

Научная статья

УДК 621.9.08

<https://doi.org/10.32446/0368-1025it.2022-9-24-32>

Построение двухпараметрических процедур измерительного контроля партий деталей с распределением размера по закону Рэлея

Сергей Николаевич Григорьев¹, Петр Николаевич Емельянов^{2✉}, Дмитрий Александрович Мастеренко³, Сергей Евгеньевич Педь⁴

^{1, 2, 3, 4} Московский государственный технологический университет «СТАНКИН», Москва, Россия

¹s.grigoriev@stankin.ru, <https://orcid.org/0000-0002-8239-5354>

²pemelyan@rambler.ru✉, <https://orcid.org/0000-0003-1752-0961>

³d.masterenko@stankin.ru, <https://orcid.org/0000-0003-1041-4218>

⁴seped@mail.ru

Аннотация. Рассмотрены различные способы мониторинга технологических процессов на современном машиностроительном производстве, в том числе статистические методы менеджмента качества продукции. Поставлена и решена задача построения процедур измерительного контроля по двум параметрам в тех случаях, когда отклонение показателя качества от номинального значения описывается обобщением распределения Рэлея с двумя параметрами. Исследованы распределения контрольных статистик. Описаны численные процедуры, позволяющие вычислять функции распределения статистик с достаточной для практических целей точностью. Сравнены оперативные характеристики плана контроля с применением статистик, оценивающих два параметра распределения, и плана для однопараметрической модели распределения. Показано, что близкие значения рисков потребителя и производителя в сопоставимых ситуациях при двухпараметрическом контроле обеспечиваются при небольшом увеличении объема выборки по сравнению с однопараметрическим случаем. Полученные результаты будут полезны при организации процедур приёмочного контроля партий деталей с наружными и внутренними цилиндрическими поверхностями.

Ключевые слова: измерительный контроль, выборочный контроль, план контроля, статистические методы менеджмента качества, распределение Рэлея, статистическое управление процессами

Финансирование. Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (проект № FSFS-2021-0003).

Для цитирования: Григорьев С. Н., Емельянов П. Н., Мастеренко Д. А., Педь С. Е. Построение двухпараметрических процедур измерительного контроля партий деталей с распределением размера по закону Рэлея // Измерительная техника. 2022. № 9. С. 24–32. <https://doi.org/10.32446/0368-1025it.2022-9-24-32>

Two-parameters sampling on the base of measurements of Rayleigh distributed parts dimensions

Sergey N. Grigoriev¹, Petr N. Emelianov^{2✉}, Dmitry A. Masterenko³, Sergey E. Ped'4

^{1, 2, 3, 4} Moscow State University of Technology "STANKIN", Moscow, Russia

¹s.grigoriev@stankin.ru, <https://orcid.org/0000-0002-8239-5354>

²pemelyan@rambler.ru✉, <https://orcid.org/0000-0003-1752-0961>

³d.masterenko@stankin.ru, <https://orcid.org/0000-0003-1041-4218>

⁴seped@mail.ru

Abstract. In the article, the methods of technological processes monitoring in the modern machine-building manufacturing are observed. The task of constructing the procedures of measurement (variable) inspection for the lots with two-parameter generalization of Rayleigh distribution of quality characteristic is set and solved. The test statistics distributions have been explored. The sufficiently accurate computational procedures for the distribution functions evaluation are described. The operating characteristics of two-parameter sampling plan and the previously constructed one-parameter plan are compared. It is shown that the same features are provided under comparable conditions with only a slight increase of the sample size. The results are applicable in acceptance sampling of lots of parts with external and internal cylindrical surfaces.

Keywords: measurement inspection, sampling, sampling plan, statistical methods of quality management, Rayleigh distribution, statistical process control

Financial support. This work was supported financially by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (project no. FSFS-2021-0003).

Введение. Для обеспечения высокой точности изготовления изделий на современном производстве необходимо контролировать ход технологического процесса и при необходимости оперативно вырабатывать управляющие воздействия с использованием средств измерений [1–8]. Одним из распространённых инструментов мониторинга процессов являются контрольные карты [9–11]. Контрольная карта представляет собой графическое средство проверки гипотезы о том, что технологический процесс остаётся в так называемом статистически управляемом состоянии. В этом состоянии изменчивость процесса, выражающаяся в отклонениях показателя качества изделий, сводится к случайным причинам, на которые не просто невозможно воздействовать, но и попытки такого воздействия будут контрпродуктивными [12]. Контрольная карта позволяет обнаруживать особые причины изменчивости, которые требуется устранять целенаправленным воздействием на процесс.

Как и многие другие статистические методы менеджмента качества, контрольные карты могут строиться по альтернативному или по количественному признаку [9, 11]. Альтернативный признак – это информация о том, является ли изделие соответствующим или несоответствующим (значение показателя качества этого изделия входит или нет в поле допуска). Количественный признак – это измеренное значение показателя качества. Отдельную группу составляют относительно новые статистические методы, основанные на альтернативном признаке, но по полю допуска, суженному по сравнению с заданными требованиями [13–18]. Выборка изделий при этом разбивается на три группы в зависимости от значения показателя качества: меньше нижней границы, между границами и больше верхней границы суженного поля допуска. Смысл сужения поля допуска при контроле состоит в том, что при нормальном ходе процесса практически все изделия попадают в среднюю группу, тогда как при суженных границах в крайние группы также попадает некоторое количество изделий. Это позволяет найти численные оценки параметров процесса, а именно, центра и ширины разброса значений показателя качества, по которым можно оценивать показатели воспроизводимости и вырабатывать управляющие воздействия [19, 20].

Цель работы – построить процедуру измерительного контроля партий изделий по двум параметрам в тех случаях, когда отклонение показателя качества от номинального значения описывается обобщением распределения Рэлея с двумя параметрами.

Распределение Рэлея. В настоящей статье, являющейся продолжением работы [21], рассматривается выборочный контроль по количественному признаку, то есть по результатам измерения размеров деталей из выборки. В [21] описана ситуация, когда распределение отклонений диаметров цилиндрических элементов изделий подчиняется закону Рэлея, что подтверждено проверкой

по критерию Андерсона-Дарлинга, и показано, что закон Рэлея порождается нормальным распределением отклонения от соосности в двух перпендикулярных плоскостях.

Распределение Рэлея содержит только параметр масштаба. Распределение диаметров деталей содержит ещё один параметр – параметр положения, имеющий смысл наибольшего возможного диаметра детали. Работ, посвящённых статистическому анализу такого распределения, немного. Его параметры могут быть оценены методом максимального правдоподобия [22]. В работе [23] описаны оценки параметров более общего трёхпараметрического гамма-распределения, частным случаем которого является рассматриваемое в настоящей статье распределение, однако только с позиций асимптотического поведения. В статье [24] построены контрольные карты Шухарта для распределения Рэлея при цензурированных наблюдениях, но именно для однопараметрического распределения.

