

Научная статья

УДК 621.9.08

<https://doi.org/10.32446/0368-1025it.2022-11-17-24>

Способ построения контрольных карт для производственного процесса с распределением показателя качества по закону Рэлея

Сергей Николаевич Григорьев¹, Петр Николаевич Емельянов^{2✉}, Дмитрий Александрович Мастеренко³, Сергей Евгеньевич Педь⁴

1, 2, 3, 4 Московский государственный технологический университет «СТАНКИН», Москва, Россия

¹s.grigoriev@stankin.ru, <https://orcid.org/0000-0002-8239-5354>

²pemelyan@rambler.ru✉, <https://orcid.org/0000-0003-1752-0961>

³d.masterenko@stankin.ru, <https://orcid.org/0000-0003-1041-4218>

⁴seped@mail.ru

Аннотация. Рассмотрены контрольные карты – важный инструмент статистического управления процессами, необходимый для обеспечения качества изготавливаемых изделий. Показано, что существующие стандарты описывают построение контрольных карт по измерениям показателя качества, распределённого нормально. Установлено, что в ряде технологических процессов показатель качества имеет распределение в виде двухпараметрического обобщения закона Рэлея, характерное, в частности, для диаметров деталей с наружными и внутренними цилиндрическими поверхностями при определённых способах базирования и обработки. Решена задача построения контрольных карт Шухарта для слежения за технологическим разбросом и уровнем настройки подобных процессов. Решение указанной задачи основано на результатах исследований оценок параметров процесса, полученных в предыдущих работах авторов настоящей статьи. Представлены значения квантилей распределений статистик и других коэффициентов, используемых для построения контрольных карт. Приведён пример построения контрольных карт. Полученные результаты можно применять при мониторинге и обеспечении качества производственных процессов в дополнение к статистическим методам, разработанным для процессов с нормальным распределением и описанным в действующих стандартах.

Ключевые слова: измерительный контроль, выборочный контроль, статистические методы менеджмента качества, статистическое управление процессами, контрольные карты, распределение Рэлея

Финансирование: работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (проект № FSFS-2021-0003). Работа выполнена с применением оборудования центра коллективного пользования «Государственный инженеринговый центр» ФГБОУ ВО «МГТУ «СТАНКИН», работающего при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (проект № 075-15-2021-695 от 26.07.2021, уникальный идентификатор проекта RF-2296.61321X0013).

Для цитирования: Григорьев С. Н., Емельянов П. Н., Мастеренко Д. А., Педь С. Е. Способ построения контрольных карт для производственного процесса с распределением показателя качества по закону Рэлея // Измерительная техника. 2022. № 11. С. 17–24. <https://doi.org/10.32446/0368-1025it.2022-11-17-24>

Constructing control charts for a process with Rayleigh distributed output

Sergey N. Grigoriev¹, Petr N. Emelianov^{2✉}, Dmitry A. Masterenko³, Sergey E. Ped'4

1, 2, 3, 4 Moscow State University of Technology "STANKIN", Moscow, Russia

¹s.grigoriev@stankin.ru, <https://orcid.org/0000-0002-8239-5354>

²pemelyan@rambler.ru✉, <https://orcid.org/0000-0003-1752-0961>

³d.masterenko@stankin.ru, <https://orcid.org/0000-0003-1041-4218>

⁴seped@mail.ru

Abstract. Control charts are the important tool of the statistical process control that is intended to achieve the quality of product. Currents standards describe construction of control charts for processes with normally distributed output. The two-parameter generalization of Rayleigh distribution was found in some cases, particularly for internal and external cylindrical surfaces diameters under a definite locating and processing method. This article explains constructing Shewhart control charts for monitoring variation and shift of the process having the appointed distribution of quality characteristic. The results of the previous researches of the test statistics distributions were used. The quantiles of the distributions and other coefficients used for control charts constructing are presented. The example of the control charts construction is given. The results are applicable in statistical process control in quality management systems in addition to the standardized statistical methods, which are oriented to normally distributed data.

Keywords: measurement inspection, sampling, sampling plan, statistical methods of quality management, statistical process control, control charts, Rayleigh distribution

Financial support: This work was supported financially by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (project no. FSFS-2021-0003). The study was carried out on the equipment of the Centre of collective use "State Engineering Center" of MSUT "STANKIN" supported by the Ministry of Higher Education of the Russian Federation (project № 075-15-2021-695 from 26.07.2021, unique identifier RF-2296.61321X0013)

Введение. Одной из основных характеристик качества деталей в современном машиностроении является точность размеров, формы и расположения поверхностей, а также микропрофиля поверхности (шероховатость) деталей [1, 2]. Измерения всё чаще являются не финальной операцией, призванной удостоверить точность соблюдения требований к изделию, а составной частью процесса изготовления деталей, используются для управления процессом с целью обеспечения точности [3–5]. Однако в серийном, а тем более крупносерийном и массовом производствах особую важную роль играет не точность отдельных экземпляров, а точность процесса в целом, когда подавляющее большинство изделий характеризуются значениями показателя качества, находящимися в заданных границах [6, 7]. Методы менеджмента качества в значительной мере направлены на достижение стабильности процессов, на обеспечение воспроизводимости и повторяемости их результатов. Поэтому следует придерживаться стратегии предупреждения потерь, позволяющей избежать производства несоответствующей продукции, а не отбраковывать её на этапе приёмки. Такая стратегия предполагает сбор и анализ информации о процессе и его своевременную оптимизацию.

