

Процедура измерения длины в специальной теории относительности

С. А. ЗВЕРЕВ

Таусонский университет, Таусон, Мэриленд (США), e-mail: szverev@towson.edu

Предложена процедура измерения длины в специальной теории относительности с соответствующими преобразованиями времени, координат и скоростей, относительно которых длина движущегося предмета оказывается инвариантной.

Ключевые слова: измерение длины, теория относительности, сокращение длины, замедление времени, преобразования времени и координат, инвариант.

The length measurement procedure in special theory of relativity with proper transformations of time, coordinates and velocities relative to which the moving object's length becomes invariant is proposed.

Key words: length measurement, theory of relativity, length contraction, time delay, time and coordinates transformation, invariant.

Известно, что эффекты сокращения длины и замедления времени являются результатом постоянства скорости света, одинаковой во всех инерциальных системах отсчета и не зависящей от относительного движения источника и приемника. На основе этого с применением принципа относительности Эйнштейн получил преобразования Лоренца, в которых константа $c = 3,0 \cdot 10^8$ м/с имеет смысл скорости безмассовой частицы в вакууме [1]. Предполагая пространство и время однородными и изотропными, а измерения длины стержня и интервалов времени в одних и тех же неизменных условиях, эффект замедления времени [1—5] можно представить классическим мысленным экспериментом со световыми часами, световой сигнал которых движется между двумя параллельными зеркалами (рис. 1). Временной интервал t между двумя событиями (отражениями от нижнего и верхнего зеркал), измеренный движущимся наблюдателем, оказывается больше временного интервала t_0 между теми же событиями в покоящейся системе отсчета:

$$t = t_0 / \sqrt{1 - v^2 / c^2}, \quad (1)$$

где v — скорость относительного движения систем отсчета.

Так как скорость светового сигнала одинакова для обоих наблюдателей, то в системе отсчета, связанной с движущимся наблюдателем, сигнал тратит на свой путь больше времени, поскольку проходит большее расстояние.

Эффект сокращения длины можно продемонстрировать при помощи другого классического мысленного эксперимента с движущейся платформой. Рассмотрим

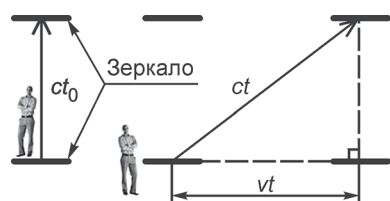


Рис. 1. Схема эксперимента со световыми часами

платформу, движущуюся со скоростью v относительно Земли, и двух наблюдателей: наблюдатель Π стоит посередине платформы, а наблюдатель D — на

Земле (рис. 2). Наблюдатель Π покоится относительно платформы, измеряет ее длину и получает результат l_0 . Теперь перейдем в систему отсчета, связанную с наблюдателем D , который движется относительно платформы. По часам этого наблюдателя две молнии одновременно бьют по краям платформы и оставляют на рельсе две отметки. В системе отсчета, связанной с Землей, световые сигналы от ударов молний начинают двигаться в сторону наблюдателя Π , каждый со скоростью света c относительно Земли. В это время наблюдатель Π продолжает движение навстречу сигналу, исходящему от передней части платформы, и одновременно удаляется от сигнала, исходящего от ее задней части. Наблюдатель D видит, как сначала первый сигнал освещает лицо наблюдателя Π , а затем — второй сигнал.

Рассмотрим, что при этом происходит в системе отсчета, связанной с платформой. С точки зрения наблюдателя Π оба сигнала движутся со скоростью света относительно платформы, т. е. время их движения к середине платформы одно и то же. Если один из сигналов достигает середины платформы раньше, чем другой, это означает, что первое событие в данной системе отсчета произошло раньше второго. Поскольку наблюдатель Π сначала регистрирует вспышку молнии и отметку на рельсе в передней части платформы и только через некоторое время — в ее задней части, и за это время платформа успевает продвинуться вперед по направлению движения, то, с точки зрения наблюдателя Π , расстояние l между отметками оказывается меньше, чем собственная длина l_0 платформы [1, 6]:

$$l = l_0 / \sqrt{1 - v^2 / c^2}. \quad (2)$$

Эффекты сокращения длины в движущейся системе отсчета и замедления времени основаны на том, что скорость света одинакова как для покоящегося, так и для движущегося наблюдателя. В данном эксперименте обе вспышки происходят одновременно по часам наблюдателя D , но не являются одновременными в системе отсчета, связанной с платформой.

