gamma_1$ . Погрешности оценки углов  $\alpha_1$ ,  $\beta_1$ ,  $\gamma_1$  не превышают значения  $1,1 \cdot 10^{-4}$  рад на всём интервале моделирования, что обеспечивает точность ориентации антенны, удовлетворяющую требованиям как к современным, так и перспективным БИСО.

**Заключение.** Результаты проведённого имитационного моделирования позволяют сделать вывод, что устойчивость и высокая точность предложенного алгоритма обеспечивают возможность его применения для решения задачи оперативной ориентации антенн РТК, размещаемых на мачтах. При этом средне- и высокоточные БИСО можно использовать без их коррекции в течение достаточно длительного времени.

Статья подготовлена при поддержке Программы РУДН «5–100» гранта РФФИ № 18-07-00126. Результаты работы использованы при выполнении государственного задания № 1.11772.2018/11.12.

#### Список литературы

1. Методы спутникового и наземного позиционирования. Перспективы развития технологий обработки сигналов / Под ред. Дардари Д., Фаллетти Э., Луизе М.; пер. с англ. Е. Б. Махияновой. М.: Техносфера, 2012. 528 с.
2. Зайцев Д. В. Многопозиционные радиолокационные системы. Методы и алгоритмы обработки информации в условиях помех. М.: Радиотехника, 2007. 96 с.
3. Коновалов А. А. Основы траекторной обработки радиолокационной информации. СПб.: Изд-во СПбГЭТУ «ЛЭТИ», 2013. 164 с.
4. Красильщиков М. Н., Себряков Г. Г. Современные информационные технологии в задачах навигации и наведения беспилотных маневренных летательных аппаратов / Под. ред. М. Н. Красильщикова, Г. Г. Себрякова. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009. 556 с.
5. Соколов С. В., Погорелов В. А., Шаталов А. Б. Решение задачи автономной начальной ориентации БИНС на возмущённом основании с использованием параметров Родрига–Гамильтона // Известия вузов. Авиационная техника. 2019. № 1. С. 4–12.
6. Соколов С. В., Погорелов В. А. Нелинейная динамическая оценка углов ориентации подвижного объекта по распределённым спутниковым измерениям // Измерительная техника. 2019. № 4. С. 30–36. DOI: 10.32446/0368-1025it.2019-3-30-36
7. Кинкулькин И. Е. Глобальные навигационные спутниковые системы. Алгоритмы функционирования аппаратуры потребления: монография. М.: Радиотехника, 2018. 328 с. DOI: 10.18127.B9785931081755
8. Розенберг И. Н., Соколов С. В., Уманский В. И., Погорелов В. А. Теоретические основы тесной интеграции инерциально-спутниковых навигационных систем. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2018. 312 с.
9. Соколов С. В., Погорелов В. А. Стохастическая оценка, управление и идентификация в высокоточных навигационных системах. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2016. 264 с.

10. Соколов С. В., Погорелов В. А. Основы синтеза многоструктурных бесплатформенных навигационных систем. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009. 190 с.

11. Емельянец Г. И., Степанов А. П. Интегрированные инерциально-спутниковые системы ориентации и навигации / Под общей ред. акад. РАН В. Г. Пешехонова. СПб.: ГНЦ РФ АО «Концерн «ЦНИИ «Электроприбор», 2016. 394 с.

12. Vaknin E., Klein I., *Gyroscopy and Navigation*, 2016, vol. 7, no. 2, pp. 145–151. DOI: 10.1134/S2075108716020115

13. Thomas Brunner, Sébastien Changey, Emmanuel Pecheur, Jean-Philippe Lauffenburger, Michel Basset, *Evaluation of attitude estimation algorithms using absolute magnetic reference data: Methodology and results*. Proceedings of the Position, Location and Navigation Symposium – PLANS 2014, Monterey, United States May 5–8, 2014, pp. 212–218. DOI: 10.1109/PLANS.2014.6851378

14. Лукасевич В. И., Погорелов В. А., Соколов С. В. Алгоритм оценки параметров вращения распределенной антенны по спутниковым измерениям // Радиотехника. 2015. № 6. С.122–132.

15. Соколов С. В., Погорелов В. А., Лукасевич В. И. Нелинейная стохастическая фильтрация параметров углового движения распределенной антенны по спутниковым измерениям // Датчики и системы. 2015. № 5. С. 8–17.

