

Макет ватт-весов: математическое моделирование вертикальных направляющих на основе ирисовых пружин

Константин Владимирович Чекирда¹, Александр Анатольевич Янковский²,
Алексей Александрович Лобашев³✉

^{1, 2, 3} Всероссийский научно-исследовательский институт метрологии им. Д. И. Менделеева, Санкт-Петербург, Россия

¹k.v.chekirda@vniim.ru, <https://orcid.org/0000-0003-3462-1027>

²A.Yankovsky@vniim.ru

³A.A.Lobashev@vniim.ru✉

Аннотация. Новое определение килограмма в Международной системе единиц связано с фиксированием значения постоянной Планка. Новое определение килограмма практически реализуется компарированием механической и электрической мощностей в ватт-весах. Одним из основных узлов ватт-весов является катушка с током, движущаяся в постоянном однородном магнитном поле. Параметры движения катушки влияют на точность работы ватт-весов. Катушка должна двигаться строго вертикально без дополнительных движений, в том числе без поворотов относительно корпуса ватт-весов. Для обеспечения вертикального движения катушки ватт-весов в качестве направляющей предложена ирисовая пружина. Ирисовые пружины характеризуются малой продольной жёсткостью при значительной жёсткости в поперечных направлениях. Разработан модельный подход, при котором реальная ирисовая пружина из-за сложной геометрической формы заменена моделью, сохраняющей основные свойства исходной ирисовой пружины. Предложена и исследована модель лепестка ирисовой пружины в форме прямоугольной пластины с соответствующими уравнениями теории тонких пластин. При заданных деформациях (высоте изгиба) лепестка ирисовой пружины вычислены силы, действующие на лепесток. В режиме взвешивания пружина практически не деформирована, а её воздействие на катушку с током составляет приблизительно 10^{-6} Н. Вычислены углы поворота внутреннего кольца пружины для заданного набора высот. Рассмотренный подход к конструкции ирисовой пружины можно применить при разработке и создании ватт-весов в Российской Федерации.

Ключевые слова: килограмм, переопределение единиц величин, Международная система единиц, ватт-весы, ирисовая пружина, теория тонких пластин, фундаментальные физические константы

Для цитирования: Чекирда К. В., Янковский А. А., Лобашев А. А. Макет ватт-весов: математическое моделирование вертикальных направляющих на основе ирисовых пружин // Измерительная техника. 2022. № 11. С. 51–56. <https://doi.org/10.32446/0368-1025it.2022-11-51-56>

Финансирование: работа выполнена в рамках НИР «Исследование путей создания эталона килограмма на основе ватт-весов», шифр «Прогресс» (государственный контракт № 120-68/2021 от 08.11.2021 г.).

Watt balance layout: mathematical modeling of vertical guides based on iris springs

Konstantin V. Chekirda¹, Alexander A. Yankovsky², Alexey A. Lobashev³✉

^{1, 2, 3} D. I. Mendeleyev Institute for Metrology (VNIIM), St. Petersburg, Russia

¹k.v.chekirda@vniim.ru, <https://orcid.org/0000-0003-3462-1027>

²A.Yankovsky@vniim.ru

³A.A.Lobashev@vniim.ru✉

Abstract. The new definition of the kilogram in the International System of Units is connected with fixing the value of Planck's constant. Practical implementation of the new definition of the kilogram is carried out by comparing mechanical and electrical powers in watt balance. One of the main components of the watt balance is a coil with a current, moving in a constant homogeneous magnetic field. The parameters of the coil movement affect the accuracy of the watt balance. The main requirements for the movement of the coil are verticality and the absence of additional movements, including rotations around the axis. In this paper, we propose the use of iris springs as a guide to ensure vertical movement of the watt balance coil. A characteristic feature of iris springs is their low longitudinal stiffness with considerable stiffness in the transverse directions. Since the iris spring has a complex geometric shape, a model approach is developed in which the real spring is replaced by a model that retains basic properties of the original iris spring. The model of the petal of the iris spring is considered in the form of a rectangular plate with the corresponding equations of thin plate theory. The forces acting on the petal of the iris spring are calculated for given deformations. In the weighing mode the spring is practically not deformed, and its action on the coil with a current is of the order of 10^{-6} N. The angles of rotation of the inner ring of the spring for a given set of heights are calculated. The design of the iris spring is proposed, which provides a vertical movement of the coil without rotation relative to the body of the watt balance.