Производственный процесс находится в статистически подконтрольном состоянии, когда показатели качества от изделия к изделию изменяются исключительно случайным образом, независимы между собой и могут быть описаны некоторым законом распределения вероятностей [6, 8]. Случайные, внутренне присущие причины изменчивости процесса называются общими, в отличие от особых причин, которые проявляются в изменении вида распределения показателя качества или значений параметров распределения. К особым причинам можно отнести неоднородность материала, поломку инструмента, неправильную работу производственного или контрольного оборудования, несоответствующую квалификацию персонала, нарушение технологии, изменение производственных условий и т. д.

Понятие статистически подконтрольного состояния производственного процесса никак не связано с соответствием всех выпускаемых изделий спецификациям, поскольку не содержит упоминаний о предъявляемых требованиях. Однако выход процесса из статистически подконтрольного состояния, как правило, приводит к увеличению выпуска несоответствующей продукции. Таким образом, своевременное выявление возникновения особых причин изменчивости является важным инструментом обеспечения качества производственного процесса. Один из способов достижения этого – периодическое взятие выборок изделий и контроль либо измерение их показателя качества [7, 9].

Поскольку в значениях показателя качества присутствует случайная составляющая, то при обработке результатов контроля либо измерений используют методы проверки статистических гипотез, а именно, проверяют гипотезу о том, что процесс находится в статистически подконтрольном состоянии с неизменными значениями параметров

распределения показателя качества. Для выявления изменений значений параметров процесса ещё до того, как произойдёт выход размера за пределы поля допуска, основанного на выборочном контроле изготавливаемых изделий, предназначен аппарат контрольных карт.

Цель настоящей статьи – разработка способа построения контрольных карт Шухарта для управления процессом, в котором показатель качества распределён по закону $R(a, -\sigma)$ или $R(a, \sigma)$. Для этого предложена определённая процедура обработки измерительной информации о значениях показателя качества в выборках изделий.

Контрольные карты. Контрольная карта представляет собой визуальный инструмент проверки гипотезы о том, что значение некоторого параметра процесса не изменилось по сравнению с начальным («нулевая гипотеза»). Для этого обычно на контрольную карту наносятся центральная линия, соответствующая начальному значению параметра, и одна или две контрольные границы. В дальнейшем по ходу процесса периодически осуществляется отбор подгрупп изделий, контроль или измерение значений их показателя качества и вычисление некоторой выборочной характеристики. Полученное значение наносится в виде точки на контрольную карту.

Когда точка, полученная по результатам обработки очередной выборки, выходит за одну из контрольных границ, происходит «срабатывание» карты, т. е. нулевая гипотеза отвергается. В этом случае следует выполнить подналадку процесса (подналадка – дополнительная регулировка оборудования в процессе работы для восстановления технических параметров, достигнутых при первичной наладке).

Срабатывание контрольной карты может быть и ложным, если процесс остаётся в стабильном состоянии, но значение выборочной характеристики в очередной выборке случайно выходит за контрольные границы. Вероятность α ложного срабатывания с точки зрения статистической проверки гипотез является вероятностью ошибки 1-го рода. При построении контрольных карт стремятся обеспечить достаточно малую вероятность ложного срабатывания.

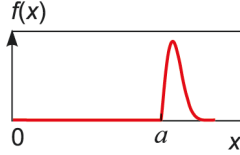
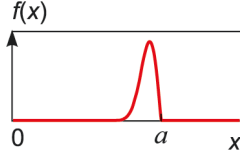
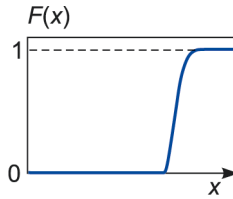
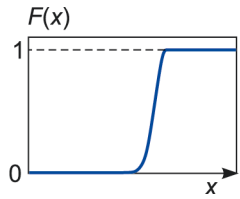
Как и для других параметрических методов проверки статистических гипотез, для контрольных карт важно распределение наблюдаемых величин. В производственных процессах, особенно при крупносерийном и массовом производстве, распределение показателя качества часто близко к нормальному. Действующие стандарты на контрольные карты по количественному признаку также разработаны для нормального распределения, например ГОСТ Р ИСО 7870-2-2015¹.

Однако отклонения от нормального закона распределения не всегда связаны с несовершенством процесса. Так, в [10] приведены фактические данные о распределении диаметров наружных цилиндрических поверхностей деталей в партии и обосновано положение о том, что их отклонения описываются законом Рэлея. Там же дано объяснение, что такое распределение диаметров получается при обработке

¹ ГОСТ Р ИСО 7870-2-2015. Статистические методы. Контрольные карты. Часть 2. Контрольные карты Шухарта.