16. Blanch J., Walter T., Enge P., *Proceedings of the IEEE* (Special Centennial Issue), 2012, vol. 13. pp. 1821–830. DOI: 10.1109/JPROC.2012.2190154

17. Ezzaldeen E., Knedlik S. and Loffeld O., *Sensors*, 2012, vol. 12.5, pp. 5310–5327. DOI: 10.3390/s120505310

18. Jahromi A. J., Broumandan A., Nielsen J., Lachapelle G., *International Journal of Navigation and Observation*, 2012, vol. 2012, Article ID127072, pp. 1–16. DOI:10.1155/2012/127072

19. Baziar A. R., Moazedi M., Mosavi M. R., *Journal of Wireless Personal Communications*, 2015, vol. 83, no. 3, pp. 1955–1970. DOI: 10.1007/s11277-015-2497-9

20. Bhatti J., Humphreys T. E., *Journal of the Institute of Navigation*, 2017, vol. 64(1), pp. 51–66. DOI: 10.1002/navi.183

21. Psiaki M. L., O'Hanlon B. W., Powell S. P., Bhatti J. A., *GPS World*, 2014, vol. 25, no. 11, pp. 36–44.

22. Salychev O. S., *Verified approaches to inertial navigation*, Moscow, BMSTU Press Publ., 2017, 368 p.

23. Salychev O. S., *Applied inertial navigation: problems and solutions*, Moscow, BMSTU Press Publ., 2004, 304 p.

24. Матвеев В. В., Распопов В. Я. Приборы и системы ориентации, стабилизации и навигации на МЭМС датчиках. Тула: Изд-во ТулГУ, 2017, 225 с.

25. Челноков Ю. Н. Кватернионные модели и методы динамики, навигации и управления движением. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2011, 560 с.

26. Сеницын И. Н. Фильтры Калмана и Пугачёва. М.: Логос, 2006, 640 с.

27. Соколов С. В., Ковалев С. М., Кучеренко П. А., Смирнов Ю. А. Методы идентификации нечетких и стохастических систем. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2018, 432 с.

## References

1. Davide Dardari, Emanuela Falletti, Marco Luise, *Satellite and Terrestrial Radio Positioning Techniques. A Signal Processing Perspective*, Elsevier, Inc., 2011.

2. Zajcev D. V., *Mnogopozicionnye radiolokacionnye sistemy. Metody i algoritmy obrabotki informacii v usloviyah pomekh*, Moscow, Radiotekhnika Publ., 2007, 96 p. (in Russian).

3. Kononov A. A., *Osnovy traektornoj obrabotki radiolokacionnoj informacii*, Saint Petersburg, ETU LETI Publ., 2013, 164 p. (in Russian).

4. Krasil'shchikov M. N., Sebyakov G. G., *Sovremennye informacionnye tekhnologii v zadachah navigacii i navedeniya bespilotnyh manevrennykh letatel'nykh apparatov*, Moscow, Fizmatlit Publ., 2009, 556 p. (in Russian).

5. Sokolov S. V., Pogorelov V. A., Shatalov A. B., *Russian Aeronautics*, 2019, vol. 62, no. 1, pp. 42–51. DOI: 10.3103/S1068799819010069

6. Sokolov S. V., Pogorelov V. A., *Measurement Techniques*, 2019, vol. 62, no. 3, pp. 30–36. DOI 10.1007/s11018-019-01610-4UDC62-50

7. Kinkul'kin I. E., *Global'nye navigacionnye sputnikovye sistemy. Algoritmy funkcionirovaniya apparatury potrebleniya: monografiya*, Moscow, Radiotekhnika Publ., 2018, 328 p. (in Russian). DOI: 10.18127/B9785931081755

8. Rozenberg I. N., Sokolov S. V., Umanskij V. I., Pogorelov V. A., *Teoreticheskie osnovy tesnoj integracii inercial'no-sputnikovyykh navigacionnykh system*, Moscow, Fizmatlit Publ., 2018, 312 p. (in Russian).

9. Sokolov S. V., Pogorelov V. A., *Stokhasticheskaya ocenka, upravlenie i identifikaciya v vysokotochnyykh navigacionnykh sistemah*, Moscow, Fizmatlit Publ., 2016, 264 p. (in Russian).

10. Sokolov S. V., Pogorelov V. A., *Osnovy sinteza mnogostrukturnykh besplatformennykh navigacionnykh system*, Moscow, Fizmatlit Publ., 2009, 190 p. (in Russian).

11. Emel'yancev G. I., Stepanov A. P., *Integrirovannyye inercial'no-sputnikovyye sistemy orientacii i navigacii*, Saint Petersburg, Concern CSRI Elektropribor Publ., JSC, 2016, 394 p. (in Russian).

12. Vaknin E., Klein I., *Gyroscopy and Navigation*, 2016, vol. 7, no. 2, pp. 145–151. DOI: 10.1134/S2075108716020115

13. Thomas Brunner, Sébastien Changey, Emmanuel Pecheur, Jean-Philippe Lauffenburger, Michel Basset, *Evaluation of attitude estimation algorithms using absolute magnetic reference data: Methodology and results*. Proceedings of the Position, Location and Navigation Symposium – PLANS 2014, Monterey, United States May 5–8, 2014, pp. 212–218. DOI: 10.1109/PLANS.2014.6851378

14. Lukasevich V. I., Pogorelov V. A., Sokolov S. V. *Radiotekhnika*, Moscow, Radiotekhnika Publ., 2015, no. 6, pp. 122–132 (in Russian).