Keywords: kilogram, watt balance, redefinition of units, International System of Units, iris springs, theory of thin plates, fundamental physical constants

Financial Support: the work was supported by research work “Studying the ways to create a primary standard of kilogram based on watt-balance”, codename “Progress” (state contract no. 120-68/2021 dated November 08, 2021).

Введение. Создание ватт-весов и построение на их основе первичного эталона килограмма – актуальные задачи метрологии. Переход на новую Международную систему единиц (СИ)¹ связан с фиксированием значений фундаментальных физических констант [1–3]. Переопределение килограмма [4] стало возможно в результате существенного уточнения значения постоянной Планка [5–8]. Международным бюро мер и весов даны рекомендации² по реализации определения килограмма на практике. Практическая реализация определения килограмма осуществляется сравнением механической и электрической мощностей в устройствах известных как ватт-весы. Теория ватт-весов изложена в [9], где рассмотрены необходимые технические подходы к их созданию и приведено сравнение уже существующих и разрабатываемых ватт-весов.

Один из основных узлов ватт-весов – катушка с током, движущаяся в постоянном однородном магнитном поле. Параметры движения катушки влияют на точность работы ватт-весов. Основными требованиями к движению катушки являются вертикальность и отсутствие дополнительных движений, в том числе поворотов вокруг оси. Вибрации

оказывают крайне существенное влияние на точность воспроизведения килограмма посредством ватт-весов [10].

При создании существующих ватт-весов были исследованы различные варианты подвеса катушки – как свободный подвес, так и с применением направляющих. В ватт-весах METAS для обеспечения вертикального перемещения катушки разработана и применена конструкция с 13 гибкими шарнирами [11].

В данной работе для задания движения катушки в качестве направляющих предложено использовать ирисовые пружины. Характерная особенность ирисовых пружин – малая продольная жёсткость при значительной жёсткости в поперечных направлениях. При этом в положении равновесия, когда пружина не деформирована, её воздействие на катушку с током близко к нулю. Ирисовая пружина представляет собой плоскую пластину круглой формы (рис. 1). При приложении силы к внутреннему краю пружина растягивается. При этом внутренний край немного поворачивается относительно внешнего. Для оптимизации конструкции ватт-весов необходимо рассмотреть различные конструкции ирисовой пружины с разными геометрическими характеристиками.

При решении уравнений теории упругости [12, 13] для ирисовой пружины возможны численные расчёты деформации пружины под действием силы со стороны катушки с током. Численные вычисления необходимо выполнять для каждой рассматриваемой конструкции ирисовой пружины. При этом сетка разбиения должна быть мелкой, чтобы точно отразить геометрическую форму пружины, а это требует значительных вычислительных мощностей – большой памяти компьютера и быстродействия процессора. Кроме того, поскольку деформации ирисовой пружины большие (порядка 4 мм), то неизвестно, можно ли с помощью существующих прикладных программ считать такие задачи. Поэтому для анализа конструкций ирисовых пружин необходимо развитие приближённых методов.

Цель исследования – построение моделей ирисовых пружин, позволяющих вычислить их деформации под действием приложенных сил. В рамках развиваемого подхода можно рассчитать геометрически сложные конструкции ирисовых пружин, в том числе конструкции, обеспечивающие отсутствие поворота катушки относительно корпуса ватт-весов.