Таблица 1

Законы распределения диаметров внутренних и наружных цилиндрических поверхностей

Характеристика	Внутренние поверхности	Наружные поверхности
Закон распределения	$R(a, \sigma)$	$R(a, -\sigma)$
Плотность распределения $f_X(x; a, \sigma)$ с графиком	$\begin{cases} \frac{x-a}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right), & x \geq a \\ 0, & x < a \end{cases}$ 	$\begin{cases} \frac{a-x}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{(a-x)^2}{2\sigma^2}\right), & x \leq a \\ 0, & x > a \end{cases}$ 
Функция распределения $F_X(x; a, \sigma)$ с графиком	$\begin{cases} 1 - \exp\left(-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right), & x \geq a \\ 0, & x < a \end{cases}$ 	$\begin{cases} \exp\left(-\frac{(a-x)^2}{2\sigma^2}\right), & x \leq a \\ 1, & x > a \end{cases}$ 

детали с базированием по цилиндрической поверхности, ось которой не совпадает с осью обрабатываемой поверхности, и при этом с обрабатываемой поверхности снимается припуск не меньше заданного с целью достижения требуемого качества этой поверхности. При этом именно нормальное распределение отклонений от соосности в каждой из взаимно перпендикулярных плоскостей порождает в итоге распределение Рэлея для отклонения диаметра поверхности. Распределение диаметра, в отличие от классического распределения Рэлея, содержит два параметра и обозначается $R(a, -\sigma)$ [10, 11].

При аналогичной обработке внутренней цилиндрической поверхности и действии, которое аналогично описанному в [10] вероятностному механизму, распределение значения диаметра можно обозначить $R(a, \sigma)$. Плотности и функции распределения законов $R(a, \sigma)$, $R(a, -\sigma)$ сопоставлены в табл. 1.

В [10, 11] построены планы выборочного контроля партий изделий, показатель качества которых распределён по закону $R(a, -\sigma)$ или $R(a, \sigma)$, как в упрощённой постановке, когда параметр a считается известным, так и в общем случае, когда оба параметра неизвестны. В настоящей статье построим контрольные карты Шухарта для управления процессом с показателем качества, распределённым по закону $R(a, -\sigma)$ или $R(a, \sigma)$, в которых

используются результаты измерений показателя качества в выборках изделий.

Постановка задачи. При работе с показателем качества, распределённым по нормальному закону, принято называть его математическое ожидание уровнем настройки или показателем положения, а среднее квадратическое отклонение – показателем разброса процесса. По аналогии с этим будем называть параметр a уровнем настройки или показателем положения, а параметр σ – показателем разброса процесса (несмотря на обозначение для распределения Рэлея этот параметр не является средним квадратическим отклонением). Оба параметра распределения оказывают влияние на точность размеров деталей в партии.

Рассмотрим задачу построения контрольных карт Шухарта, относящихся к классу карт «без памяти». Это означает, что каждая выборка обрабатывается независимо от всех предыдущих, а вероятность выхода за контрольные границы точки, полученной в результате обработки, определяется только текущей выборкой. Поэтому положения контрольных границ карт Шухарта рассчитываются исходя из распределений выборочных характеристик, используемых в картах.

Выше упоминалось, что контрольные карты строятся по результатам контроля или измерения изделий в выборках.

При контроле проверяется соответствие значения показателя качества установленным требованиям и подсчитывается число несоответствующих изделий, которое наносится на контрольную карту. Распределение показателя качества при этом роли не играет. В этом случае говорят о построении контрольных карт по альтернативному признаку, а нетривиальную информацию о ходе процесса можно получить, если есть несоответствующие изделия. Следовательно, контрольная карта, построенная по альтернативному признаку, не может служить средством предотвращения появления несоответствий.

Если измеряют значения показателя качества изделий в выборке, а на карту наносятся результаты статистической обработки, то контрольная карта построена по количественному признаку. В этом случае распределение показателя качества имеет значение. С помощью контрольных карт по количественному признаку можно заблаговременно отследить изменение параметров распределения, прежде чем оно приведёт к значительному выпуску несоответствующих изделий. Для этого используют статистики, имеющие меньший случайный разброс, чем индивидуальные значения показателя качества.

Статистические методы, основанные на контроле не по исходному, а по суженному допуску [12–19], по информативности занимают промежуточное положение между методами на базе альтернативного и количественного признаков.

Контрольные карты для показателя качества, распределённого по закону Рэлея, построены в [20], но только для одного неизвестного параметра σ . Параметры распределения $R(a, \sigma)$ можно также оценивать в рамках подхода, изложенного в [21] для гамма-распределения. Для построения контрольных карт рассмотренные оценки применимы ограниченно, поскольку в [21] построены лишь их асимптотические распределения, тогда как требуется знание распределений.

Таким образом, необходимо построить контрольные карты Шухарта (контрольные карты разброса и уровня настройки процесса) для процессов с распределением показателя качества $R(a, -\sigma)$ или $R(a, \sigma)$ на основе статистик, служащих оценками $\hat{a}$ и $\hat{\sigma}$ (либо $\hat{\sigma}^2$), для которых в [11] описан способ вычисления функций распределения.

Контрольная карта разброса процесса. Разброс процесса определяется параметром σ . В [11] найдена функция распределения величины

$$Y_n = \sum_{i=1}^n (X_i - X_{(1)})^2 = \sum_{i=2}^n (X_{(i)} - X_{(1)})^2, \quad (1)$$

где $X_1, X_2, \dots, X_n$ – независимые наблюдения, распределённые по одному и тому же закону $R(a, \sigma)$; $X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq \dots \leq X_{(n)}$ – порядковые статистики [22, 23], или величины

$$Y_n = \sum_{i=1}^n (X_{(n)} - X_i)^2 = \sum_{i=2}^n (X_{(n)} - X_{(i)})^2, \quad (2)$$

если наблюдения распределены по закону $R(a, -\sigma)$. В обоих случаях функция Y_n не зависит от параметра a , а зависимость от параметра σ можно записать в виде [11]:

$$F_{Y_n}(y; \sigma) = F_{Y_n^0}(y/\sigma^2),$$

где $F_{Y_n^0}$ – функция распределения величины Y_n^0 , определённой формулой (2) при распределении наблюдений $R(0, 1)$.