В ГОСТ Р ИСО 7870-2-2015¹ описаны контрольные карты Шухарта как для альтернативных, так и для количественных данных, однако для карт по количественному признаку показатель качества считается нормально распределённым. Данный стандарт неприменим к рассматриваемому распределению, поэтому требуется разработать метод построения контрольных карт.

Статистики, несмещённо оценивающие параметры распределения диаметров, найдены в [21], однако для построения планов контроля с определёнными свойствами, а в дальнейшем и для построения контрольных карт требуется знать распределения этих статистик.

Постановка задачи. Пусть размеры X деталей в партии распределены с плотностью

$$f_X(x; a, \sigma) = \begin{cases} \frac{a-x}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{(a-x)^2}{2\sigma^2}\right), & x \leq a; \\ 0, & x > a, \end{cases} \quad (1)$$

которой соответствует функция их распределения

$$F_X(x; a, \sigma) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{(a-x)^2}{2\sigma^2}\right), & x \leq a; \\ 1, & x > a. \end{cases} \quad (2)$$

Факт распределения случайной величины X по закону, описываемому выражениями (1), (2), обозначим $X \sim R(a, -\sigma)$. При этом величина $a - X$ имеет распределение Рэлея. Если по закону Рэлея распределена величина $X - a$, то используем обозначение $X \sim R(a, \sigma)$. В частности, обычное распределение Рэлея обозначается $R(0, \sigma)$.

Требуется построить процедуру контроля партий изделий с распределением размеров по закону $R(a, -\sigma)$ и неизвестными значениями параметров a, σ .

¹ ГОСТ Р ИСО 7870-2-2015. Статистические методы. Контрольные карты. Часть 2. Контрольные карты Шухарта.

Если заданы нижняя x_L и верхняя x_U границы поля допуска, то доли несоответствующих изделий, размеры которых выходят за эти границы, соответственно равны

$$\left. \begin{aligned} p_L &= F_X(x_L; a, \sigma); \\ p_U &= 1 - F_X(x_U; a, \sigma). \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Если в (3) вместо значений параметров a, σ подставить их оценки, то будут получены оценки $\hat{p}_L, \hat{p}_U$. Партия деталей принимается, если сумма оценок $\hat{p}_L, \hat{p}_U$ меньше некоторого заранее выбранного критического значения $p_{кр}$. Свойства такой процедуры контроля описывает оперативная характеристика – функция зависимости вероятности приёма партии от действительного уровня p несоответствий. Для её вычисления требуются распределения статистик, оценивающих указанные, найденные аналитически или численно параметры. Знание распределений статистик также может быть использовано для построения контрольных карт Шухарта, применяемых в статистическом управлении процессом производства изделий.

Нахождение распределений оценок параметров.

Ранее в [21] рассмотрены n -я порядковая статистика $X_{(n)} = \max\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ и статистика, дающая несмещённую оценку параметра σ^2 :

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{\gamma_n(n-1)} \sum_{i=1}^n (X_{(n)} - X_i)^2 = \frac{1}{\gamma_n(n-1)} \sum_{i=1}^{n-1} (X_{(n)} - X_{(i)})^2, \quad (4)$$

где $X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq \dots \leq X_{(n)}$ – порядковые статистики [25];

$$\gamma_n = 2 \left(1 - \sqrt{2\pi} \frac{n}{n-1} \int_0^\infty (1 - \Phi(z))(n-1)z^2 \exp\left(-\frac{(n-1)z^2}{2}\right) dz \right);$$

Φ – функция стандартного нормального распределения.

Если $\hat{\sigma}$ – какая-либо несмещённая оценка параметра σ , то несмещённая оценка параметра a определяется выражением

$$\hat{a} = X_{(n)} + \hat{\sigma} \sqrt{\pi/(2n)}.$$

В рассматриваемом случае не обязательно использовать несмещённые оценки, важнее находить вероятности выполнения неравенства $\hat{p} \leq p_{кр}$ при подстановке оценок в формулу (3).

Функция распределения n -й порядковой статистики при $x_{(n)} \leq a$ имеет вид

$$\begin{aligned} F_{X_{(n)}}(x_{(n)}) &= \mathbf{P}\{X_{(n)} \leq x_{(n)}\} = \mathbf{P}\{X_1 \leq x_{(n)}, \dots, X_n \leq x_{(n)}\} = \\ &= (F_X(x_{(n)}))^n = \exp(-n(a - x_{(n)})^2 \sigma^{-2}/2), \end{aligned}$$

где $\mathbf{P}$ – вероятностная мера; $X_{(n)} \sim R(a, -\sigma/\sqrt{n})$.

Плотность распределения этой статистики описывается выражением

$$f_{X_{(n)}}(x_{(n)}) = n(x_{(n)} - a)\sigma^{-2} \exp(-n(x_{(n)} - a)^2 \sigma^{-2}/2).$$

Найти распределение статистики (4) сложнее. Как в [21], заметим, что это распределение не зависит от параметра a , и рассмотрим сначала задачу, в которой наблюдения $X_1, X_2, \dots, X_n$ распределены по закону $R(0, \sigma)$ – обычному распределению Рэлея с параметром σ . Более того, для упрощения выкладок можно положить $\sigma=1$, а значение σ учесть в конечном результате.

Рассмотрим статистику

$$Y_n = \sum_{i=1}^n (X_i - X_{(1)})^2 = \sum_{i=2}^n (X_{(i)} - X_{(1)})^2, \quad (5)$$

где $X_1, X_2, \dots, X_n$ – независимые случайные величины, имеющие один и тот же закон распределения $R(0, 1)$ с плотностью

$$f(x) = \begin{cases} x \exp(-x^2/2), & x \geq 0; \\ 0, & x < 0 \end{cases} \quad (6)$$

и интегральной функцией

$$F(x) = \begin{cases} 1 - \exp(-x^2/2), & x \geq 0; \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Согласно определению функции распределения запишем

$$\begin{aligned} F_{Y_n}(y) &= \mathbf{P}\{Y_n \leq y\} = \mathbf{P}\left\{\sum_{i=2}^n (X_{(i)} - X_{(1)})^2 \leq y\right\} = \\ &= \int_{M_n(y)} f_{X_{(1)}, X_{(2)}, \dots, X_{(n)}}(x_{(1)}, \dots, x_{(n)}) dx_{(1)} \dots dx_{(n)}. \end{aligned} \quad (7)$$

В формуле (7) интегрирование производится по множеству, заданному условиями

$$M_n(y) = \left\{ (x_{(1)}, \dots, x_{(n)}) : x_{(n)} \geq \dots \geq x_{(1)} \geq 0, \sum_{i=2}^n (x_{(i)} - x_{(1)})^2 \leq y \right\};$$