Измерения длины. Движущийся предмет не испытывает физической деформации. Сокращение его длины — чисто кинематический эффект: разные наблюдатели, движущиеся с различными скоростями относительно предмета, получают не одинаковые результаты измерений его длины. Более того, результат измерения длины предмета зависит от процедуры измерения.

В специальной теории относительности процедура измерения длины определена следующим образом: наблюдатели *одновременно* измеряют координаты стержня, каждый в своей системе отсчета, и в зависимости от скорости своей системы относительно стержня, получают результаты в соответствии с (2) — всегда меньше собственной длины l_0 .

Рассмотрим стержень длиной l_0 , который движется вдоль калиброванной линейки. Применим другую процедуру измерения длины, например используемую на практике в повседневной жизни, когда визуально определяется количество единиц длины, укладываемых между концами линейки. При такой процедуре можно просто сфотографировать стержень и линейку, причем изображение формируют фотоны, которые *прибывают* к фотоаппарату одновременно (заметьте, что при стандартной процедуре регистрируются фотоны, одновременно *покидающие* стержень). Если сфотографировать стержень в направлении, перпендикулярном линейке, в тот момент, когда его середина будет точно напротив фотоаппарата, то в результате измерения получим величину $l < l_0$ в соответствии с (2), поскольку фотоны, одновременно прибывшие к фотоаппарату, также одновременно покинули стержень. Если же сфотографировать стержень, движущийся к наблюдателю вдоль линейки, то длина стержня

$$l = l_0 \sqrt{(1 + v^2/c^2)/(1 - v^2/c^2)}. \quad (3)$$

В этом случае $l > l_0$ (фотоны от разных концов стержня, прибывшие к фотоаппарату одновременно, были испущены стержнем в разное время: фотон от задней части был испущен раньше, и за время задержки стержень продвигается вперед по направлению движения).

Вернемся к стандартной процедуре измерения длины и рассмотрим мюон, рожденный на расстоянии 10,4 км от поверхности Земли и двигающийся со скоростью $v = 0,998c$ относительно Земли. Время жизни мюона $\tau = 2,2 \cdot 10^{-6}$ с, в течение которого он может преодолеть расстояние $\tau v = 2,2 \cdot 10^{-6} \cdot 3,0 \cdot 10^8 \cdot 0,998 \approx 659$ м. Однако реально он проходит дистанцию 10,4 км и достигает поверхности Земли. Объяснение этого эффекта заключается в том, что указанное выше время жизни мюона измерено в системе отсчета самого мюона. Наблюдатель D на Земле движется относительно мюона, и время жизни последнего в его системе отсчета по (1) составляет $34,8 \cdot 10^{-6}$ с. За это время мюон преодолевает расстояние около 10,4 км, а в своей системе отсчета — только 659 м.

Рассмотрим калиброванную линейку высотой в 10,4 км, вдоль которой движется мюон. Известно, что собственная длина линейки l_0 не зависит от наблюдателя, и наблюдатель P , «прикрепленный к мюону» и разбирающийся в теории относительности, знает, что на самом деле длина линейки 10,4 км, а не 659 м. Фактически это означает: наблюдатель P и наблюдатель D получили разные результаты измерений длины линейки благодаря определенной измерительной процедуре, при которой наблюдатель определяет координаты обоих

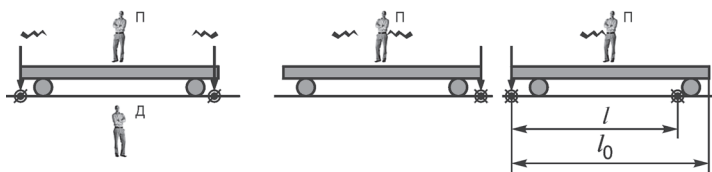


Рис. 2. Эксперимент с платформой, иллюстрирующий сокращение длины

концов стержня *одновременно* в своей системе отсчета, и при этом события одновременные в одной системе оказываются не одновременными в другой, и наоборот.