Для уровня p , удовлетворяющего условию $0 < p < 1$, квантиль распределения $F_{Y_n^0}$ обозначим как $y_{n;p}^0$.

Математическое ожидание статистики Y_n :

$$EY_n = \gamma_n(n-1)\sigma^2; \quad (3)$$

$$\gamma_n = 2 \left(1 - \sqrt{2\pi} \frac{n}{n-1} \int_0^\infty (1 - \Phi(z))(n-1)z^2 \exp\left(-\frac{(n-1)z^2}{2}\right) dz \right),$$

где Φ – функция стандартного нормального распределения.

Из (3) следует, что величина

$$\hat{\sigma}^2 = Y_n [\gamma_n(n-1)]^{-1} \quad (4)$$

является несмещённой оценкой σ^2 .

Если бы значение σ было известно, то, проведя верхнюю контрольную границу на высоте $\sigma^2 y_{n;1-\alpha}^0$, можно получить вероятность α выхода точки за эту границу, равную вероятности ошибки 1-го рода, или вероятности ложного срабатывания контрольной карты. Центральную линию в этом случае следует провести на уровне математического ожидания статистики Y_n , т. е. $\gamma_n(n-1)\sigma^2$.

Однако значение σ , как правило, неизвестно, поэтому обычно используют оценку величины σ^2 . Согласно рекомендациям ГОСТ Р ИСО 7870-2-2015 можно предложить следующий порядок построения карты разброса процесса.

1. Отобрать не менее 25 подгрупп изделий из процесса в стандартных условиях эксплуатации.

2. По результатам измерения показателя качества в каждой подгруппе вычислить значение s^2 оценки $\hat{\sigma}^2$ согласно (4).

3. Найти среднее арифметическое оценки по всем подгруппам $\bar{s}^2$ и провести центральную линию (CL) карты в виде горизонтальной прямой через точку с ординатой $\gamma_n(n-1)\bar{s}^2$.

4. Выбрав вероятность ошибки 1-го рода (как правило, 0,01), найти квантиль $y_{n;1-\alpha}^0$ и провести верхнюю контрольную границу (UCL) как горизонтальную прямую, проходящую через точку с ординатой $\bar{s}^2 y_{n;1-\alpha}^0$.

Нижняя контрольная граница для карт разброса не обязательна, поскольку нежелательным является именно увеличение разброса. Остальные действия по анализу и устранению особых причин изменчивости проводятся так же, как в ГОСТ Р ИСО 7870-2-2015.

В табл. 2 приведены значения квантилей $y_{n;p}^0$ для некоторых значений n, p , а также значения γ_n , необходимые для вычисления оценок (4).

Таблица 2

Коэффициенты и квантили для построения контрольных карт разброса

n	γ_n	$Y_{n;p}^0$		
		0,90	0,95	0,99
10	1,297	18,9	21,6	26,8
15	1,393	28,9	32,2	38,4
20	1,456	39,0	42,7	49,5
25	1,501	49,0	53,2	60,4

Таблица 3

Коэффициенты и квантили для построения контрольных карт уровня настройки

n	$\kappa_n \cdot 10^2$	$U_{n;p}^0$							
		0,005	0,010	0,050	0,100	0,900	0,950	0,990	0,995
10	1,346	-0,509	-0,478	-0,377	-0,311	0,364	0,478	0,695	0,774
15	0,537	-0,380	-0,361	-0,292	-0,243	0,284	0,375	0,549	0,611
20	0,284	-0,313	-0,299	-0,245	-0,206	0,24	0,316	0,464	0,520
25	0,174	-0,269	-0,259	-0,214	-0,181	0,212	0,279	0,411	0,460

Таблица 4

Контрольная карта уровня настройки (показателя положения). Для показателя положения a распределений $R(a, \sigma)$ и $R(a, -\sigma)$ обоснованы оценки соответственно [11]:

$$U_n = X_{(1)} - \sqrt{\kappa_n Y_n}; \quad (5)$$

$$U_n = X_{(n)} + \sqrt{\kappa_n Y_n}, \quad (6)$$

где $\kappa_n = \pi / [2n(n-1)\gamma_n]$.

Функцию распределения статистики U_n при наблюдениях, распределённых по закону $R(a, \pm\sigma)$, можно записать в виде

$$F_{U_n}(u; a, \pm\sigma) = F_{U_n^0}[\pm(u-a)/\sigma],$$

где $F_{U_n^0}$ – функция распределения статистики, вычисляемой по $R(0, 1)$ -распределённым наблюдениям [11], там же описан способ нахождения $F_{U_n^0}$.

Обозначим $u_{n;p}^0$ – p -квантиль распределения $F_{U_n^0}$. При распределении показателя качества по закону $R(a, \sigma)$ и известных значениях a, σ на контрольной карте требуется провести центральную линию через точку с ординатой a , верхнюю и нижнюю контрольные границы на уровнях соответственно $a + u_{n;1-\alpha_1}^0 \sigma, a + u_{n;\alpha_2}^0 \sigma$, где вероятности α_1, α_2 выхода значения U_n соответственно за верхнюю и нижнюю контрольные границы в сумме дают вероятность ошибки 1-го рода α . Распределение U_n несимметрично, $u_{n;\alpha_2}^0 < 0$ при близких к нулю α_2 , однако равенство $u_{n;\alpha_2}^0 = -a + u_{n;1-\alpha_2}^0$ не выполняется. Соответственно, при $\alpha_1 = \alpha_2$ контрольные границы не будут симметричными относительно центральной линии.