Модели ирисовых пружин. Рассмотрим подход к разработке моделей ирисовых пружин. Модель ирисовой пружины – явно сформулированное приближение к реальной пружине. При этом необходимо учитывать различные аспекты:

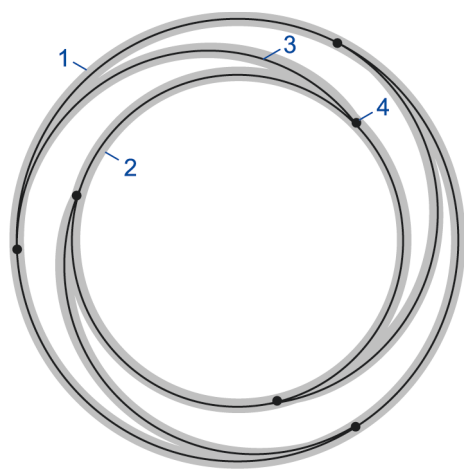


Рис. 1. Модель ирисовой пружины:

1 – внешнее кольцо; 2 – внутреннее кольцо; 3 – лепестки в форме модельной геометрии; 4 – точки крепления

Fig.1. The model of the iris spring:

1 – the external ring; 2 – the inner ring; 3 – the petals in the form of model geometry; 4 – the attachment points

¹ SI Brochure: The International System of Units (SI), 9th edition. URL: <https://www.bipm.org/en/publications/si-brochure/> (дата обращения: 12.10.2022).

² Mise en pratique for the definition of the kilogram (2021). Practical realization of the definition of some important units. SI Brochure – Appendix 2. URL: <https://www.bipm.org/en/publications/mises-en-pratique> (дата обращения: 20.10.2022).

геометрию как самого лепестка, так и объединения лепестков в ирисовую пружину, используемые уравнения теории упругости и применяемые для решения уравнений методы.

Геометрия. Вместо исходной геометрии ирисовой пружины (см. рис. 1), показанной серым тоном, рассмотрена более простая геометрия – каркас, выделенный полужирными линиями. Каркас состоит из колец, лепестков в форме модельной геометрии и точек крепления лепестков к кольцам. На рис. 1 и следующих рисунках дуга является условным графическим изображением лепестка в форме некоторой заданной модельной геометрии.

Рассмотрим ирисовую пружину, которая связана с другими компонентами ватт-весов следующим образом: внутреннее кольцо соединено с движущейся в магнитном поле катушкой с током, внешнее кольцо – с корпусом.

В развиваемом подходе к модели ирисовой пружины предполагается, что кольца бесконечно жёсткие (не деформируются), все лепестки одинаковые (полная симметрия), внутреннее кольцо движется вертикально. Сила, действующая на внутреннее кольцо $F_{\text{вн}}$, равна утроенной силе F , действующей на лепесток в точке крепления: $F_{\text{вн}}=3F$.

Рассмотрим только упругие силы, весом материала пружины пренебрежём.

Возможные модельные геометрии лепестка: прямоугольная пластина; пластина достаточно простой геометрической формы – сектор кольца; одномерный стержень как прямой, так и изогнутый по сектору окружности.

Уравнения теории упругости: уравнение бигармоническое для малых деформаций тонких упругих пластин; уравнение изгиба стержней; уравнения теории упругости для больших деформаций изгиба; уравнения теории упругости, учитывающие растяжение.

Методы решения уравнений – это точные решения, различные аналитические приближённые методы, численные методы, в основном метод конечных элементов, который реализован в ряде пакетов прикладных программ.

Модель ирисовой пружины определим как объединение геометрии, уравнения и метода.

Для работы ватт-весов большое значение имеет траектория движения ирисовой пружины. Траектория движения конкретной модели пружины – траектория точки крепления лепестка к внутреннему кольцу. Рассмотрим модели, в которых лепесток является прямым стержнем или узкой прямоугольной пластиной (рис. 2). Лепесток закреплён на внутреннем кольце в точке под углом $0 < \alpha < 180^\circ$. Поскольку в ведущих приближениях теории упругости лепесток не растягивается, то для сохранения его длины l внутреннее кольцо поворачивается. При достаточно общих предположениях о деформации лепестка выразим угол поворота φ через функцию деформации $w(x)$. Запишем длину изогнутого лепестка как

$$l = \int_0^d dx \sqrt{1 + (w'(x))^2}, \quad (1)$$

где d – длина проекции изогнутого лепестка на горизонтальную плоскость.