Другое объяснение этого эффекта заключается в следующем: так как скорость v движущейся системы отсчета относительно покоящейся равна скорости покоящейся системы относительно движущейся, и интервал между двумя событиями (рождением мюона и его прибытием на Землю) в движущейся и покоящейся системах различны, то и длина пути получается разной. Таким образом, длина l , измеренная наблюдателем P , меньше длины l_0 , измеренной наблюдателем D , потому что время t_0 жизни мюона в его системе меньше времени t жизни мюона, измеренного наблюдателем D , а скорость v мюона относительно Земли такая же, как и скорость движения Земли относительно мюона:

$$l < l_0 \text{ или } vt_0 < vt. \quad (4)$$

Для специалистов, хорошо знающих специальную теорию относительности, этот факт является обычным, так как они понимают, что такое собственная длина стержня и в чем заключается процедура ее измерения в разных системах отсчета. Однако для тех, кто не знает тонкостей этой противоречащей ежедневному опыту теории, данный факт понять и принять непросто: физической деформации линейки, вдоль которой движется мюон, нет, а два наблюдателя получают разные значения его длины.

Небольшая путаница у изучающих основы специальной теории относительности может возникнуть с ответом на вопрос, в каком случае систему отсчета нужно считать движущейся, а в каком — покоящейся. Рассмотрим пример с мюоном. В (1) t_0 — временной интервал, измеренный в покоящейся системе мюона; t — интервал между теми же событиями, измеренный движущимся наблюдателем D на Земле. В (2), все наоборот, l — длина линейки, измеренная на этот раз в движущейся системе мюона; l_0 — длина линейки (стержня) в системе отсчета, связанной с Землей (в этом случае считается покоящейся). Формула (4) действительно выглядит необычно: длина линейки (стержня) в движущейся системе определяется умножением скорости движущейся системы на время движения в покоящейся системе, а длина линейки в покоящейся системе — умножением скорости на время в движущейся системе. Во избежание возможной путаницы при дальнейшем изложении материала введем индекс «п» для всех результатов измерений в системе отсчета, покоящейся относительно линейки (стержня), и индекс «д» — для результатов измерений в системе отсчета, движущейся относительно линейки. Поскольку на рис. 1 часы движутся относительно линейки, заменим в (1) t на t_n и t_0 на t_d , а в (3) — l на l_d и l_0 на l_n , где l_d , l_n — соответственно длины линейки, измеренные в движущейся и покоящейся *относительно линейки* системах отсчета; t_d , t_n — интервалы между событиями, измеренные в движущейся и покоящейся системах

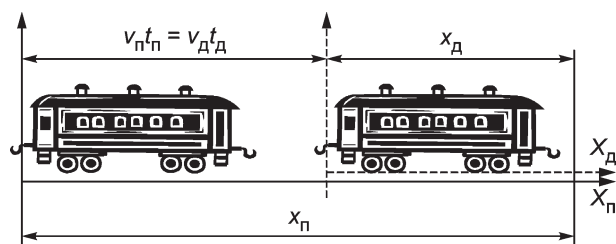


Рис. 3. Иллюстрация к преобразованию координат

отсчета. С учетом новых обозначений соотношение (4) можно переписать в виде

$$l_d < l_n \text{ или } v t_d < v t_n. \quad (5)$$

Временной интервал. Рассмотрим подход к описанию релятивистской кинематики, где длина стержня будет инвариантом относительно соответствующих преобразований, а не только собственной длиной, как в общепринятой интерпретации специальной теории относительности. Определим такую процедуру измерения длины стержня, при которой в любой движущейся системе отсчета результат измерения будет один и тот же, такой же, как и в покоящейся относительно стержня системе, т. е. собственная длина l_n . Эти преобразования должны привести к результату $l_d = l_n$.

Наблюдатель Π покоится относительно калиброванной линейки (в нашем примере с мюоном — это человек, стоящий у вертикальной линейки (стержня) высотой 10,4 км), а наблюдатель D (мюон) движется относительно этой линейки. Оба наблюдателя в результате измерений должны получить одну и ту же длину линейки l (в приведенном примере — 10,4 км). Поскольку время движения вдоль стержня в системе отсчета наблюдателя D меньше, чем время измеренное наблюдателем Π ($t_d < t_n$), то для того, чтобы левая часть уравнения (5) равнялась правой части, т. е. $l_d = l_n = l$, необходимо предположить, что скорость v_d относительно линейки, измеренная наблюдателем D , больше, чем скорость v_n наблюдателя D , измеренная наблюдателем Π , причем так, чтобы

$$v_n t_n = v_d t_d. \quad (6)$$

Для этого наблюдатель D должен определить скорость своего движения v_d относительно линейки как результат деления длины линейки $l = v_n t_n$ на t_d .

