наибольшую скорость подъема демонстрирует наиболее высокая часть Северного Кавказа — Приэльбрусье (пункты «Терскол» и «Нейтрино»). Скорость подъема этого региона 5—5,5 мм/год. Наконец, северная часть Северного Кавказа (пункт «Зеленчукская») имеет умеренный устойчивый подъем 2—2,2 мм/год.

Гравиметрический метод дает достаточно надежную оценку вертикальных движений. При этом дорогостоящие абсолютные гравиметрические определения могут быть заменены на измерения приращения *g* между определяемым и опорным (на котором известно абсолютное значение *g*) пунктами высокоточным относительным гравиметром. Затраты на проведение таких измерений будут существенно ниже. Для проверки этого метода на двухлетнем интервале наблюдений была выполнена связь между рядом пунктов Северо-Кавказской сети относительным гравиметром Scintrex CG5. Измеренные значения приращений между пунктами имеют среднеквадратические погрешности, сравнимые с погрешностями абсолютных измерений. Таким образом, с использованием высокоточных относительных гравиметров сеть пунктов для контроля вертикальных движений можно значительно расширить. Это особенно актуально для труднодоступных районов.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 12-05-00475).

Литература

1. **Wilmes H. e. a.** First absolute gravity campaign in the Caucasus Region and its relation to the detection of height variations // IGc/ICG Joint Meeting: Abstar. Graz (Ausstria), 1994.

2. **Milyukov V. K. e. a.** Monitoring crustal deformations in the Northern Caucasus using a high precision long base laser strainmeter and the GPS/GLONASS network // J. Geodyn. 2010. V. 49. P. 216—223.

3. **Огородова Л. В., Юзефович А. П.** Гравиметрия. М.: Недра, 1993.

4. **Юшкин В. Д. и др.** Измерения новым полевым баллистическим гравиметром ГАБЛ-М в условиях тундры // Измерительная техника. 2011. № 10. С. 3—9; **Yushkin V. D. e. a.** Measurements with the new GABL-M field ballistic gravimeter under tundra conditions // Measurement Techniques. 2011. V. 54. N 10. P. 1111—1116.

5. **Юшкин В. Д.** Влияние поверхностного слоя Земли на ускорение свободного падения // Измерительная техника. 2012. № 5. С. 8—11; **Yushkin V. D.** Effect of the earth’s surface layer on the acceleration of gravity // Measurement Techniques. 2012. V. 55. N 5. P. 497—501.

Дата принятия 11.07.2013 г.

ОБЩИЕ ВОПРОСЫ МЕТРОЛОГИИ И ИЗМЕРИТЕЛЬНОЙ ТЕХНИКИ

62-91:004.023:629.7.017

Оценка метрологической надежности средств измерений в условиях неполных данных

А. А. КОРОВАЙЦЕВ, М. И. ЛОМАКИН, А. В. ДОКУКИН

СТАНДАРТИНФОРМ, Москва, Россия, e-mail: lmi@gostinfo.ru

Рассмотрена задача оценки метрологической надежности средств измерений в условиях неполных данных, представленных малыми выборками значений метрологического ресурса. Предложен подход к такой оценке, базирующийся на методе моментов. Приведены аналитические выражения и примеры оценки метрологической надежности.

Ключевые слова: *метрологическая надежность, функция распределения, метод моментов.*

The problem of estimating the metrological reliability of measuring instruments at incomplete data presented by small samples of metrological resource values is considered. An approach to metrological reliability assessment based on the method of moments is suggested. The analytical expression and example of metrological reliability estimation are presented.

Key words: *metrological reliability, distribution function, method of moments.*

Метрологическая надежность является одной из важнейших характеристик качества средств измерений (СИ). Под метрологической надежностью понимают свойство СИ сохранять метрологические характеристики (МХ) в пределах установленных норм во время эксплуатации в заданных режимах и при определенных условиях использования, техническом обслуживании, хранении и транспортировке. Следовательно, метрологическая надежность определяется характером и темпом изменения нормируемых согласно стандарту [1] МХ исследуемого СИ.

В существующей практике оценки метрологической надежности классическая теория надежности с пуассоновским потоком отказов и постоянной во времени интенсивностью оказывается неправомерной. Метрологическая надежность закладывается при разработке СИ, обеспечивается в процессе изготовления и поддерживается при эксплуатации посредством установления оптимальных значений межповерочных или межкалибровочных интервалов.