При небольших деформациях

$$l = d + 0,5 \int_0^d dx (w'(x))^2, \quad (2)$$

d отличается от l на малую величину $\varepsilon = l - d$. Функция $w(x)$ определяется моделью пластины и зависит от приложенной силы F , значение функции при $x = d$ задаёт высоту h поднятия кольца (рис. 2) R_2 над R_1 (изгиба лепестка) под действием этой силы.

Под действием силы F лепесток изгибается, длина проекции d на плоскость кольца R_2 становится меньше исходной длины l . А поскольку лепесток закреплён на кольце, то кольцо поворачивается на угол φ . Из геометрии рис. 2 следует

$$\varepsilon l = \varphi R_1 R_2 \sin \alpha, \quad (3)$$

где φ – малый угол поворота в радианах.

Траектория движения ирисовой пружины, как траектория точки крепления лепестка к кольцу, определяется зависимостью между углом φ и высотой h . В формулах (2), (3) траектория $\varphi(h)$ параметрически выражена через параметр F .

Для геометрической модели (см. рис. 2) длина лепестка l , угол крепления α и радиусы R_1 , R_2 связаны следующим соотношением:

$$l^2 = (R_1 + R_2 \cos \alpha)^2 + (R_2 \sin \alpha)^2. \quad (4)$$

Модель лепестка в форме прямоугольной пластины. Ирисовая пружина является пластиной, хотя и сложной геометрической формы. Поэтому её изгибные деформации

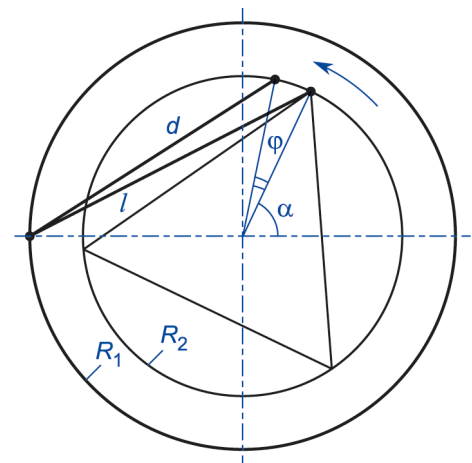


Рис. 2. Геометрия модели ирисовой пружины и поворот внутреннего кольца под воздействием вертикальной силы. Треугольник относится к геометрии реалистичной пружины с лепестком в форме прямоугольной пластины

Fig. 2. The geometry of the iris spring model and the turning of the inner ring under the influence of a vertical force. Triangle refers to the geometry of a realistic spring with the petal in the form a rectangular plate

Зависимость действующей на лепесток силы и угла поворота внутреннего кольца от высоты изгиба лепестка

h , мм	F , Н	φ , °
$1,000 \cdot 10^{-3}$	$7,995 \cdot 10^{-7}$	$4,962 \cdot 10^{-7}$
$5,000 \cdot 10^{-3}$	$3,998 \cdot 10^{-6}$	$1,240 \cdot 10^{-5}$
$1,000 \cdot 10^{-2}$	$7,995 \cdot 10^{-6}$	$4,962 \cdot 10^{-5}$
$2,000 \cdot 10^{-1}$	$1,599 \cdot 10^{-4}$	$1,985 \cdot 10^{-2}$
$5,000 \cdot 10^{-1}$	$3,998 \cdot 10^{-4}$	$1,240 \cdot 10^{-1}$
1,000	$7,995 \cdot 10^{-4}$	$4,962 \cdot 10^{-1}$
2,000	$1,599 \cdot 10^{-3}$	1,985
4,000	$3,198 \cdot 10^{-3}$	7,939

описываются в рамках модели тонких пластин [12, 13] би-гармоническим дифференциальным уравнением в частных производных:

$$D\Delta\Delta w(x, y) = 0, \quad (5)$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad D = Ea^3 / [12(1-\nu^2)],$$

где Δ – оператор Лапласа; D – цилиндрическая жёсткость пластины; E – модуль Юнга; a – толщина пластины; ν – коэффициент Пуассона.