При распределении показателя качества по закону $R(a, -\sigma)$ центральная линия должна быть на том же уровне a , верхняя и нижняя контрольные границы – на уровнях соответственно $a - u_{n;\alpha_1}^0 \sigma, a - u_{n;1-\alpha_2}^0 \sigma$.

При неизвестных значениях параметров центральную линию и контрольные границы строят исходя из значений оценок параметров a, σ . Для построения карты уровня настройки процесса предлагаем следующий порядок действий.

1–4. Эти пункты совпадают с соответствующими пунктами, описанными при построении карты уровня настройки.

5. По результатам измерения показателя качества в тех же подгруппах изделий вычислить значение u статистики U_n по формуле (5) или (6) в каждой подгруппе.

6. Найти среднее арифметическое оценки по всем подгруппам $\bar{u}$ и провести центральную линию (CL) карты в виде горизонтальной прямой через точку с ординатой $\bar{u}$.
7. Выбрать вероятности α_1, α_2 ложного выхода за верхнюю и нижнюю контрольные границы соответственно (в сумме составляющие ошибку 1-го рода).

8. При обработке внутренней поверхности (при распределении $R(a, \sigma)$) найти квантили $u_{n;1-\alpha_1}^0, u_{n;\alpha_2}^0$ и провести горизонтальные прямые – верхнюю контрольную границу (UCL), проходящую через точку с ординатой $\bar{u} + u_{n;1-\alpha_1}^0 \sqrt{s^2}$ и нижнюю контрольную границу (LCL), проходящую через точку с ординатой $\bar{u} + u_{n;\alpha_2}^0 \sqrt{s^2}$.

9. При обработке наружной поверхности (при распределении $R(a, -\sigma)$) найти квантили $u_{n;\alpha_1}^0$ и $u_{n;1-\alpha_2}^0$ и провести горизонтальные прямые – верхнюю контрольную границу (UCL), проходящую через точку с ординатой $\bar{u} - u_{n;\alpha_1}^0 \sqrt{s^2}$, и нижнюю контрольную границу (LCL), проходящую через точку с ординатой $\bar{u} - u_{n;1-\alpha_2}^0 \sqrt{s^2}$.

В табл. 3 приведены значения квантилей $u_{n;p}^0$ для некоторых значений n, p , а также значения коэффициента κ_n , необходимые для вычисления оценок (5), (6).

Пример построения контрольных карт. Приведём пример построения контрольных карт разброса процесса и уровня настройки с использованием результатов измерения размеров деталей [10]. На примере выборки объёмом $n=10$ вычислим оценки параметров для первой из 25 выборок (подгрупп). Измеренные значения диаметра $x_i, i=1, n$, цилиндрической поверхности деталей приведены в табл. 4.

В данном случае для диаметров характерно распределение вида $R(a, -\sigma)$ [10], поэтому для оценивания параметров требуется найти максимальную порядковую статистику $x_{(n)} = \max_i \{x_i\} = 39,986$ мм. Сумма квадратов разностей

$(x_{(n)} - x_i)^2$ согласно табл. 4 $y_n = \sum_i (x_{(n)} - x_i)^2 = 0,000338 \text{ мм}^2$. По значению $\gamma_{10} = 1,297$ из табл. 2 вычислим

$$s^2 = y_n [\gamma_n (n-1)]^{-1} = 0,00002896 \text{ мм}^2.$$

С учётом $\kappa_{10} = 0,01346$ из табл. 3 найдём значение оценки параметра положения

$$u = x_{(n)} + \sqrt{\kappa_n y_n} = 39,986 + \sqrt{0,01346 \cdot 0,000338} = 39,988 \text{ мм}.$$

Аналогичным образом обработаны ещё 24 выборки, результаты их обработки представлены в табл. 5.

Далее определим параметры контрольных карт. Для обоих распределений выберем вероятность ложного срабатывания, равную 0,01. Для карты положения дополнительно примем вероятности ложного срабатывания «вверх» и «вниз» равными 0,005.

Параметры контрольной карты разброса:

центральная линия

$$CL = \gamma_{10} (10-1) \overline{s^2} = 1,297 \cdot 9 \cdot 0,00009153 = 0,001068 \text{ мм}^2;$$

верхняя контрольная граница ($y_{10;0,99}^0 = 26,8$, см. табл. 2)

$$UCL = \overline{s^2} y_{10;0,99}^0 = 0,00009153 \cdot 26,8 = 0,002453 \text{ мм}^2.$$