Определим соотношение между v_d и v_n (см. рис. 1):

$$c^2 t_n^2 = v_n^2 t_n^2 + c^2 t_d^2. \quad (7)$$

Из (7) следует, что

$$t_d = t_n \sqrt{1 - v_n^2/c^2}. \quad (8)$$

В соответствии с (6) заменим $v_n t_n$ в (7) на $v_d t_d$ и получим

$$c^2 t_n^2 = v_d^2 t_d^2 + c^2 t_d^2.$$

$$t_n = t_d \sqrt{1 + v_d^2/c^2}. \quad (9)$$

Из (6), (8), (9) следует, что

$$v_n = v_d / \sqrt{1 + v_d^2/c^2}; \quad v_d = v_n / \sqrt{1 - v_n^2/c^2}. \quad (10)$$

В эксперименте с мюоном: v_n — скорость мюона, измеренная наблюдателем D путем деления длины линейки (стержня) на t_n (известно, что $v_n \leq c$); v_d — скорость мюона, измеренная прикрепленным к нему наблюдателем Π и полученная делением длины линейки на t_d . Если $v_n \rightarrow c$, то $v_d \rightarrow \infty$ ($0 \leq v_n \leq c$, $0 \leq v_d \leq \infty$). Другими словами, v_d — «субъективная» скорость мюона, оцениваемая наблюдателем Π по калибровочным меткам на линейке (километровые столбы пролетают мимо мюона со скоростью v_d , и он преодолевает расстояние в 10,4 км за $2,2 \cdot 10^{-6}$ с). В этом случае $v_d = (10,4 \cdot 10^3) / (2,2 \cdot 10^{-6}) = 4,7 \cdot 10^9$ м/с, $v_d > c$. Скорость мюона, измеренная покоящимся относительно линейки наблюдателем, немного меньше скорости света: $v_n = 0,998c$. В опыте с вагоном и молниями данная процедура измерений заключается в том, что для наблюдателя на вагоне правая (передняя) молния ударит первой, а потом с задержкой

$$\Delta t_n = (l_n / v_n) \left(1 - \sqrt{1 - v_n^2/c^2} \right) \text{ ударит левая (задняя) молния.}$$

Для наблюдателя на Земле сначала ударит левая молния, а потом правая. При этом в системе отсчета, связанной с Землей, расстояние между отметками на рельсах будет равно собственной длине вагона l_n .

Рассмотрим другой мысленный эксперимент, в котором фотон пересекает Вселенную. В традиционном подходе с точки зрения наблюдателя, прикрепленного к фотону, продольные размеры Вселенной равны нулю (т. е. Вселенная является двумерной), и фотон, двигаясь с конечной скоростью $v_n = c$, преодолевает нулевое расстояние за время равно нулю. В приведенном подходе фотон также пересекает Вселенную за нулевое время, но не потому, что продольные размеры Вселенной равны нулю, а потому, что в системе отсчета фотона его скорость v_d относительно Вселенной бесконечно велика.

Преобразования координат. Чтобы получить преобразования координат, рассмотрим вагон (рис. 3), движущийся вдоль калиброванной линейки (стержня) (индекс «д» отмечает измерения в системе вагона, а индекс «н» — в системе Земли). При этом скорость вагона, измеренная наблюдателем Π на Земле, равна v_n , а измеренная (по описанной выше процедуре) наблюдателем D в вагоне равна v_d . Расстояние, которое вагон преодолевает за время t_n по часам наблюдателя Π и t_d по часам наблюдателя D будет одно и то же, тогда для координат правой части вагона получим следующие выражения:

$$x_n = x_d + v_d t_d; \quad (11)$$

$$x_d = x_n + v_n t_n. \quad (12)$$

Также $y_d = y_n$, $z_d = z_n$, т. е. преобразования координат в этом подходе совпадают с преобразованиями в классической механике. Изучающим основы специальной теории относительности это будет легче понять и принять.