Так как нет действующих на поверхность пластины сил, то правая часть уравнения (5) равна нулю. Все силы действуют только на границе пластины и вносят вклад в граничные условия.

Рассмотрим один лепесток в форме прямоугольной полоски. Координаты на полоске выберем так, чтобы ось X совпадала с серединной линией пластины вдоль длинной стороны, ось Y – вдоль узкой стороны левого края пластины. Левый край при $x=0$ жёстко закреплён, на правый край при $x=l$ действует сила F . В модели Кирхгофа тонкой пластины производится замена краевых условий, которые должны быть выполнены на её кромках, двумя приближёнными в соответствии с принципом Сен-Венана. Поэтому эта модель неверно описывает деформации на расстояниях порядка толщины пластины от её краев. В соответствии с этим на расстоянии порядка a от кромок $y = \pm b/2$ пренебрежём поперечными деформациями и будем считать пластину плоско деформированной. Тогда $w(x, y) \approx w(x)$. Соответствующие граничные условия

$$\left. \begin{aligned} w(x) = 0, \quad \partial w / \partial x = 0 \quad \text{при } x = 0, \\ -D \left[\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (1-\nu^2) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right] = \frac{F}{b} \quad \text{при } x = l, \\ -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = 0 \quad \text{при } x = l. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Решение уравнения (5) найдём в виде

$$w(x) = \sum_{k=0}^4 a_k x^k.$$

Из граничных условий (6) определим коэффициенты a_k . Решение примет вид

$$w(x) = F(3lx^2 - x^3) / (6bD). \quad (7)$$

Решение (7) уравнения (5) практически полностью совпадает с решением уравнения для изгиба упругого стержня [14]. Отличие в коэффициентах – bD в (7) для тонкой пластины вместо произведения модуля Юнга E на момент инерции I в случае стержня [14].

Для того чтобы определить численные значения сил и углов поворота для полученных решений, необходимо знать модуль Юнга и коэффициент Пуассона бериллиевой бронзы. Примем типичные для металлов и наиболее часто приводимые значения модуля Юнга бериллиевой бронзы³ 131000 МПа и коэффициента Пуассона 0,3.

Вычисление действующей на лепесток силы и углов поворота внутреннего кольца ирисовой пружины. Вычислим действующую на лепесток ирисовой пластины силу F в зависимости от высоты изгиба h лепестка и соответствующий угол поворота φ внутреннего кольца. Высоту изгиба (таблица) выберем так, чтобы отразить два режима работы ватт-весов [9]: режим взвешивания с диапазоном перемещений катушки 0–5 мкм и режим движения с большими перемещениями 0–4 мм.

Запишем выражение для силы F в модели прямоугольной пластины, которое следует из (7):

$$F = 3bDh/l^3. \quad (8)$$

Подставим решение (7) в (2) и получим

$$\varepsilon = \frac{[F/(bD)]^2 l^5 / 15}{1 + [F/(bD)]^2 l^4 / 8}. \quad (9)$$

В дальнейшем рассмотрим модели со следующими параметрами: радиусы окружностей $R_1 = 80$ мм, $R_2 = 60$ мм, толщина лепестка $a = 0,2$ мм, ширина лепестка $b = 5$ мм, модуль Юнга $E = 131000$ МПа, коэффициент Пуассона $\nu = 0,3$, угол крепления лепестка $\alpha = 60^\circ$. При таких значениях параметров и силе F (см. таблицу) можно пренебречь вторым слагаемым в знаменателе (9) по сравнению с единицей.