$f_{X_{(1)}, X_{(2)}, \dots, X_{(n)}}(x_{(1)}, \dots, x_{(n)})$ – совместная плотность распределения всех порядковых статистик [25]:

$$\begin{aligned} f_{X_{(1)}, X_{(2)}, \dots, X_{(n)}}(x_{(1)}, \dots, x_{(n)}) &= \\ &= \begin{cases} n! f(x_{(1)}) \cdot f(x_{(2)}) \cdot \dots \cdot f(x_{(n)}), & \text{если } 0 \leq x_{(1)} \leq \dots \leq x_{(n)}; \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases} \end{aligned}$$

Совместную плотность распределения всех порядковых статистик можно представить в виде

$$\begin{aligned} f_{X_{(1)}, X_{(2)}, \dots, X_{(n)}}(x_{(1)}, \dots, x_{(n)}) &= \\ &= f_{X_{(1)}}(x_{(1)}) f_{X_{(2)}, \dots, X_{(n)}|X_{(1)}}(x_{(2)}, \dots, x_{(n)}|x_{(1)}), \end{aligned}$$

где $f_{X_{(2)}, \dots, X_{(n)}|X_{(1)}}(x_{(2)}, \dots, x_{(n)}|x_{(1)})$ – совместная условная плотность распределения порядковых статистик $X_{(2)}, \dots, X_{(n)}$ относительно первой порядковой статистики $X_{(1)}$.

В таком случае интеграл в (7) можно записать как

$$\begin{aligned} \int_{M'_n(y)} f_{X_{(1)}, X_{(2)}, \dots, X_{(n)}}(x_{(1)}, \dots, x_{(n)}) dx_{(1)} \dots dx_{(n)} = \\ = \int_0^\infty f_{X_{(1)}}(x_{(1)}) \times \\ \times \left[\int_{M''_n(x_{(1)}, y)} f_{X_{(2)}, \dots, X_{(n)}|X_{(1)}}(x_{(2)}, \dots, x_{(n)}|x_{(1)}) dx_{(2)} \dots dx_{(n)} \right] dx_{(1)}. \quad (8) \end{aligned}$$

Интегрирование в (8) при каждом значении $x_{(1)}$ ведётся по множеству $M'_n(x_{(1)}, y)$ – сектору $(n-1)$ -мерного шара радиуса $R = \sqrt{y}$ с центром в точке, все $(n-1)$ координат которой равны $x_{(1)}$, и с упорядочиванием координат $x_{(n)} \geq \dots \geq x_{(2)}$:

$$\begin{aligned} M'_n(x_{(1)}, y) = \\ = \left\{ (x_{(2)}, \dots, x_{(n)}) : x_{(n)} \geq \dots \geq x_{(2)} \geq x_{(1)}, \sum_{i=2}^n (x_{(i)} - x_{(1)})^2 \leq y \right\}, \end{aligned}$$

полученный результат интегрируется по $x_{(1)}$ в пределах $0 \dots \infty$.

Интеграл (8) для плотности распределения Рэлея невозможно найти аналитически. Более того, непосредственно в представленном виде практически невозможно применить численное интегрирование, поскольку вычислительная сложность быстро повышается с увеличением объёма n выборки. Это связано с тем, что в системах компьютерной математики, как правило, многомерный интеграл вычисляется путём сведения к повторному интегралу от функции, представляющей собой интеграл с размерностью, на единицу меньшей, чем размерность исходного интеграла. Этот внутренний интеграл, в свою очередь, в процессе вычисления тоже сводится к повторному, и так далее, до достижения единичной размерности. Все вычисления выполняются в большом количестве точек. С ростом n интегрирование занимает всё больше времени: уже начиная с $n=5 \dots 7$ (в зависимости от конфигурации вычислительной системы), продолжительность интегрирования (8) только при одном значении y составляет десятки минут. Покажем, как преобразовать задачу вычисления интеграла (8) и получать результаты численного интегрирования за разумное время.

Совместная условная плотность $f_{X_{(2)}, \dots, X_{(n)}|X_{(1)}}(x_{(2)}, \dots, x_{(n)}|x_{(1)}) \neq 0$ только в секторе $(n-1)$ -мерного шара, определяемом условиями $x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \dots \leq x_{(n)}$. Однако при этом важно, какое наблюдение оказалось на месте первой порядковой статистики и не важно, в каком порядке расположились все остальные наблюдения (все возможные их перестановки равновероятны). Это позволяет перейти к интегрированию функции $f_{X_2|X_{(1)}}(x_2|x_{(1)}) \dots f_{X_n|X_{(1)}}(x_n|x_{(1)})$ по сектору $(n-1)$ -мерного шара, определяемому условиями $x_{(1)} \leq x_2, \dots, x_n \leq x_n$.

Запишем условную плотность распределения величины X , распределённой по закону $R(0, 1)$, при условии $X > X_{(1)}$ и плотность распределения первой порядковой статистики соответственно [21]:

$$\begin{aligned} f_{X|X \geq x_{(1)}}(x) = \begin{cases} \frac{f(x)}{P\{X \geq x_{(1)}\}}, & x \geq x_{(1)} = \frac{x \exp(-x^2/2)}{\exp(-x_{(1)}^2/2)}, & x \geq x_{(1)} \\ 0, & x < x_{(1)} \end{cases}; \quad (9) \\ f_{X_{(1)}}(x_{(1)}) = nx_{(1)} \exp(-nx_{(1)}^2/2). \end{aligned}$$

Подставим выражения (9) в (8) и получим

$$\begin{aligned} \int_0^\infty f_{X_{(1)}}(x_{(1)}) \times \\ \times \left[\int_{M'_n(x_{(1)}, y)} f_{X_{(2)}, \dots, X_{(n)}|X_{(1)}}(x_{(2)}, \dots, x_{(n)}|x_{(1)}) dx_{(2)} \dots dx_{(n)} \right] dx_{(1)} = \\ \int_0^\infty f_{X_{(1)}}(x_{(1)}) \times \\ \times \left[\int_{M''_n(x_{(1)}, y)} f_{X_2, \dots, X_n|X_{(1)}}(x_2, \dots, x_n|x_{(1)}) dx_2 \dots dx_n \right] dx_{(1)} = \\ = \int_0^\infty nx_{(1)} e^{(-nx_{(1)}^2/2)} \left[\int_{M''_n(x_{(1)}, y)} \prod_{i=2}^n \frac{x_i e^{(-x_i^2/2)}}{e^{(-x_{(1)}^2/2)}} dx_2 \dots dx_n \right] dx_{(1)} = \\ = n \int_0^\infty f(x_{(1)}) \left[\int_{M''_n(x_{(1)}, y)} \prod_{i=2}^n f(x_i) dx_i \right] dx_{(1)}, \quad (10) \end{aligned}$$