В качестве основного показателя метрологической надежности используют вероятность исправного (безотказного) состояния СИ, которая определяется как

$$P_{и}(t) = P(S \in S_{д}), \quad (1)$$

где S — совокупность (вектор) значений МХ в момент времени t; $S_{д}$ — множество допустимых значений МХ (в общем случае, также в момент времени t).

Обычно (1) записывают в виде

$$P_{и}(t) = P\left(S \in S_{д}\right) = P\left[\bigcap_{i=1}^{n}\left(S_i \in S_{iд}\right)\right] = \prod_{i-1}^{n} P\left(S_i \in S_{iд}\right). \quad (2)$$

Здесь S_i, $S_{iд}$ — значение i-й МХ в момент времени t и множество ее допустимых значений, соответственно; предполагается, что случайные события $S_i \in S_{i\,д}$ и $S_j \in S_{j\,д}$ при $i \neq j$ являются независимыми.

Таким образом, задача оценки метрологической надежности СИ сводится к оценке вероятности того, что i-я МХ принадлежит множеству допустимых значений, т. е. к определению вероятности

$$P_{iи}(t) = P(S_i \in S_{iд}).$$

Решению последней задачи посвящено значительное количество работ [2—8], в большинстве которых предполагается, что известны или могут быть определены законы распределения МХ по имеющейся достаточно представительной статистике. Например, в [6] исследована общая закономерность дрейфа МХ, обусловленного старением или износом СИ, в виде дифференциального уравнения относительно вероятности нахождения нестабильности МХ в произвольных границах при условии подчинения нестабильности нормальному закону. В [7] проанализирована математическая модель, которая представляет функциональную зависимость исследуемой МХ от параметров комплектующих элементов и входного сигнала. С течением времени происходят постепенные изменения параметров элементов СИ. Эти изменения, возникающие вследствие старения и износа, носят необратимый характер и определяют постепенное изменение МХ СИ, приводящее к метрологическому отказу. Автором работы [7] показано, что состояние исследуемой МХ в различных временных сечениях области эксплуатации можно находить по ее математической модели с учетом данных об изменении параметров входящих в СИ элементов с применением статистического моделирования. При этом используется известное допущение о нормальном законе распределения параметров элементов.

В реальной ситуации, зачастую, гипотезу о нормальном распределении изменения параметров МХ достаточно сложно проверить, а в случаях, когда результаты представлены несколькими (в пределах 3—15) наблюдениями об изменении параметров определить закон (функцию) распределения не представляется возможным, так как стандартные методы восстановления функции не работают или дают непредсказуемый результат. В последние годы в Госреестр утвержденных Росстандартом типов СИ внесено большое количество СИ единичного производства и импортируемых из-за рубежа единичными экземплярами. Именно для регламентации межповерочных интервалов таких СИ необходимы иные подходы, учитывающие реальную недостаточность информации об изменении параметров МХ. Одним из таких подходов является метод моментов [9].

Пусть в момент времени ξ (величину ξ обычно называют метрологическим ресурсом СИ) происходит случайное событие, состоящее в метрологическом отказе, т. е. МХ выходит за пределы множества $S_{д}$, тогда записываем

$$P_{и}(t) = P(S_i \in S_{д}) = P(\xi \geq t) = 1 - P(\xi < t) = 1 - F(t),$$

где $F(t)$ — функция распределения времени исправного функционирования или метрологического ресурса СИ.

По результатам наблюдений во время эксплуатации СИ получена выборка значений времени возникновения метрологического отказа:

$$\xi V = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n), \quad (3)$$

где ξ_i — случайная величина, распределенная в соответствии с некоторым неизвестным законом распределения $F(t)$; n — количество наблюдений (n < 15).

На основе полученной выборки значений ξV необходимо оценить метрологическую надежность, т. е. $P_{и}(t)$, без каких-либо предположений о функции распределения $F(t)$. Найдем k выборочных моментов распределения $F(t)$ по следующим соотношениям:

$$m_i = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \xi_j^{\,i}, \; i = 1, 2, ..., k. \quad (4)$$

Определим множество функций распределения с моментами m_1, m_2, ..., m_k, равными найденным по выборке ξV:

$$F_0 = \left\{F(t) : \int_0^{\infty} t^i \, dF(t) = m_i;\; i = 1, 2, \ldots, k\right\}.$$