Угол поворота φ внутреннего кольца R_2 относительно внешнего R_1 вычислим по формуле (3), в которую подставлено ε из (9), а l определено по (4). Зависимость силы (см. (8)) и угла поворота от высоты изгиба лепестка приведены в таблице. Сила, действующая на ирисовую пружину из трёх лепестков, в три раза больше приведённой в таблице.

Кольцо R_2 является компонентом рассматриваемой математической модели. Для реальной ирисовой пружины,

³ Модуль Юнга бериллиевой бронзы. URL: <https://poliasmet.ru/svoystva-bronzyi/bronza-brb2.html> (дата обращения: 08.09.2022).

отвечающей этой модели, кольцо R_2 препятствует свободному вертикальному перемещению лепестка. Поэтому при изготовлении реальной ирисовой пружины можно методом лазерной резки из исходной сплошной пластины из бериллиевой бронзы вместо кольца вырезать подходящий треугольник (см. рис. 2). Под воздействием силы со стороны рамки точка крепления лепестка к треугольнику будет перемещаться по окружности радиусом R_2 .

Конструкция ирисовой пружины с нулевым углом поворота. Рассмотрим конструкцию ирисовой пружины для обеспечения вертикального движения катушки ватт-весов (кольца с рамкой)

без поворота относительно корпуса ватт-весов (рис. 3). Добавим к рассмотренной ранее (см. рис. 2) конструкции ещё одно внешнее кольцо R_3 , для численных расчётов примем $R_3 = 100$ мм.

Кольцо R_2 поворачивается относительно R_1 на угол φ_{12} против часовой стрелки, а кольцо R_1 – относительно R_3 на угол φ_{31} по часовой стрелке. Необходимо подобрать радиусы R_1 , R_2 , R_3 и длины лепестков l_{12} , l_{31} таким образом, чтобы

$$\varphi_{12} = \varphi_{31}. \quad (10)$$

Тогда прикрепленная к R_2 катушка не поворачивается относительно внешней стенки, жёстко соединённой с кольцом R_3 . Условием нулевого поворота внутреннего кольца R_2 относительно внешнего кольца R_3 служит выражение (10).

Сила, действующая на лепесток l_{12} и на лепесток l_{31} , одна и та же, поскольку воздействие со стороны катушки на кольцо R_2 полностью передается на кольцо R_1 .

Выразим φ из (3) и подставим в (10) с учётом ε , l соответственно из (9) и (4) и получим уравнение

$$\frac{(R_1^2 + R_2^2 + 2R_1R_2 \cos \alpha_{12})^3}{R_2 \sin \alpha_{12}} = \frac{(R_3^2 + R_1^2 + 2R_3R_1 \cos \alpha_{31})^3}{R_3 \sin \alpha_{31}}. \quad (11)$$

Уравнение (11) – одно соотношение между пятью переменными R_1 , R_2 , R_3 , α_{12} , α_{31} , его можно рассматривать как уравнение четырёхмерной поверхности в пятимерном пространстве. Если какие-либо четыре переменные известны, то уравнение (11) – уравнение с одной оставшейся переменной. Если известны и заданы R_1 , R_2 , R_3 , α_{12} , то неизвестной переменной в уравнении (11) является α_{31} . Решив численно нелинейное уравнение (11), получим