15. Sokolov S. V., Pogorelov V. A., Lukasevich V. I., *Datchiki&Systemi*, 2015, no. 5, pp. 8–17 (in Russian).

16. Blanch J., Walter T., Enge P., *Proceedings of the IEEE* (Special Centennial Issue), 2012, vol. 13. pp. 1821–830. DOI: 10.1109/JPROC.2012.2190154
17. Ezzaldeen E., Knedlik S. and Loffeld O., *Sensors*, 2012, vol. 12.5, pp. 5310–5327. DOI: 10.3390/s120505310
18. Jahromi A. J., Broumandan A., Nielsen J., Lachapelle G., *International Journal of Navigation and Observation*, 2012, vol. 2012, ArticleID127072, pp. 1–16. DOI:10.1155/2012/127072
19. Bazar A. R., Moazedi M., Mosavi M. R., *Journal of Wireless Personal Communications*, 2015. vol. 83. no. 3. pp. 1955–1970. DOI: 10.1007/s11277-015-2497-9
20. Bhatti J., Humphreys T. E., *Journal of the Institute of Navigation*, 2017, vol. 64, pp. 51–66. DOI: 10.1002/navi.183
21. Psiaki M. L., O'Hanlon B. W., Powell S. P., Bhatti J. A., *GPS World*, 2014, vol. 25, no. 11, pp. 36–44.
22. Salychev O. S., *Verified approaches to inertial navigation*, Moscow, BMSTU Press Publ., 2017, 368 p.
23. Salychev O. S. *Applied inertial navigation: problems and solutions*, Moscow, BMSTU Press Publ., 2004, 304 p.
24. Matveev V. V., Raspopov V. Ya., *Pribory i sistemy orientatsii, stabilizatsii i navigatsii na MEHMS datchikah*, Tula, TulGU Publ., 2017, 225 p. (in Russian).
25. Chelnokov Yu. N., *Kvaternionnye modeli i metody dinamiki, navigatsii i upravleniya dvizheniem*, Moscow, Fizmatlit Publ., 2011, 560 p. (in Russian).
26. Sinicyn I. N., *Fil'try Kalmana i Pugacheva*, Moscow, Logos Publ., 2006, 640 p. (in Russian).
27. Sokolov S. V., Kovalev S. M., Kucherenko P. A., Smirnov Yu. A., *Metody identifikatsii nechetkih i stokhasticheskikh system*, Moscow, Fizmatlit Publ., 2018. 432 p. (in Russian).

Дата поступления: 12.08.2019.

Дата принятия: 03.10.2019.

## Stochastic evaluation of orientation parameters for an antenna complex using strapdown inertial system measurements

Sergey V. Sokolov<sup>1</sup>, Vadim A. Pogorelov<sup>1</sup>, Andrei B. Shatalov<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Innovational Engineering Technologies Institute, Peoples' Friendship University of Russia, Moscow, Russian Federation, e-mail: s.v.s.888@yandex.ru, vadim.pogorelov.rnd@gmail.com

<sup>2</sup>JSC "Serpukhovskiy Plant "Metallist", Serpukhov, Moscow region, Russian Federation, e-mail: shatalovab@yandex.ru

When solving the problem of high-precision spatial orientation of antennas of radio engineering complexes placed on high-rise masts of various designs, one of the main tasks is to increase the accuracy of their angular orientation in the conditions of inevitable disturbances of the mast base (due to wind disturbances, operation of various units, etc.) and interference of measurement of antenna orientation parameters by various measuring systems. Currently used methods based on measurements of satellite navigation systems and autonomous measurements of attitude and heading reference system do not provide the required accuracy for solving the problem of antenna orientation, located on a highly dynamic mobile base. This circumstance is due both to the weak noise immunity of algorithms of information processing and the inability of accounting for the dynamic properties of orientation parameters measured also in the presence of noise of high intensity, whose properties also usually are not taken into account. In this regard, the article considers a dynamic algorithm for estimating the stochastic parameters of the antenna orientation of the radio engineering complexes, invariant to the nature of the movement of the mast base and providing stability and the required accuracy of the evaluation under the most general assumptions about the nature of interference of the sensing elements attitude and heading reference system. As the observed state vector – the vector of antenna orientation parameters, the vector of Rodriguez–Hamilton parameters is used, and as the vector of observation of it – the vector of measurements of angular velocity sensors of a strapdown inertial system, which consists of three accelerometers and three angular velocity sensors located orthogonally in the center of mass of the antenna. Based on the nonlinear stochastic equations of dynamics of change of the vector of parameters of the current orientation attitude and heading reference system on the moving base and stochastic models of the measuring signals sensing elements attitude and heading reference system, a non-linear (generalized) Kalman filter, providing the desired solution of the problem of estimation of the parameters of the current orientation of the antenna on the perturbed basis, was built. The results of the numerical experiment allow us to conclude that it can be used to solve the problem of operational orientation of radio engineering complexes antennas placed on masts, using medium-and high-precision attitude and heading reference system without correction for a long time.

**Key words:** antenna, mobile mast, nonlinear stochastic evaluation, spatial orientation, Rodriguez–Hamilton parameters, strapdown inertial orientation system.