Рассмотрим следующую задачу: найдем на множестве F_0 нижнюю и верхнюю оценки (границы) функции распределения $F(t)$ для заданного t, т. е. такие $F_x(t)$ и $F^x(t)$, что

$$F_x(t) = \min_{F(t) \in F_0} F(t); \; F^x(t) = \max_{F(t) \in F_0} F(t).$$

В теории вероятностей известна оценка для произвольного распределения $F(t)$ с известным математическим ожиданием m ($m = m_1$) и дисперсией σ^2 [5]:

$$P(|\eta - m| \geq \varepsilon) \leq \sigma^2 / \varepsilon^2,$$

где η — случайная величина, распределенная в соответствии с $F(t)$; ε — произвольная положительная величина.

Оценка (4) является универсальной, но весьма приближенной.

Улучшениям и уточнениям оценки (1) посвящено много работ, первой из которых была работа [10], где решена задача нахождения экстремальных или гарантированных (нижних $P_н$ и верхних $P_в$) оценок вероятности $P(\eta \geq \varepsilon)$ при известных m и σ^2:

$$P_н(\eta \geq \varepsilon) = (m-\varepsilon)^2 / [(m-\varepsilon)^2 + \sigma^2]; \ \varepsilon \leq m;$$

$$P_в(\eta \geq \varepsilon) = \min\{1,\, m/\varepsilon,\, \sigma^2/[(m-\varepsilon)^2 + \sigma^2]\}. \qquad (5)$$

Однако полученные результаты не могут быть обобщены на произвольное число моментов распределения. Их обобщение приведено в [9] и представлено следующим утверждением.

Утверждение. Наибольшее (наименьшее) значение интеграла

$$J(F) = \int_0^{\tau+0} c(t)\,dF(t)$$

при непрерывной подынтегральной функции $c(t)$, имеющей k+1 неотрицательную производную, и $F(t) \in F_0$ достигается на единственном ступенчатом распределении $F(t)$, у которого среди точек роста $t_1, t_2, ..., t_v$ имеется точка τ; при нечетном k число точек роста v определяется соотношением $v = (k+3)/2$, причем $t_0 = 0 < t_1 < t_2 < ... < t_v < \infty$; при четном k — $v = k/2 + 1$, причем $0 < t_1 < t_2 < ... < t_v < \infty$; числа $p_j > 0$, t_j, $j = 1, 2, ..., v$ удовлетворяют системе уравнений:

$$m_i = \sum_{j=1}^{v} t_j^i p_j; \ i = 0, 1, ..., k; \ m_0 = 1.$$

Приведенное утверждение (теорема) позволяет непосредственно находить верхние (нижние) (или гарантированные) оценки вероятности того, что случайная величина (метрологический ресурс) превысит некоторый заданный уровень $t = \varepsilon$, т. е. вероятность $P(\xi \geq \varepsilon)$. Рассмотрим случай, когда известны первые два момента распределения случайной величины m_1, m_2 ($m_0 = 1$). Запишем уравнения для моментов при условии, что гарантированная оценка вероятности $P(\xi \geq \varepsilon)$ или $F(t) = 1 - P(\xi \geq \varepsilon)$ достигается на ступенчатом распределении $F(t)$, имеющем $v = 2$:

$$\left.\begin{aligned} &p_1 + p_2 = 1; \\ &p_1 t_1 + p_2 t_2 = m_1; \\ &p_1 t_1^2 + p_2 t_2^2 = m_2. \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

Получим систему (6) из трех уравнений с четырьмя неизвестными. Отсюда следует:

$$F^x(\varepsilon) = \begin{cases} 0 & \text{при } 0 \leq \varepsilon \leq t_1; \\ p_1 & \text{при } 0 \leq \varepsilon \leq t_2; \\ 1 & \text{при } \varepsilon \geq t_2. \end{cases} \qquad (7)$$

Соотношение (7) позволяет освободиться от одного неизвестного в системе (6) и тем самым найти гарантированную оценку $F^x(\varepsilon)$.