Преобразования времени. Поскольку разница координат для двух событий в покоящейся и движущейся системах

отсчета одинакова, преобразования времени не зависят от координат и выражаются формулами (8), (9).

Преобразования скоростей. Рассмотрим частицу, движущуюся со скоростью v^n в покоящейся и со скоростью v^d в движущейся относительно линейки (стержня) системе координат ($v^n \neq v_n$, $v^d \neq v_d$):

$$v_x^n = dx_n/dt_n, \quad v_y^n = dy_n/dt_n, \quad v_z^n = dz_n/dt_n;$$

$$v_x^d = dx_d/dt_d, \quad v_y^d = dy_d/dt_d, \quad v_z^d = dz_d/dt_d.$$

Из (11) следует

$$dx_n = dx_d + v_d dt_d. \quad (13)$$

Дифференцируя (9), получаем

$$dt_n = dt_d \sqrt{1 + v_d^2/c^2}. \quad (14)$$

Разделив (13) на (14), найдем

$$\frac{dx_n}{dt_n} = \left(\frac{dx_d}{dt_d} + v_d \right) / \sqrt{1 + \frac{v_d^2}{c^2}};$$

$$v_x^n = (v_x^d + v_d) / \sqrt{1 + v_d^2/c^2}. \quad (15)$$

Аналогичным образом из (12) и (8) вычислим

$$v_x^d = (v_x^n - v_n) / \sqrt{1 - v_n^2/c^2}. \quad (16)$$

При скоростях намного меньше скорости света формулы (15), (16) описывают классический закон сложения скоростей.

Теперь найдем преобразования y - и z -компонентов скорости частицы. Учитывая, что $dy_n = dy_d$, $dy_n/dt_n = dy_d/dt_n$ и формулу (14), получаем

$$\frac{dy_n}{dt_n} = \frac{dy_d}{dt_n} / \sqrt{1 + \frac{v_d^2}{c^2}} = v_y^d / \sqrt{1 + \frac{v_d^2}{c^2}};$$

$$v_y^n = v_y^d / \sqrt{1 + v_d^2/c^2}.$$

Аналогично

$$v_z^n = v_z^d / \sqrt{1 + v_d^2/c^2}; \quad v_y^d = v_y^n / \sqrt{1 - v_n^2/c^2};$$

$$v_z^d = v_z^n / \sqrt{1 - v_n^2/c^2}.$$

Релятивистское выражение для энергии. В покоящейся системе отсчета энергия движущейся частицы массы m

$$E_n = mc^2 / \sqrt{1 - v_n^2/c^2}. \quad (17)$$

Найдем выражение для энергии частицы в движущейся системе отсчета, т. е. оцениваемое наблюдателем, прикрепленным к частице, по отношению к покоящейся системе (относительно самого наблюдателя эта энергия равна mc^2). Поскольку масса инвариантна относительно приведенных преобразований, перейдем от v_n к v_d в (17) и в соответствии с (10) получим

$$E_d = mc^2 \sqrt{1 + v_d^2/c^2}.$$

Известно, что если $v_n \ll c$, то в первом приближении кинетическая энергия частицы $E_n^k = E_n - mc^2 \approx mv_n^2/2$.

Найдем первое приближение для кинетической энергии $E_d^k = E_d - mc^2$ в движущейся системе. Поскольку функция $E_d^k(v_d)$ имеет непрерывные производные в окрестности точки $v_d = 0$, то ее можно разложить в степенной ряд Маклорена. Первые два члена ряда обращаются в нуль, а третий — дает приближение

$$E_d^k(v_d) \approx \frac{mc^3}{(c^2 + 0)^{3/2}} \frac{1}{2} (v_d - 0)^2 = \frac{mv_d^2}{2}.$$

Полученное выражение совпадает с классическим выражением кинетической энергии частицы. При $v_d \gg c$ энергия частицы линейно зависит от скорости: $E_d(v_d) \approx mcv_d$.