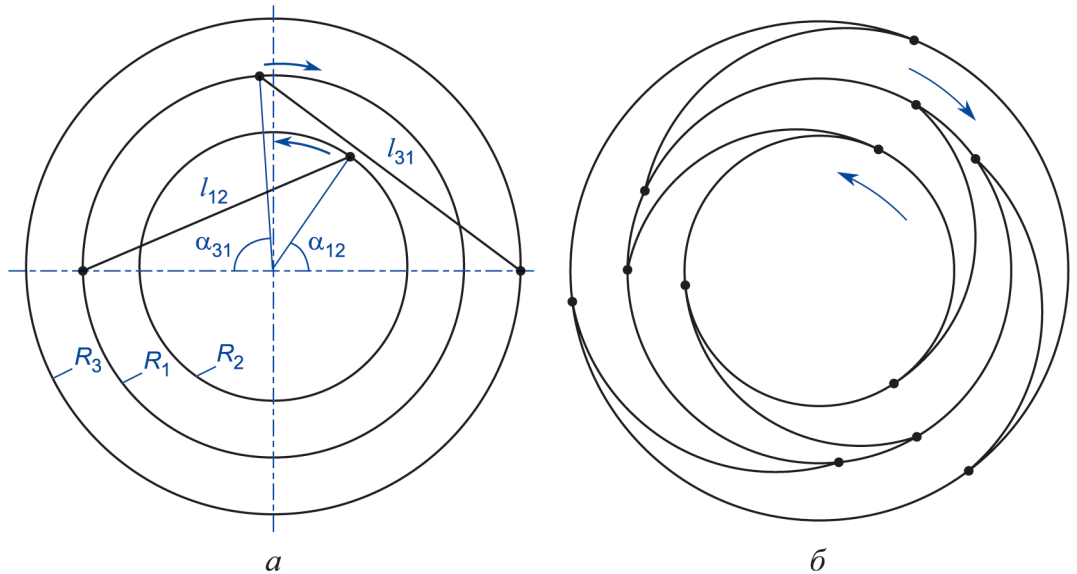


Рис. 3. Геометрия модели (а) и общий вид (б) ирисовой пружины с нулевым поворотом внутреннего кольца

Fig. 3. The geometry (a) and general view (b) of the iris spring model with zero turning of the inner ring

$\alpha_{31} = 1,4478$ рад = $82,954^\circ$. Из (4) вычислим соответствующую длину лепестка $l_{31} = 135,51$ мм. Поскольку лепестки l_{12} , l_{31} разной длины, то и высоты изгибов будут разными h_{12} , h_{31} соответственно, где высота h_{31} – высота изгиба лепестка l_{31} , закреплённого под углом α_{31} . Углы поворотов φ_{12} , φ_{31} при этом равны согласно (10), а внутреннее кольцо R_2 неподвижно относительно внешнего кольца R_3 .

Обсуждение результатов. Применение рассмотренного подхода к модели ирисовой пружины показало, что в режиме взвешивания силы составляют порядка 10^{-6} Н, что достаточно мало в случае макета ватт-весов. При создании рабочих ватт-весов необходим более детальный и точный учёт влияния ирисовой пружины, поскольку даже столь малое воздействие со стороны пружины сопоставимо с условием баланса между электрической и механической мощностями. Упругую силу со стороны пружины можно рассчитать в рамках развиваемого модельного подхода.

Используя приведённые в статье явные формулы для модели, можно получить все численные оценки для неопределённости силы и неопределённости угла поворота в зависимости от неопределённостей параметров ирисовой пружины (геометрических размеров: радиусов колец, длины, толщины и ширины лепестка) и механических характеристик материала пружины. Значительный вклад в неопределённость результата вносит неопределённость модуля Юнга материала пружины. Из справочников значение модуля Юнга бериллиевой бронзы известно с процентной точностью, соответственно такая же неопределённость сохранится и во всех выражениях. Поэтому необходимо определить модуль Юнга материала ирисовой пружины с высокой точностью. Для этого необходимы специальные эксперименты.

В режиме взвешивания деформации ирисовой пружины малы, и при этом требуется высокая точность определения силы. В режиме движения при перемещениях порядка 4 мм на ирисовую пружину действует внешняя сила от движителя, который обеспечивает равномерное движение рамки с током в однородном магнитном поле. При этом требования к точности вычисления упругой силы меньше, но, поскольку перемещения большие, необходимо вычисление углов поворота колец ирисовой пружины. Поэтому при расчётах деформаций пружины в этих двух разных режимах работы ватт-весов возможно применение разных моделей ирисовой пружины. В режиме взвешивания – модель тонкой пластины с малыми деформациями и численные методы решения уравнений. В режиме движения – тонкая пластина, большие деформации, приближённые методы решения уравнений, или даже модели с лепестками с геометрией стержней.