Так как $F(\varepsilon) = F(\varepsilon - 0)$, т. е. функция распределения является непрерывной слева функцией, то наибольшее значение интеграла

$$J(F) = F(\tau) = \int_0^{\tau+0} dF(t)$$

при $F(t) \in F_0$ достигается на ступенчатом распределении $F(t)$, для которого среди точек роста t_1, t_2 имеется точка ε. Из (5) следует, что наибольший интерес представляет случай $F^x(\varepsilon) = P_1$. Тогда полагаем $t_1 = \varepsilon$ и решаем систему из трех уравнений с тремя неизвестными:

$$\left.\begin{aligned} &p_1 + p_2 = 1; \\ &p_1 \varepsilon + p_2 t_2 = m_1; \\ &p_1 \varepsilon^2 + p_2 t_2^2 = m_2. \end{aligned}\right\}$$

После несложных преобразований находим

$$F^x(\varepsilon) = \begin{cases} 0 & \text{при } \varepsilon = 0; \\ \dfrac{m_2 - m_1^2}{m_2 - 2m_1\varepsilon + \varepsilon^2} & \text{при } 0 \leq \varepsilon \leq m_1; \\ 1 & \text{при } \varepsilon \geq m_1; \end{cases}$$

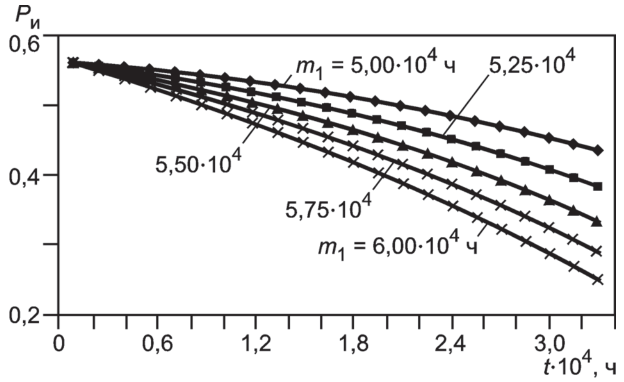

Рис. 1. Динамика изменения метрологической надежности $P_и$ при различных значениях m_1 и фиксированных m_2, m_3

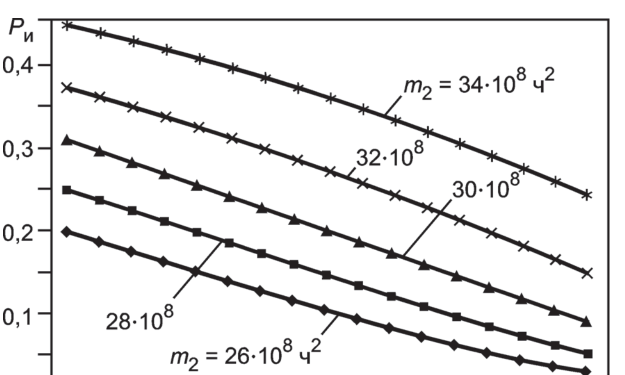

Рис. 2. Динамика изменения метрологической надежности $P_и$ при различных значениях m_2 и фиксированных m_1, m_3

$$P(\varepsilon)=\begin{cases}1 & \text{при } \varepsilon=0;\\ \dfrac{(m_1-\varepsilon)^2}{m_2-2m_1\varepsilon+\varepsilon^2} & \text{при } 0\le\varepsilon\le m_1;\\ 0 & \text{при } \varepsilon\ge m_1.\end{cases} \qquad (7)$$

Выражение (7) впервые получено при помощи специального метода [10], не допускающего дальнейших обобщений, но уже при трех моментах не работающего.

Пусть k = 3, т. е. известны три момента m_1, m_2, m_3. Рассуждая аналогично, как и в случае двух моментов, можно получить следующий результат:

$$P(\varepsilon)=\begin{cases}1 & \text{при } \varepsilon=0;\\ 1-p_1-p_2 & \text{при } 0\le\varepsilon\le\min\left(m_2/m_1,\ m_3/m_2,\ \sqrt{m_3/m_1}\right);\\ 0 & \text{при } \varepsilon\ge\min\left(m_2/m_1,\ m_3/m_2,\ \sqrt{m_3/m_1}\right).\end{cases}$$

Наибольший интерес представляет случай $P(\varepsilon) = 1 - p_1 - p_2$. Пропустив промежуточные решения, получим окончательное соотношение для гарантированной оценки:

$$P(\varepsilon)=\frac{3m_2m_1^2\varepsilon^2-3m_1m_2^2\varepsilon-m_1^3\varepsilon^3+m_2^3}{2m_2^2\varepsilon^2+m_3^2+m_1m_3\varepsilon^2-3m_2m_3\varepsilon-m_1m_2\varepsilon^3}.$$

Для произвольного числа фиксированных моментов распределения (k > 3) гарантированные оценки находят аналогичным образом, но на практике для определения этих оценок должны быть использованы численные методы, которые, в конечном счете, сводятся к решению систем нелинейных уравнений [9].