Таблица 5

Результаты статистической обработки $n_B = 25$ выборок деталей

n_B	$x_{(n)}$, мм	y_n	s^2 , мм ²	u , мм
1	39,986	0,000338	0,00002896	39,988
2	39,988	0,001347	0,00011539	39,992
3	39,986	0,001056	0,00009047	39,990
4	39,987	0,001687	0,00014452	39,992
5	39,986	0,000756	0,00006476	39,989
6	39,982	0,001153	0,00009877	39,986
7	39,986	0,000780	0,00006682	39,989
8	39,986	0,000498	0,00004266	39,989
9	39,985	0,001205	0,00010323	39,989
10	39,989	0,001566	0,00013416	39,994
11	39,984	0,000408	0,00003495	39,986
12	39,987	0,000652	0,00005586	39,990
13	39,987	0,001765	0,00015120	39,992
14	39,985	0,000783	0,00006708	39,988
15	39,988	0,001841	0,00015771	39,993
16	39,987	0,000689	0,00005903	39,990
17	39,987	0,000796	0,00006819	39,990
18	39,987	0,001968	0,00016859	39,992
19	39,988	0,001292	0,00011068	39,992
20	39,985	0,000430	0,00003684	39,987
21	39,988	0,000985	0,00008438	39,992
22	39,989	0,001199	0,00010272	39,993
23	39,989	0,000843	0,00007222	39,992
24	39,988	0,000736	0,00006305	39,991
25	39,988	0,001938	0,00016602	39,993
Среднее значение			0,00009153	39,990

Параметры контрольной карты уровня настройки:
центральная линия

$$CL = \bar{u} = 39,990 \text{ мм};$$

верхняя контрольная граница ($u_{10;0,005}^0 = -0,509$, см. табл. 3)

$$UCL = \bar{u} - u_{10;0,005}^0 \sqrt{s^2} = 39,990 - (-0,509) \cdot 0,009567 = 39,995 \text{ мм};$$

нижняя контрольная граница ($u_{10;0,995}^0 = -0,774$, см. табл. 3)

$$LCL = \bar{u} - u_{10;0,995}^0 \sqrt{s^2} = 39,990 - 0,774 \cdot 0,009567 = 39,983 \text{ мм}.$$

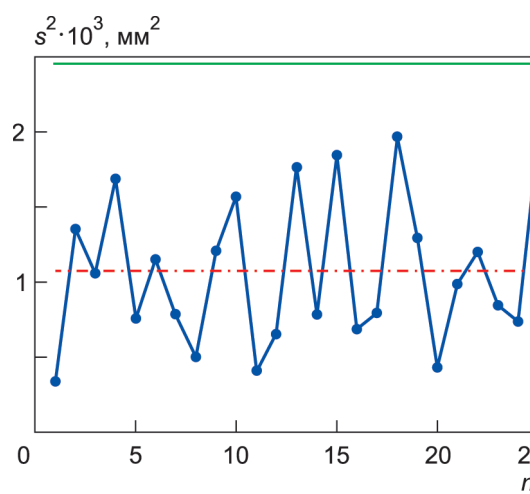


Рис. 1. Контрольная карта разброса (статистика Y_n) – параметр разброса s^2 в зависимости от номера n_B выборки

Fig. 1. Spread control map (Y_n statistics) – the spread parameter s^2 depending on the sample number n_s

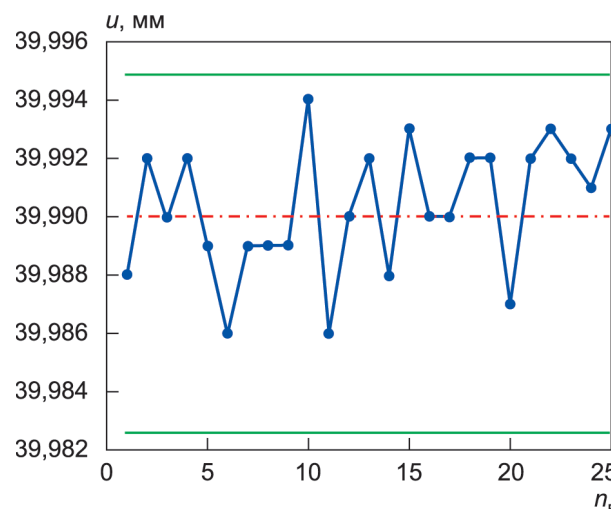


Рис. 2. Контрольная карта уровня настройки (статистика U_n) – оценка параметра положения u в зависимости от номера n_B выборки

Fig. 2. Adjustment level control map (U_n statistics) – estimation of the position parameter u depending on the sample number n_s

Контрольные карты, построенные по найденным значениям параметров, приведены на рис. 1, 2, где точки соответствуют результатам обработки выборок (см. табл. 5).

При дальнейшем наблюдении за процессом на карты необходимо наносить значения статистик, вычисляемые по периодическим выборкам. В случае выхода очередной точки за одну из контрольных границ требуется вмешательство в процесс с целью выяснения и устранения особых причин изменчивости.

Заключение. Настоящая статья завершает рассмотрение выборочного приёмочного контроля и статистического управления процессами как способов обработки измерительной информации, необходимых для обеспечения качества изделий, показатели качества которых распределены по двухпараметрическому закону (обобщённому распределению Рэлея).

В ходе исследований найдены способы расчёта распределений статистик, служащих оценками параметров распределения. Знание распределений позволяет строить оперативные характеристики планов выборочного измерительного контроля партий изделий, а значит, выбирать планы контроля исходя из заданных рисков поставщика и потребителя. В настоящей статье квантили распределений статистик использованы для построения контрольных карт, с помощью которых можно мониторить производственный процесс и предотвращать выпуск несоответствующей продукции.

Полученные результаты исследований являются дополнением к статистическим методам, разработанным для процессов с нормальным распределением, изложенным в действующих российских и международных стандартах, которые не применимы в рассматриваемых ситуациях.