где внутренний интеграл берётся по множеству

$$\begin{aligned} M''_n(x_{(1)}, y) = \\ = \left\{ (x_2, \dots, x_n) : x_2 \geq x_{(1)}, \dots, x_n \geq x_{(1)}, \sum_{i=2}^n (x_i - x_{(1)})^2 \leq y \right\}. \end{aligned}$$

Условную функцию $F_{Y_n|X_{(1)}}(y|x_{(1)})$ распределения величины Y_n относительно величины $X_{(1)}$ определяет интеграл

$$\int \prod_{i=2}^n \frac{x_i e^{(-x_i^2/2)}}{e^{(-x_{(1)}^2/2)}} dx_2 \dots dx_n. \quad (11)$$

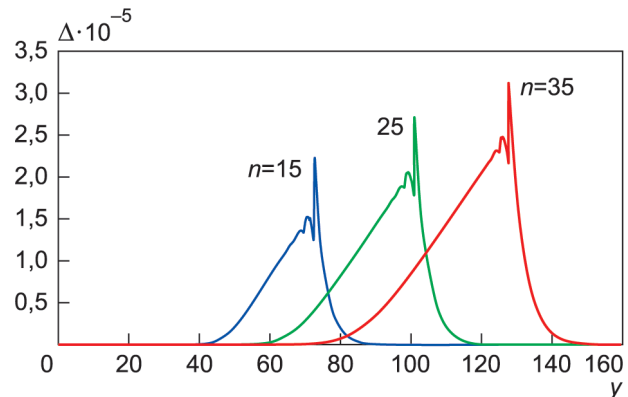


Рис. 1. Погрешности Δ вычисления значений $I_n(0, y)$ относительно функции распределения $\chi_{2(n-1)}^2$ для выборки различных объёмов n

Fig. 1. Graphs of the error Δ of calculating values $I_n(0, y)$ relative to the distribution function $\chi_{2(n-1)}^2$ for some sample size values n

В последнем выражении (10) в квадратных скобках стоит интеграл от произведения однотипных сомножителей, каждый из которых включает только плотность распределения наблюдений (6) и зависит только от одной переменной. При этом граница области интегрирования зависит от всех переменных, поэтому перейти к произведению одномерных интегралов нельзя. Однако некоторые упрощения всё же возможны. Введём следующие обозначения:

$$\left. \begin{aligned} I_2(x, y) &= \int_x^{x+\sqrt{y}} f(x_2) dx_2; \\ I_3(x, y) &= \int_{M_3^*(x, y)} f(x_2) f(x_3) dx_2 dx_3; \\ &\dots\dots\dots \\ I_n(x, y) &= \int_{M_n^*(x, y)} f(x_2) f(x_3) \dots f(x_n) dx_2 dx_3 \dots dx_n. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Тогда искомую функцию распределения запишем в виде

$$\begin{aligned} F_{Y_n}(y) &= \int_0^\infty f(x_{(1)}) n \left[\int_{M_n^*(x_{(1)}, y)} \prod_{i=2}^n f_{X_{(i)}}(x_i) dx_i \right] dx_{(1)} = \\ &= n \int_0^\infty f(x_{(1)}) I_n(x_{(1)}, y) dx_{(1)}. \end{aligned} \quad (13)$$

Интегралы $I_n(x, y)$ подчиняются рекуррентному соотношению. Например, интеграл $I_3(x, y)$, в котором интегрирование ведётся по четверти круга радиуса $\sqrt{y}$ можно преобразовать следующим образом:

$$\begin{aligned} I_3(x, y) &= \int_{M_3^*(x, y)} f(x_2) f(x_3) dx_2 dx_3 = \\ &= \int_x^{x+\sqrt{y}} f(x_3) \left[\int_x^{x+\sqrt{y-x_3^2}} f(x_2) dx_2 \right] dx_3 = \int_x^{x+\sqrt{y}} f(x_3) I_2(x, y-x_3^2) dx_3. \end{aligned}$$

Для произвольного n справедливо равенство

$$\begin{aligned} I_n(x, y) &= \int_{M_n^*(x, y)} f(x_2) f(x_3) \dots f(x_n) dx_2 dx_3 \dots dx_n = \\ &= \int_x^{x+\sqrt{y}} f(x_n) I_{n-1}(x, y-x_n^2) dx_n. \end{aligned} \quad (14)$$

Приведённые функции можно ввести в системе компьютерной математики, поддерживающей рекурсию, например Matlab. Тогда при вычислении $I_n(x, y)$ функция будет многократно вызывать сама себя для вычисления $I_{n-1}(x, y')$ при различных значениях аргумента y' , для чего, в свою очередь, потребуются вычисления $I_{n-2}(x, y'')$, и так далее до вычисляемого непосредственно I_2 . Однако в этом случае с увеличением n как раз и будет наблюдаться резкое увеличение времени вычислений. Чтобы этого избежать, вычислительную процедуру организовали следующим образом: последовательно при $n=3, 4, \dots$ табулировали значения $I_n(x, y)$ по y , а затем по x в узловых точках в некотором конечном диапазоне и с некоторым шагом.

При вычислении $I_n(x, y)$ требовались значения $I_{n-1}(x, y')$ не только в узловых точках, но и между ними. Для их получения использовали интерполяцию. Функцию I_2 вычисляли непосредственно по формуле (12). Результаты вычислений сохраняли в трёхмерном массиве. Для того, чтобы рассчитать значения функции распределения $F_{Y_n}(y)$, использовали двумерный слой этого массива, соответствующий данному значению n , и применяли интегрирование по формуле (13) с интерполяцией значений $I_{n-1}(x, y)$ между узловыми точками. Разумеется, в результате получали лишь приближённые значения всех функций, причём с увеличением n должна накапливаться погрешность вычислений. Другие факторы, влияющие на погрешность – шаг табуляции значений функций и конечное значение верхнего предела интегрирования по $x_{(1)}$ в (13).

Поскольку практически невозможно точно вычислить искомые функции, то невозможно непосредственно определить погрешности вычислений, но можно косвенно составить о них некоторое представление. Заметим, что условная плотность (9) при $x_{(1)}=0$ совпадает с обычной рэлеевской плотностью, поэтому $I_n(0, y)$ представляет собой функцию распределения χ^2 с $2(n-1)$ степенями свободы (что непосредственно следует из определения (12)), которая с высокой точностью вычисляется современными системами компьютерной математики. На рис. 1 изображены графики разностей $\Delta(y) = I_n(0, y) - \text{Chi2}(y, 2(n-1))$ при некоторых значениях n (здесь через Chi2 обозначена функция распределения χ^2), погрешность вычисления $I_n(0, y)$ не превышает $3 \cdot 10^{-5}$.