Релятивистское выражение импульса. В покоящейся системе отсчета

$$P_n = mv_n / \sqrt{1 - v_n^2/c^2}. \quad (18)$$

Найдем выражение для импульса частицы в движущейся системе отсчета, т. е. оцениваемое наблюдателем, прикрепленным к частице, по отношению к покоящейся системе (относительно этого наблюдателя импульс частицы равен нулю). Для этого заменим v_n на v_d в (18) и в соответствии с (10) получим $P = mv_d$: релятивистское выражение для импульса в движущейся системе совпадает с классическим. Преобразования координат также совпадают с классическими, а инвариантами являются скорость света в вакууме c , масса частицы m и длина стержня l .

Заключение. Определена процедура измерения длины стержня и соответствующие преобразования времени и координат, при которых длина стержня является инвариантом специальной теории относительности. При этом скорость движущейся системы, измеренная покоящимся относительно стержня наблюдателем, не может превысить скорость

Сравнение классических и предлагаемых преобразований

Характеристика	Классический подход		Предлагаемое описание	
	в покоей системе	в движущейся системе	в покоей системе	в движущейся системе
Скорость	v	v	$v_D / \sqrt{1 + v_D^2/c^2}$	$v_N / \sqrt{1 + v_N^2/c^2}$
Временной интервал	$t_D / \sqrt{1 - v^2/c^2}$	$t_N \sqrt{1 - v^2/c^2}$	$t_D \sqrt{1 + v_D^2/c^2}$	$t_N \sqrt{1 - v_N^2/c^2}$
Длина линейки	l_N	$l_N \sqrt{1 - v^2/c^2}$	l	l
Преобразования координат	$\frac{x^D + vt^D}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$	$\frac{x^N - vt^N}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$	$x_D + v_D t_D$	$x_N - v_N t_N$
Преобразования времени	$t_N = \frac{t_D + x_D v / c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$	$t_D = \frac{t_N - x_N v / c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$	$t_N = t_D \sqrt{1 + v_D^2/c^2}$	$t_D = t_N \sqrt{1 - v_N^2/c^2}$

света в вакууме. В то же время скорость движения относительно линейки (стержня), измеренная движущимся наблюдателем, может быть любой от нуля до бесконечности, как и в классической механике. Преобразования времени не зависят от координат. Выражение для импульса релятивистской частицы, с точки зрения прикрепленного к частице наблюдателя, совпадает с классическим. Выражение для кинетической энергии частицы для этого наблюдателя при очень малых скоростях совпадает с классическим. При очень больших скоростях энергия, как и импульс, оказывается прямо пропорциональной скорости частицы. Сравнение классического и предлагаемого соотношений приведено в таблице.

Рассмотренный подход основан на двух постулатах специальной теории относительности и отличается от классического только процедурой измерения длины стержня. При этом преобразования координат совпадают с классическими преобразованиями. Такой подход может облегчить понимание релятивистских эффектов для студентов, изучающих основы теории относительности, особенно в свете последних открытий в области космологии. Расширение Вселенной связывается с расширением пространства, и относительная скорость удаленных объектов, находящихся за горизонтом событий, превышает скорость света. Вместе с тем скорость объекта относительно самого пространства, т. е. относительно инерциальной системы отсчета, прикрепленной к находящемуся рядом предмету, не может превысить скорость света в вакууме. Таким образом, специальная теория

относительности описывает поведение объектов движущихся в пределах относительно небольшой (локальной) области Вселенной и не учитывает расширение самого пространства. Студенту нетрудно представить ситуацию, когда он сядет в ракету, и его скорость относительно пролетающих мимо звезд будет сколь угодно большой. Это практический опыт реального космонавта, который описан в данном подходе.

Литература

1. **Einstein A.** On the Electrodynamics of Moving Bodies // *Annalen der Physik.* 1905. V. 322 (10). P. 891—921.
2. **Cutner M. L.** *Astronomy: A Physical Perspective.* Cambridge: Cambridge University Press, 2003.
3. **Lerner L. S.** *Physics for Scientists and Engineers.* Burlington: Jones and Bartlett Publishers, 1996. P. 1051—1052.
4. **Ellis G. F. R., Williams R. M.** *Flat and Curved Space-times.* 2nd Ed. N.Y.: Oxford University Press, 2000. P. 28—29.
5. **Cassidy D. C., Holton G. J., Rutherford F. J.** *Understanding Physics.* N.Y.: Springer-Verlag, 2002.
6. **Born M.** *Einstein's Theory of Relativity.* N.Y.: Dover Publications, 1964.

Дата принятия 19.06.2013 г.