Список источников

1. *Телешевский В. И.* Измерительная информатика в машиностроении // Вестник МГТУ «СТАНКИН». 2008. № 1. С. 33–38.
2. *Григорьев С. Н., Мастеренко Д. А., Телешевский В. И., Емельянов П. Н.* Современное состояние и перспективы развития метрологического обеспечения машиностроительного производства // Измерительная техника. 2012. № 11. С. 56–59.
3. *Григорьев С. Н., Телешевский В. И.* Проблемы измерений в технологических процессах формообразования // Измерительная техника. 2011. № 7. С. 3–7.
4. *Леун В. И., Николаева Е. В., Тигнибидин А. В.* Тенденция развития теории и практики создания управляющих приборов для повышения точности и производительности операций шлифования деталей и инструментов в технологических процессах машиностроения, приборостроения и инструментальных производств // Динамика систем, механизмов и машин. 2012. № 2. С. 251–254.
5. *Григорьев С. Н., Синопальников В. А., Терешин М. В., Гурин В. Д.* Контроль параметров процесса резания на основе диагностирования инструмента и заготовки. // Измерительная техника. 2012. № 5. С. 46–48.
6. *Деминг У. Э.* Выход из кризиса: Новая парадигма управления людьми, системами и процессами: Пер. с англ. М.: Альпина Бизнес Букс, 2007. 370 с.
7. *Лапидус В. А.* Система Шухарта. Н. Новгород: Приоритет, 2004. 65 с.
8. *Адлер Ю. П., Шпер В. Л.* Практическое руководство по статистическому управлению процессами. М.: Альпина Паблишер, 2019. 320 с.
9. *Уилер Д., Чамберс Д.* Статистическое управление процессами: Оптимизация бизнеса с использованием контрольных карт Шухарта. М.: Альпина Паблишер, 2009. 310 с.
10. *Григорьев С. Н., Емельянов П. Н., Мастеренко Д. А., Педь С. Е.* Выборочный измерительный контроль партий деталей с распределением размера по закону Рэлея // Измерительная техника. 2022. № 6. С. 28–35. <https://doi.org/10.32446/0368-1025it.2022-6-28-35>
11. *Григорьев С. Н., Емельянов П. Н., Мастеренко Д. А., Педь С. Е.* Выборочный контроль по двум параметрам на основе измерений размеров деталей с распределением Рэлея // Измерительная техника. 2022. № 9. С. 24–32. <https://doi.org/10.32446/0368-1025it.2022-9-24-32>
12. *Розно М. И.* Статистический контроль качества продукции по альтернативному признаку при изменённом допуске (метод АКУД) // Надёжность и контроль качества. 1992. № 2. С. 44–52.
13. *Steiner S. H., Geyer P. L., Wesolowsky G. O., International Journal of Production Research*, 1994, vol. 32, no. 1. pp. 75–91. <https://doi.org/10.1080/00207549408956917>
14. *Steiner S. H., Geyer P. L., Wesolowsky G. O., Quality and Reliability Engineering International*, 1996, vol. 12, no. 5, pp. 345–353. [https://doi.org/10.1002/\(SICI\)1099-1638\(199609\)12:5<345::AID-QRE11>3.0.CO;2-M](https://doi.org/10.1002/(SICI)1099-1638(199609)12:5<345::AID-QRE11>3.0.CO;2-M)
15. *Розно М. И.* Регулирование процессов на основе данных по альтернативному признаку по суженному допуску // Методы менеджмента качества. 2001. № 12. С. 27–33.
16. *Григорьев В. Г., Козлова Н. О., Юдин С. В.* Метод оценки центра группирования размеров в условиях производства на АРЛ // Автоматизация технологических процессов в машиностроении. Волгоградский государственный технический университет. 1995. С. 197–202.
17. *Григорьев В. Г., Козлова Н. О., Юдин С. В.* Информационно-статистические методы регулирования технологических процессов // Кузнечно-штамповочное производство. 2000. № 9. С. 27–29.
18. *Мастеренко Д. А.* Сравнение методов регулирования процессов на основе измерительной информации контроля по альтернативному признаку по суженному допуску // Вестник МГТУ «СТАНКИН». 2017. № 3(42). С. 74–79.
19. *Masterenko D. A., Metel A. S., Mechanics & Industry*, 2017, vol. 18, no. 7. <https://doi.org/10.1051/meca/2017054>
20. *Raza S. M., Butt M. M., Siddiqi A. F., Shewhart Control Charts for Rayleigh Distribution in the Presence of Type I Censored Data, Journal of ISOSS*, 2016, vol. 2(2), pp. 210–217.
21. *Орлов А. И.* Прикладная статистика. М.: Экзамен, 2004. 483 с.

22. Козлов М. В., Прохоров А. В. Введение в математическую статистику. М.: Изд-во МГУ, 1987. 264 с.

23. Розанов Ю. А. Теория вероятностей, случайные процессы и математическая статистика. М.: Наука, 1985. 320 с.

References

1. Teleshevsky V. I., Measuring informatics in mechanical engineering, *Vestnik of MSTU "STANKIN"*, 2008, no. 1. pp. 33–38. (In Russ.)