Другой способ косвенно оценить точность выполненных расчётов – сравнить рассчитанную функцию $F_{Y_n}(y)$ с эмпирической функцией распределения [25] смоделированных значений статистики Y_n . Для построения такой эмпирической функции выполняются следующие действия:

- 1) генерируется независимая выборка из распределения Рэлея объёмом n ;
- 2) определяется значение первой порядковой статистики $X_{(1)} = \min\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$;
- 3) вычисляется значение $Y_n = \sum_{i=1}^n (X_i - X_{(1)})^2$;
- 4) пп. 1–3 повторяются N раз;
- 5) по накопленным значениям строится ступенчатая кривая, которая начинается на нулевом уровне и делает скачок вверх на уровне $1/N$ в точках, совпадающих с одним из полученных значений.

Авторы настоящей статьи использовали инструмент «Гистограмма» системы Matlab с заданием для параметра «Normalization» значения «cdf». При этом получили ступенчатую кривую, близкую к эмпирической функции распределения (рис. 2). Из рис. 2 следует, что рассчитанные и эмпирические функции распределения согласуются между собой, т. е. точности расчётов достаточно для практических целей.

Перейдём к распределению статистики U_n , предназначенной для оценивания параметра a , используя в качестве оценки параметра σ величину $\sqrt{Y_n/(\gamma_n(n-1))}$:

$$U_n = X_{(1)} - \sqrt{\kappa_n Y_n},$$

где $\kappa_n = \pi/(2n(n-1)\gamma_n)$.

Функция распределения этой величины имеет вид

$$F_{U_n}(u) = \mathbf{P}\{U_n \leq u\} = \mathbf{P}\{X_{(1)} - \sqrt{\kappa_n} Y_n \leq u\}.$$

Применим формулу полной вероятности

$$\begin{aligned} F_{U_n}(u) &= \int_0^{\infty} \mathbf{P}\{X_{(1)} - \sqrt{\kappa_n} Y_n \leq u \mid X_{(1)} = x_{(1)}\} f_{X_{(1)}}(x_{(1)}) dx_{(1)} = \\ &= \int_0^{\infty} \mathbf{P}\{\sqrt{\kappa_n} Y_n \geq x_{(1)} - u \mid X_{(1)} = x_{(1)}\} f_{X_{(1)}}(x_{(1)}) dx_{(1)} = \\ &= \int_0^{\infty} \mathbf{P}\{Y_n \geq (x_{(1)} - u)^2 \kappa_n^{-1} \mid X_{(1)} = x_{(1)}\} f_{X_{(1)}}(x_{(1)}) dx_{(1)} = \\ &= \int_0^{\infty} [1 - F_{Y_n|X_{(1)}}((x_{(1)} - u)^2 \kappa_n^{-1} \mid x_{(1)})] f_{X_{(1)}}(x_{(1)}) dx_{(1)} = \\ &= 1 - \int_0^{\infty} F_{Y_n|X_{(1)}}((x_{(1)} - u)^2 \kappa_n^{-1} \mid x_{(1)}) f_{X_{(1)}}(x_{(1)}) dx_{(1)}. \end{aligned} \quad (15)$$

В (15) условная функция $F_{Y_n|X_{(1)}}(y \mid x_{(1)})$ распределения величины Y_n относительно $X_{(1)}$ определена соотношением (11) с учётом условия $u \leq x_{(1)}$, поскольку при $u > x_{(1)}$ справедливо

$$\mathbf{P}\{X_{(1)} - \sqrt{\kappa_n} Y_n \leq u \mid X_{(1)} = x_{(1)}\} = 1.$$

С учётом (11) получим интеграл

$$\begin{aligned} &\int_0^{\infty} F_{Y_n|X_{(1)}}((x_{(1)} - u)^2 \kappa_n^{-1} \mid x_{(1)}) f_{X_{(1)}}(x_{(1)}) dx_{(1)} = \\ &= n \int_0^{\infty} f(x_{(1)}) I_n(x_{(1)}, (x_{(1)} - u)^2 \kappa_n^{-1}) dx_{(1)}, \end{aligned}$$

численное нахождение которого, как и распределения величины U_n , теперь не вызывает затруднений.

Вычисленную функцию распределения также можно сравнить с эмпирической функцией распределения, полученной стохастическим моделированием. Пример такого сравнения представлен на рис. 3.

Таким образом, найден способ достаточно точного вычисления функций распределения статистик Y_n и U_n для $R(0, 1)$ -распределённых независимых наблюдений. Далее будем обозначать эти статистики и их распределения соответственно Y_n^0 , U_n^0 и $F_{Y_n^0}(y)$, $F_{U_n^0}(u)$. В общем случае для наблюдений, распределённых по закону $R(a, \sigma)$, статистики и их функции распределения можно записать как

$$\left. \begin{aligned} Y_n &= \sigma^2 Y_n^0; \\ U_n &= a + \sigma U_n^0; \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

$$F_{Y_n}(y; \sigma) = F_{Y_n^0}(y/\sigma^2);$$

$$F_{U_n}(u; a, \sigma) = F_{U_n^0}((u-a)/\sigma).$$

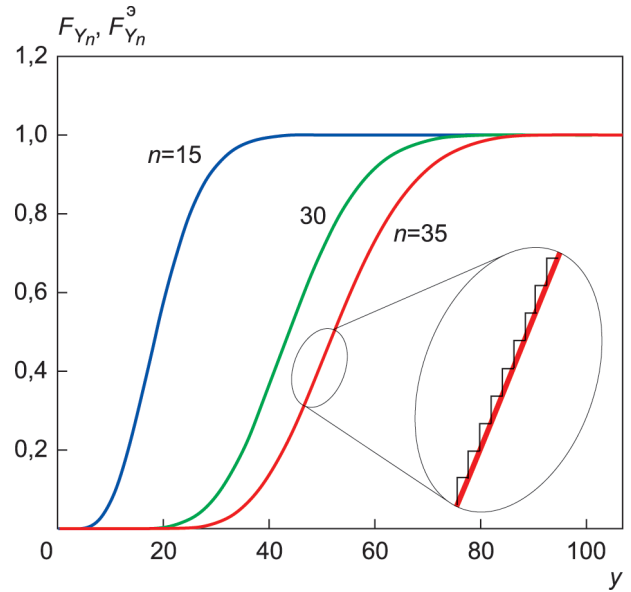


Рис. 2. Рассчитанные (гладкие кривые) $F_{Y_n}(y)$ и эмпирические (ступенчатые кривые) $F_{Y_n^0}(y)$ функции распределения статистики Y_n при выборках объёмом n

Fig. 2. Calculated functions (smooth curves) $F_{Y_n}(y)$ and empirical functions (step curves) $F_{Y_n^0}(y)$ of statistical distribution functions Y_n for some sample size values n