Заключение. Развитый подход к расчёту ирисовых пружин можно применить не только при создании макета ватт-весов, но и при конструировании реальных ватт-весов для реализации нового определения килограмма.

Список источников / References

1. Mills I., Mohr P., Quinn T., Taylor B., Williams E., *Metrologia*, 2006, vol. 43, pp. 227–246. <https://doi.org/10.1088/0026-1394/43/3/006>
2. Исаев Л. К., Кононогов С. А., Хрущев, В. В. О переопределении четырех основных единиц СИ // Измерительная техника. 2013. N 4. С. 3–8 [Isaev L., Kononogov S., Khrushchov V., On the Redefinition of the Four Base SI Units, *Measurement Techniques*, 2013, vol. 56, no. 2, pp. 113–120. <https://doi.org/10.1007/s11018-013-0167-4>]
3. Stock M., Davis R., Mirandés E., Milton M., *Metrologia*, 2019, vol. 56, 022001. <https://doi.org/10.1088/1681-7575/ab0013>
4. Mills I., Mohr P., Quinn T., Taylor B., Williams E., *Metrologia*, 2005, vol. 42, pp. 71–80. <https://doi.org/10.1088/0026-1394/42/2/001>
5. Steiner R., Newell D., Williams E., *J. Res. Natl Inst. Stand. Technol.*, 2005, vol. 110, no. 1, pp. 1–26. <http://dx.doi.org/10.6028/jres.110.003>
6. Robinson I., *Metrologia*, 2012, vol. 49, no. 1, pp. 113–156. <https://doi.org/10.1088/0026-1394/49/1/016>
7. Richard P., Fang H., Davis R., *Metrologia*, 2016, vol. 53, pp. A6–A11. <https://doi.org/10.1088/0026-1394/53/5/A6>
8. Possolo A., Schlamminger S., Stoudt S., Pratt J., Williams C., *Metrologia*, 2018, vol. 55, pp. 29–37. <https://doi.org/10.1088/1681-7575/aa966c>
9. Robinson I., Schlamminger S., *Metrologia*, 2016, vol. 53, pp. A46–A74. <https://doi.org/10.1088/0026-1394/53/5/A46>
10. Jiang X., Zeng W., Smith I., Scott P., Malettras F., *Measurement Science and Technology*, 2007, vol. 18, pp. 1487–94. <https://doi.org/10.1088/0957-0233/18/5/039>
11. Baumann H., Eichenberger A., Cosandier F., Jeckelmann B., Clavel R., Reber D., Tommasini D., *Metrologia*, 2013, vol. 50, pp. 235–242. <https://doi.org/10.1088/0026-1394/50/3/235>
12. Тимошенко С. П., Курс теории упругости / Под ред. Э. И. Григолюка: Киев: Наукова думка, 1972. 501 с. [Timoshenko S., *Theory of Elasticity*, McGraw-Hill Book Co., N.Y., 1934. 416 p.]
13. Тимошенко С. П., Войновский-Кригер С. Пластины и оболочки: Пер. с англ., под ред. Г. С. Шапиро: М.: Наука, 1966. 635 с. [Timoshenko S. P., Woinowsky-Krieger S., *Theory of Plates and Shells*, McGraw-Hill, N.Y., second ed., 1959. 595 p.]
14. Смирнов В. И., Курс высшей математики, том второй: М., Л.: ГИТТЛ, 1952. 622 с. [Smirnov V. I., *A course of higher mathematics, vol. II*, Pergamon Press, Addison-Wesley, Oxford, 1964, 630 p.]

Статья поступила в редакцию 10.09.2022; одобрена после рецензирования 12.09.2022; принята к публикации 29.09.2022.
The article was submitted 10.09.2022; approved after reviewing 12.09.2022; accepted for publication 29.09.2022.