2. Grigoriev S. N., Masterenko D. A., Teleshevskii V. I., Emelyanov P. N., *Measurement Techniques*, 2013, vol. 55, no. 11, pp. 1311–1315. <https://doi.org/10.1007/s11018-013-0126-0>

3. Grigoriev S. N., Teleshevskii V. I., *Measurement Techniques*, 2011, vol. 54, no. 7, pp. 744–749. <https://doi.org/10.1007/s11018-011-9798-5>

4. Leun V. I., Nikolaeva E. V., Tignibidin A. V., The trend in the development of theory and practice of creating control devices to improve the accuracy and productivity of grinding operations of parts and tools in technological processes of mechanical engineering, instrumentation and tool production, *Dynamics of systems, mechanisms and machines*, 2012, no. 2, pp. 251–254. (In Russ.)

5. Grigoriev S. N., Sinopalnikov V. A., Tereshin M. V., Gurin V. D., *Measurement Techniques*, 2012, vol. 55, no. 5, pp. 555–558. <https://doi.org/10.1007/s11018-012-9999-6>

6. Deming W. E., *Overcoming the crisis: A new paradigm of managing people, systems and processes*, Cambridge, MA, MIT Center for Advanced Engineering Study, 1982.

7. Lapidus V. A., *Sistema Shuharta [Shewhart's System]*, N. Novgorod, Priority Publ., 2004, 65 p. (In Russ.)

8. Adler Yu. P., Shper V. L., *Prakticheskoe rukovodstvo po statisticheskomu upravleniyu processami [Practical guide to statistical process management]*, Moscow, Alpina Publisher, 2019, 320 p. (In Russ.)

9. Wheeler D. J., Chambers D. S., *Understanding Statistical Process Control*, Addison-Wesley, 1990, 310 p.

10. Grigoriev S. N., Emelyanov P. N., Masterenko D. A., Ped' S. E., Sampling by variables for Rayleigh distributed lots, *Izmeritel'naya Tekhnika*, 2022, no. 6, pp. 28–35. (In Russ.) <https://doi.org/10.32446/0368-1025it.2022-6-28-35>

11. Grigoriev S. N., Emelyanov P. N., Masterenko D. A., Ped' S. E., Two-parameters sampling on the base of measurements of Rayleigh distributed parts dimensions, *Izmeritel'naya Tekhnika*, 2022, no. 9, pp. 24–32. (In Russ.) <https://doi.org/10.32446/0368-1025it.2022-6-24-32>

12. Rozno M. I., Statisticheskij kontrol' kachestva produkcii po al'ternativnomu priznaku pri izmenyonnom dopuske (metod AKUD) [Statistical quality control of products on an alternative basis with a modified tolerance (AKUD method)], *Reliability and quality control*, 1992, no. 2, pp. 44–52. (In Russ.)

13. Steiner S. H., Geyer P. L., Wesolowsky G. O., *International Journal of Production Research*, 1994, vol. 32, no. 1, pp. 75–91. <https://doi.org/10.1080/00207549408956917>

14. Steiner S. H., Geyer P. L., Wesolowsky G. O., *Quality and Reliability Engineering International*, 1996, vol. 12, no. 5, pp. 345–353. [https://doi.org/10.1002/\(SICI\)1099-1638\(199609\)12:5<345:AID-QRE11>3.0.CO;2-M](https://doi.org/10.1002/(SICI)1099-1638(199609)12:5<345:AID-QRE11>3.0.CO;2-M)

15. Rozno M. I., Regulation of processes based on data on an alternative feature by a narrowed tolerance, *Methods of quality management*, 2001, no. 12, pp. 27–33. (In Russ.)

16. Grigorovich V. G., Kozlova N. O., Yudin S. V., Metod ocenki centra grupirovaniya razmerov v usloviyah proizvodstva na ARL [Method of estimating the size grouping center in production conditions at ARL], *Avtomatizaciya tekhnologicheskikh processov v mashinostroenii*, Volgograd State Technical University, 1995, pp. 197–202. (In Russ.)

17. Grigorovich V. G., Kozlova N. O., Yudin S. V., Informacionno-statisticheskie metody regulirovaniya tekhnologicheskikh processov [Information and statistical methods of regulation of technological processes], *Forging and stamping production*, 2000, no. 9, pp. 27–29. (In Russ.)

18. Masterenko D. A., Comparison of methods for regulating processes based on measuring control information on an alternative basis by the narrowed tolerance, *Vestnik of MSTU "STANKIN"*, 2017, no. 3, pp. 74–79. (In Russ.)

19. Masterenko D. A., Metel A. S., *Mechanics & Industry*, 2017, vol. 18, no. 7, 702. <https://doi.org/10.1051/meca/2017054>

20. Raza S. M., Butt M. M., Siddiqi A. F., Shewhart Control Charts for Rayleigh Distribution in the Presence of Type I Censored Data, *Journal of ISOSS*, 2016, vol. 2(2), pp. 210–217.

21. Orlov A. I., *Prikladnaya statistika [Applied statistics]*, Moscow, Examen Publ., 2004, 483 p. (In Russ.)

22. Kozlov M. V., Prohorov A. V., *Vvedenie v matematicheskuyu statistiku [Introduction to Mathematical Statistics]*, Moscow, MGU Publ., 1987, 264 p. (In Russ.)

23. Rozanov Yu. A., *Teoriya veroyatnostej, sluchajnye processy i matematicheskaya statistika [Probability theory, random processes and mathematical statistics]*, Moscow, Nauka Publ., 1985, 320 p. (In Russ.)

Статья поступила в редакцию 13.09.2022; одобрена после рецензирования 24.10.2022; принята к публикации 25.10.2022.
The article was submitted 13.09.2022; approved after reviewing 24.10.2022; accepted for publication 25.10.2022.