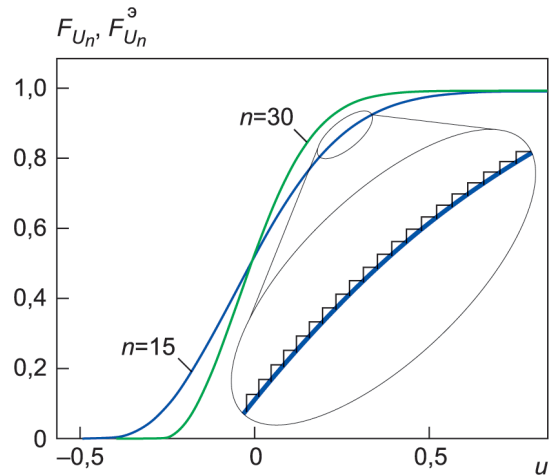


Рис. 3. Рассчитанные (гладкие кривые) $F_{U_n}(u)$ и эмпирические (ступенчатые кривые) $F_{U_n^0}(u)$ функции распределения статистики U_n при выборках объёмом n

Fig. 3. Calculated functions (smooth curves) $F_{U_n}(u)$ and empirical functions (step curves) $F_{U_n^0}(u)$ of statistical distribution functions U_n for some sample size values n

Если наблюдения распределены по закону $R(a, -\sigma)$, то статистика Y_n распределена точно так же, как и в случае $R(a, \sigma)$, а статистику U_n можно представить в виде

$$U_n = X_{(n)} + \sqrt{\kappa_n} Y_n = a - \sigma U_n^0 \quad (17)$$

с функцией распределения

$$F_{U_n}(u; a, -\sigma) = F_{U_n}^0((a-u)/\sigma).$$

Оценивание уровня несоответствий и построение оперативных характеристик планов контроля. Рассмотрим оценку уровня несоответствий, получаемую при подстановке в (3) оценок параметров. Оценки долей изделий, значения показателя качества которых меньше нижней границы поля допуска и больше верхней границы поля допуска, равны соответственно

$$\hat{p}_L = F_X(x_L; \hat{a}, \hat{\sigma}) = \exp(-(x_L - \hat{a})^2 / (2\hat{\sigma}^2)); \quad (18)$$

$$\hat{p}_U = 1 - F_X(x_U; \hat{a}, \hat{\sigma}) = 1 - \exp(-(x_U - \hat{a})^2 / (2\hat{\sigma}^2)). \quad (19)$$

Как упоминалось выше, партия деталей принимается, если оценка доли несоответствующих изделий не больше некоторого заданного критического уровня: $\hat{p} = \hat{p}_L + \hat{p}_U \leq p_{кр}$.

Вероятность приёмки партии, зависящая от параметров распределения показателя качества, в данном случае представляет собой функцию двух переменных. При этом одна и та же доля несоответствующих изделий может быть получена при различных сочетаниях параметров a и σ , поэтому преобразовать оперативную характеристику в функцию уровня несоответствий не удаётся. Это затрудняет сравнение планов контроля с применением оценок (18), (19) как с планами контроля по альтернативному признаку, так и с планами, рассмотренными в [21]. Для такого сравнения рассмотрим частный случай: предположим $a = x_U$ и оценим только долю изделий со значением показателя качества,

выходящим за нижнюю границу поля допуска. При этом, как и в [21], справедливо равенство

$$p = p_L = \exp\left(-\frac{(a - x_L)^2}{2\sigma^2}\right) \Rightarrow -2\ln p = \frac{(a - x_L)^2}{\sigma^2}, \quad (20)$$

а для оценки $\hat{p}_L$ можно записать

$$\begin{aligned} P\{\hat{p}_L \leq p_{кр}\} &= \\ &= P\left\{\exp\left(-\frac{(x_L - \hat{a})^2}{2\hat{\sigma}^2}\right) \leq p_{кр}\right\} = P\left\{\frac{\hat{a} - x_L}{\sqrt{\hat{\sigma}^2}} \geq \sqrt{-2\ln p_{кр}}\right\}. \end{aligned}$$

С учётом (16), (17) выполним некоторые преобразования

$$\begin{aligned} \frac{\hat{a} - x_L}{\sqrt{\hat{\sigma}^2}} &= \frac{a - \sigma U_n^0 - x_L}{\sigma \sqrt{Y_n^0 / (\gamma_n(n-1))}} = \left(\frac{a - x_L}{\sigma} - U_n^0\right) \left[Y_n^0 / (\gamma_n(n-1))\right]^{-1/2} = \\ &= \left(\sqrt{-2\ln p} - X_{(1)}^0 + \sqrt{\kappa_n Y_n^0}\right) \left[Y_n^0 / (\gamma_n(n-1))\right]^{-1/2} \end{aligned}$$

и запишем

$$\begin{aligned} P\{\hat{p}_L \leq p_{кр}\} &= P\left\{-X_{(1)}^0 + \sqrt{-2\ln p} \geq \sqrt{Y_n^0} [\gamma_n(n-1)]^{-1/2} \times \right. \\ &\times \left. \left(\sqrt{-2\ln p_{кр}} - \sqrt{\pi/(2n)}\right)\right\}. \end{aligned}$$

Значения полученного выражения $P\{\hat{p}_L \leq p_{кр}\}$ вычисляются аналогично (15) с использованием условной функции распределения (11). При небольших значениях уровня несоответствий (которые рассматриваются в целях решения данной задачи) следует пренебречь вероятностью события $\{X_{(1)}^0 > \sqrt{-2\ln p}\}$ и верхний предел интегрирования принять равным $\sqrt{-2\ln p}$:

$$\begin{aligned} P\{\hat{p}_L \leq p_{кр}\} &= \int_0^{\sqrt{-2\ln p}} F_{Y_n^0 | X_{(1)}^0} \left(\left(\sqrt{-2\ln p} - x_{(1)} \right)^2 \lambda_n^{-1} \right) f_{X_{(1)}^0}(x_{(1)}) dx_{(1)} = \\ &= n \int_0^{\sqrt{-2\ln p}} f(x_{(1)}) I_n \left(x_{(1)}, \left(\sqrt{-2\ln p} - x_{(1)} \right)^2 \lambda_n^{-1} \right) dx_{(1)}, \quad (21) \end{aligned}$$

где $\lambda_n = [\gamma_n(n-1)]^{-1/2} (\sqrt{-2\ln p_{кр}} - \sqrt{\pi/(2n)})$.

Выражение (21), рассматриваемое как функция уровня несоответствий, и является оперативной характеристикой плана контроля, в котором используются определённые значения объёма выборки n и критического уровня несоответствий $p_{кр}$. Сравнение с построенными в [21] однопараметрическими планами контроля показывает, что близкие характеристики достигаются при довольно небольшом увеличении объёма выборки. На рис. 4 приведены практически совпадающие кривые – оперативные характеристики однопараметрического плана контроля с $n=25$ и двухпараметрического с $n=28$ при одном и том же $p_{кр}=0,02$.