Рассмотрим пример оценки метрологической надежности с применением предложенного инструментария гарантированной оценки вероятности исправного состояния СИ, базирующегося на методе моментов. Пусть по результатам наблюдений во время эксплуатации за измерительными каналами информационно-измерительных систем, в частности аналого-импульсного преобразователя (АИП) [7], получена выборка (3) (для примера использованы модельные данные, отличные от данных, представленных в работе [7]). На основе выборки (3) найдены три выборочных момента распределения $F(t)$ по соотношениям (4). На рис. 1 приведена динамика изменения метрологической надежности (вероятности исправного состояния $P_и$) от времени при различных значениях первого момента m_1 = (5,0; 5,25; 5,5; 5,75; 6,0) · 10^4 ч при фиксированных втором m_2 = 36,02 · 10^8 ч^2 и третьем m_3 = 296,84 · 10^{16} ч^3 моментах. На рис. 2 показана зависимость $P_и$ от времени при различных значениях второго момента m_2 = (26; 28; 30; 32; 34) · 10^8 ч^2 при фиксированных первом m_1 = 5 · 10^4 ч и третьем m_3 = 296,84 · 10^{16} ч^3.

Таким образом, предложен подход к оценке метрологической надежности СИ в условиях неполных данных, представленных выборками наблюдений значений времени возникновения метрологического отказа. Объем выборки является малым и составляет несколько значений (3—15). Оценка метрологической надежности определяется как гарантированная оценка вероятности того, что метрологический ресурс СИ превысит некоторый заданный уровень на множестве произвольных распределений с моментами, равными выборочным моментам. В предложенной модели оценки метрологической надежности остался не исследованным вопрос о целесообразном (рациональном) количестве моментов для определения $P_и$, чтобы при этом была использована вся информация, представленная в выборке. Данный вопрос является предметом дальнейших исследований.

Литература

1. **ГОСТ 8.009—84.** ГСИ. Нормируемые метрологические характеристики средств измерений.

2. **Екимов А. В.** О метрологической надежности средств электроизмерительной техники // Измерительная техника. 1984. № 1. С. 10—11; **Ekimov A. V.** Metrological reliability in electrical measurement facilities // Measurement Techniques. 1984. V. 27. N 1. P. 4—6.

3. **Кудрицкий В. Д.** Прогнозирование надежности измерительных приборов // Измерительная техника. 1968. № 6. С. 18—21; **Kudritskii V. D.** Forecasting the reliability of measuring instruments // Measurement Techniques. 1968. V. 11. N 6. P. 728—733.

4. **Мищенко С. В., Цветков Э. И., Чернышова Т. И.** Метрологическая надежность измерительных средств. М.: Машиностроение, 2001.

5. **Фридман А. Э.** Оценка метрологической надежности измерительных приборов и многозначных мер // Измерительная техника. 1993. № 5. С. 7—10; **Fridman A. E.** Evaluation of metrological reliability of measuring instruments and multiple-valued measures // Measurement Techniques. 1993. V. 36. N 5. P. 491—496.

6. **Фридман А. Э.** Теория метрологической надежности средств измерений и других технических средств, имеющих точностные характеристики: Автореф. дис. на соиск. учен. степ. докт. техн. наук. — СПб., 1994.

7. **Чернышова Т. И.** Метрологическая надежность средств неразрушающего контроля теплофизических свойств материалов и изделий: Автореф. дис. на соиск. учен. степ. докт. техн. наук. Тамбов, 2002.

8. **Чернышова Т. И., Отхман Н. З.** Повышение метрологической надежности информационно-измерительных систем // Вопросы современной науки и практики. Университет им. В. И. Вернадского. 2011. Спецвыпуск (36). С. 86—90.

9. **Ломакин М. И.** Гарантированные оценки вероятности безотказной работы в классе распределений с фиксированными моментами // Известия АН СССР. Автоматика и телемеханика. 1991. № 1. С. 154—161.

10. **Гермейер Ю. Б., Иргер Д. С., Калабухова Е. П.** О гарантированных оценках надежности системы при неполных сведениях о надежности элементов // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1966. Т. 6. № 4. С. 733—747.

Дата принятия 12.08.2013 г.