Закключение. Рассмотренное в настоящей статье двухпараметрическое обобщение распределения Рэлея является

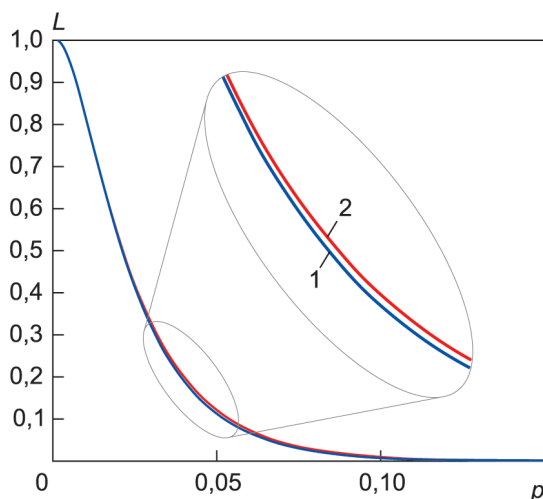


Рис. 4. Оперативные характеристики планов контроля при критическом уровне несоответствий $p_{кр}=0,02$:

- 1 – однопараметрический план для выборки объёмом $n=25$;
2 – двухпараметрический план для выборки объёмом $n=28$

Fig. 4. Operational characteristics of control plans with the same value of the critical level of inconsistencies 0.02:

- 1 – one-parameter plan with a sample size $n=25$; 2 – two-parameter plan with a sample size $n=28$

естественным для диаметров цилиндрических поверхностей деталей определённой конструкции при определённых способах базирования и обработки этих деталей. Проведение контроля партий таких деталей по количественному признаку требует построения планов, предназначенных именно для распределения Рэлея. В настоящей статье построены планы и оперативные характеристики выборочного контроля в случае, когда оба параметра распределения неизвестны и оцениваются по выборке. Для этого потребовалось найти распределения оценок параметров по специально построенной численной процедуре, использующей особенности статистик и распределения наблюдений. Знание распределений оценок параметров позволяет также строить контрольные карты для мониторинга производственного процесса, что будет описано в следующей статье.

Список источников

1. Григорьев С. Н., Мастеренко Д. А., Телешевский В. И., Емельянов П. Н. Современное состояние и перспективы развития метрологического обеспечения машиностроительного производства // Измерительная техника. 2012. № 11. С. 56–59.
2. Григорьев С. Н., Телешевский В. И. Проблемы измерений в технологических процессах формообразования // Измерительная техника. 2011. № 7. С. 3–7.
3. Телешевский В. И. Измерительная информатика в машиностроении // Вестник МГТУ «СТАНКИН». 2008. № 1. С. 33–38.
4. Grigoriev S. N., Migranov M. S., Shekhtman S. R., Migranov A. M., Ershov A. A., Pivkin P. M., *Proc. SPIE 11914, SPIE Future Sensing Technologies 2021*, 14 November 2021, 119141C. <https://doi.org/10.1117/12.2605753>
5. Григорьев С. Н., Синопальников В. А., Терешин М. В., Гурин В. Д. Контроль параметров процесса резания на основе диагностирования инструмента и заготовки // Измерительная техника. 2012. № 5. С. 46–48.
6. Леун В. И., Николаева Е. В., Тугнибидин А. В. Тенденция развития теории и практики создания управляющих приборов для повышения точности и производительности операций шлифования деталей и инструментов в технологических процессах машиностроения, приборостроения и инструментальных производств // Динамика систем, механизмов и машин. 2012. № 2. С. 251–254.
7. Grigoriev S. N., Martinov G. M., *Proc. CIRP*, 2014, no. 14, pp. 517–522. <https://doi.org/10.1016/j.procir.2014.03.051>
8. Grigoriev S. N., Martinov G. M., *Proc. CIRP*, 2016, no. 41, pp. 858–863. <https://doi.org/10.1016/j.procir.2015.08.031>
9. Уилер Д., Чамберс Д. Статистическое управление процессами: Оптимизация бизнеса с использованием контрольных карт Шухарта. М.: Альпина Паблишер, 2009. 310 с.
10. Адлер Ю. П., Шпер В. Л. Практическое руководство по статистическому управлению процессами. М.: Альпина Паблишер, 2019. 320 с.
11. Лапидус В. А. Система Шухарта. Н. Новгород: Приоритет, 2004. 65 с.

12. Деминг У. Э. Выход из кризиса: Новая парадигма управления людьми, системами и процессами: Пер. с англ. М.: Альпина Бизнес Букс, 2007. 370 с.

13. Розно М. И. Статистический контроль качества продукции по альтернативному признаку при изменённом допуске (метод АКУД) // Надёжность и контроль качества. 1992. № 2. С. 44–52.

14. Steiner S. H., Geyer P. L., Wesolowsky G. O., *International Journal of Production Research*, 1994, vol. 32, no. 1. pp. 75–91. <https://doi.org/10.1080/00207549408956917>

15. Steiner S. H., Geyer P. L., Wesolowsky G. O., *Quality and Reliability Engineering International*, 1996, vol. 12, no. 5, pp. 345–353. [https://doi.org/10.1002/\(SICI\)1099-1638\(199609\)12:5<345::AID-QRE11>3.0.CO;2-M](https://doi.org/10.1002/(SICI)1099-1638(199609)12:5<345::AID-QRE11>3.0.CO;2-M)

16. Розно М. И. Регулирование процессов на основе данных по альтернативному признаку по суженному допуску // Методы менеджмента качества. 2001. № 12. С. 27–33.

17. Григорович В. Г., Козлова Н. О., Юдин С. В. Метод оценки центра группирования размеров в условиях производства на АРЛ // Автоматизация технологических процессов в машиностроении. Волгоградский государственный технический университет. 1995. С. 197–202.

18. Григорович В. Г., Козлова Н. О., Юдин С. В. Информационно-статистические методы регулирования технологических процессов // Кузнечно-штамповочное производство. 2000. № 9. С. 27–29.

19. Masterenko D. A., Metel A. S., *Mechanics & Industry*, 2017, vol. 18, no. 7. <https://doi.org/10.1051/meca/2017054> 22

20. Мастеренко Д. А. Сравнение методов регулирования процессов на основе измерительной информации контроля по альтернативному признаку по суженному допуску // Вестник МГТУ «СТАНКИН». 2017. № 3 (42). С. 74–79.

21. Григорьев С. Н., Емельянов П. Н., Мастеренко Д. А., Педь С. Е. Выборочный измерительный контроль партий деталей с распределением размера по закону Рэлея // Измерительная техника. 2022. № 6. С. 28–35. <https://doi.org/10.32446/0368-1025it.2022-6-28-35>

22. Розанов Ю. А. Теория вероятностей, случайные процессы и математическая статистика. М.: Наука, 1985. 320 с.

23. Орлов А. И. Прикладная статистика. М.: Экзамен, 2004. 483 с.

24. Raza S. M., Butt M. M., Siddiqi A. F., Shewhart Control Charts for Rayleigh Distribution in the Presence of Type I Censored Data, *Journal of ISOSS*, 2016, vol. 2(2), pp. 210–217.

25. Козлов М. В., Прохоров А. В. Введение в математическую статистику. М.: Изд-во МГУ, 1987. 264 с.

References

1. Grigoriev S. N., Masterenko D. A., Teleshevskii V. I., Emelyanov P. N., *Measurement Techniques*, 2013, vol. 55, no. 11, pp. 1311–1315. <https://doi.org/10.1007/s11018-013-0126-0>
2. Grigoriev S. N., Teleshevskii V. I., *Measurement Techniques*, 2011, vol. 54, no. 7, pp. 744–749. <https://doi.org/10.1007/s11018-011-9798-5>

3. Teleshevsky V. I., Measuring informatics in mechanical engineering, *Vestnik of MSTU "STANKIN"*, 2008, no. 1. pp. 33–38. (In Russ.)
4. Grigoriev S. N., Migranov M. S., Shekhtman S. R., Migranov A. M., Ershov A. A., Pivkin P. M., *Proc. SPIE 11914, SPIE Future Sensing Technologies 2021*, 14 November 2021, 119141C. <https://doi.org/10.1117/12.2605753>
5. Grigoriev S. N., Sinopalnikov V. A., Tereshin M. V., Gurin V. D., *Measurement Techniques*, 2012, vol. 55, no. 5, pp. 555–558. <https://doi.org/10.1007/s11018-012-9999-6>
6. Leun V. I., Nikolaeva E. V., Tignibidin A. V., The trend in the development of theory and practice of creating control devices to improve the accuracy and productivity of grinding operations of parts and tools in technological processes of mechanical engineering, instrumentation and tool production, *Dynamics of systems, mechanisms and machines*, 2012, no. 2, pp. 251–254. (In Russ.)
7. Grigoriev S. N., Martinov G. M., *Proc. CIRP*, 2014, no. 14, pp. 517–522. <https://doi.org/10.1016/j.procir.2014.03.051>
8. Grigoriev S. N., Martinov G. M., *Proc. CIRP*, 2016, no. 41, pp. 858–863. <https://doi.org/10.1016/j.procir.2015.08.031>
9. Wheeler D. J., Chambers D. S., *Understanding Statistical Process Control*, Addison-Wesley, 1990, 310 p.
10. Adler Yu. P., Shper V. L., *Prakticheskoe rukovodstvo po statisticheskomu upravleniyu processami [Practical guide to statistical process management]*, Moscow, Alpina Publisher, 2019. 320 p. (In Russ.)
11. Lapidus V. A., *Sistema Shuharta [Shewhart's System]*, N. Novgorod, Priority Publ., 2004, 65 p. (In Russ.)
12. Deming W. E., *Overcoming the crisis: A new paradigm of managing people, systems and processes*, Cambridge, MA, MIT Center for Advanced Engineering Study, 1982.
13. Rozno M. I., Statisticheskij kontrol' kachestva produkcii po al'ternativnomu priznaku pri izmenyonnom dopuske (metod AKUD) [Statistical quality control of products on an alternative basis with a modified tolerance (AKUD method)], *Reliability and quality control*, 1992, no. 2, pp. 44–52. (In Russ.)
14. Steiner S. H., Geyer P. L., Wesolowsky G. O., *International Journal of Production Research*, 1994, vol. 32, no. 1, pp. 75–91. <https://doi.org/10.1080/00207549408956917>
15. Steiner S. H., Geyer P. L., Wesolowsky G. O., *Quality and Reliability Engineering International*, 1996, vol. 12, no. 5, pp. 345–353. [https://doi.org/10.1002/\(SICI\)1099-1638\(199609\)12:5<345::AID-QRE11>3.0.CO;2-M](https://doi.org/10.1002/(SICI)1099-1638(199609)12:5<345::AID-QRE11>3.0.CO;2-M)
16. Rozno M. I., Regulation of processes based on data on an alternative feature by a narrowed tolerance, *Methods of quality management*, 2001, no. 12, pp. 27–33. (In Russ.)
17. Grigorovich V. G., Kozlova N. O., Yudin S. V., Metod ocenki centra grupirovaniya razmerov v usloviyah proizvodstva na ARL [Method of estimating the size grouping center in production conditions at ARL], *Avtomatizaciya tekhnologicheskikh processov v mashinostroenii*, Volgograd State Technical University, 1995, pp. 197–202. (In Russ.)
18. Grigorovich V. G., Kozlova N. O., Yudin S. V., Informacionno-statisticheskie metody regulirovaniya tekhnologicheskikh processov [Information and statistical methods of regulation of technological processes], *Forging and stamping production*, 2000, no. 9, pp. 27–29. (In Russ.)
19. Masterenko D. A., Metel A. S., *Mechanics & Industry*, 2017, vol. 18, no. 7, 702. <https://doi.org/10.1051/meca/2017054>
20. Masterenko D. A., Comparison of methods for regulating processes based on measuring control information on an alternative basis by the narrowed tolerance, *Vestnik of MSTU "STANKIN"*, 2017, no. 3. pp. 74–79. (In Russ.)
21. Grigoriev S. N., Emelyanov P. N., Masterenko D. A., Ped' S. E., Sampling by variables for Rayleigh distributed lots, *Izmeritel'naja tehnika*, 2022, no. 6, pp. 28–35. (In Russ.) <https://doi.org/10.32446/0368-1025it.2022-6-28-35>
22. Rozanov Yu. A., *Teoriya veroyatnostej, sluchajnye processy i matematicheskaya statistika [Probability theory, random processes and mathematical statistics]*, Moscow, Nauka Publ., 1985. 320 p. (In Russ.)
23. Orlov A. I., *Prikladnaya statistika [Applied statistics]*, Moscow, Examen Publ., 2004, 483 p. (In Russ.)
24. Raza S. M., Butt M. M., Siddiqi A. F., Shewhart Control Charts for Rayleigh Distribution in the Presence of Type I Censored Data, *Journal of ISOSS*, 2016, vol. 2(2), pp. 210–217.
25. Kozlov M. V., Prohorov A. V., *Vvedenie v matematicheskuyu statistiku [Introduction to Mathematical Statistics]*, Moscow, MGU Publ., 1987, 264 p. (In Russ.)

Статья поступила в редакцию 01.07.2022; одобрена после рецензирования 04.07.2022; принята к публикации 05.07.2022.
The article was submitted 01.07.2022; approved after reviewing 04.07.2022; accepted for publication 05.07.2022.