

Научная статья

УДК 621.9.08

<https://doi.org/10.32446/0368-1025it.2022-6-28-35>

Выборочный измерительный контроль партий деталей с распределением размера по закону Рэлея

Сергей Николаевич Григорьев¹, Петр Николаевич Емельянов^{2✉}, Дмитрий Александрович Мастеренко³, Сергей Евгеньевич Педь⁴

^{1, 2, 3, 4} Московский государственный технологический университет «СТАНКИН», Москва, Россия

¹s.grigoriev@stankin.ru, <https://orcid.org/0000-0002-8239-5354>

²pemelyan@rambler.ru ✉, <https://orcid.org/0000-0003-1752-0961>

³d.masterenko@stankin.ru, <https://orcid.org/0000-0003-1041-4218>

⁴seped@mail.ru

Аннотация. Рассмотрено применение методов обработки измерительной информации как части современного менеджмента качества продукции машиностроительного производства. Поставлена и решена задача реализации процедур измерительного контроля в тех случаях, когда отклонение показателя качества от номинального значения описывается распределением Рэлея. Объяснен механизм генерации распределения Рэлея для деталей определённого вида. Построен план измерительного контроля для однопараметрической модели распределения. Проведён сравнительный анализ построенного плана с планом контроля по альтернативному признаку согласно ГОСТ Р ИСО 2859-1-2007 «Статистические методы. Процедуры выборочного контроля по альтернативному признаку. Часть 1. Планы выборочного контроля последовательных партий на основе приемлемого уровня качества». Рассмотрены контрольные статистики, позволяющие создать план контроля для двухпараметрической модели. Полученные результаты могут быть полезны для составления планов контроля выборок по количественному признаку партий деталей, геометрические параметры которых имеют распределение Рэлея, что обусловлено особенностями конструкции и технологии изготовления этих деталей.

Ключевые слова: измерительный контроль, выборочный контроль, план контроля, статистические методы менеджмента качества, распределение Рэлея

Финансирование: Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (проект № FSFS-2021-0003).

Для цитирования: Григорьев С. Н., Емельянов П. Н., Мастеренко Д. А., Педь С. Е. Выборочный измерительный контроль партий деталей с распределением размера по закону Рэлея // Измерительная техника. 2022. № 6. С. 28–35. <https://doi.org/10.32446/0368-1025it.2022-6-28-35>

Sampling by variables for Rayleigh distributed lots

Sergey N. Grigoriev¹, Petr N. Emelianov^{2✉}, Dmitry A. Masterenko³, Sergey E. Ped⁴

^{1, 2, 3, 4} Moscow State University of Technology "STANKIN", Moscow, Russia

¹s.grigoriev@stankin.ru, <https://orcid.org/0000-0002-8239-5354>

²pemelyan@rambler.ru ✉, <https://orcid.org/0000-0003-1752-0961>

³d.masterenko@stankin.ru, <https://orcid.org/0000-0003-1041-4218>

⁴seped@mail.ru

Abstract. The application of measurement information processing methods as part of modern quality management of machine-building products is considered. The task of constructing the procedures of measurement (variable) inspection for Rayleigh distributed quality characteristic is set and solved. The mechanism of generation of Rayleigh distribution is explained for the parts of the specific type. The measurement sampling plan for the single-parameter distribution model is constructed and compared with the attributes plan according to the standard ISO 2859-1 "Statistical methods. Sampling procedures for inspection by attributes. Part 1: Sampling schemes indexed by acceptance quality limit for lot-by-lot inspection". The test statistics for the two-parameters model are described. The results obtained can be useful for drawing up sampling control plans on the quantitative basis of batches of parts whose geometric parameters have a Rayleigh distribution, which is due to the design features and manufacturing technology of these parts.

Keywords: measurement inspection, sampling, sampling plan, statistical methods of quality management, Rayleigh distribution

Financial support. The work was carried out with the financial support of the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (project no. FSFS-2021-0003)

Введение. Использование современных средств измерений и методов обработки измерительной информации

в машиностроительном производстве необходимо в связи с постоянно возрастающими требованиями к качеству

продукции [1, 2] и с развитием потенциально более высокоточных по сравнению с традиционными технологиями обработки материалов [3]. В настоящее время необходимо измерять параметры деталей в ходе технологического процесса изготовления [3, 4]. Измерительная информация, включающая сведения о состоянии режущего инструмента [5, 6], используется системой управления станка [7, 8] для обеспечения высокой точности изделий [9, 10].

Важной составляющей инструментария современного менеджмента качества являются статистические методы. Главной целью их применения является достижение стабильности процессов и сокращение разброса показателей качества (методы статистического управления процессами – statistical process control, SPC) [11–14], продолжают использовать и методы выборочного контроля продукции (sampling).

По характеру информации о контролируемом показателе качества различают статистические методы, основанные на альтернативном и количественном признаках. При контроле по альтернативному признаку изделия, попавшие в выборку, разделяют на соответствующие требованиям и не соответствующие без измерения значения показателя качества, например, с помощью калибров. Таким образом, ни конкретные значения, ни закон распределения показателя качества в этом случае роли не играют, важно лишь, попадает его значение в заданное поле допуска или нет.

В настоящее время вместо *бракованной* или *дефектной* принято говорить о *несоответствующей* продукции, а долю несоответствующих единиц продукции в партии называть уровнем несоответствий (см., например, ГОСТ Р 50779.30-95 «Статистические методы. Приёмочный контроль качества. Общие требования»).

Контроль по количественному признаку предполагает измерение показателя качества и вычисление по результатам измерений статистических оценок параметров процесса изготовления изделий, поэтому его называют также измерительным контролем. Такой контроль сложнее, требует более высокой квалификации персонала, но для него требуются значительно меньшие выборки, чем при контроле по альтернативному признаку.

Существуют также статистические методы, основанные на альтернативном признаке по суженным границам допуска [15–21], свойства этих методов в некотором смысле являются промежуточными между двумя основными группами методов (контроль по количественным или альтернативным признакам).

Ещё одна сложность контроля по количественному признаку, возникающая при разработке процедур контроля, заключается в необходимости знания распределений контрольных статистик и, соответственно, распределения показателя качества изделия в партии или в процессе изготовления.

Действующие стандарты в области контроля по количественному признаку (например, ГОСТ Р ИСО 3951-1-2015 «Статистические методы. Процедуры выборочного контроля по количественному признаку. Часть 1. Требования к одноступенчатым планам на основе AQL при контроле последовательных партий по единственной характеристике и единственному AQL», ГОСТ Р ИСО 3951-2-2015

«Статистические методы. Процедуры выборочного контроля по количественному признаку. Часть 2. Общие требования к одноступенчатым планам на основе AQL при контроле последовательных партий по независимым характеристикам качества») рассчитаны на применение в условиях нормального распределения показателя качества. В то же время в ГОСТ Р 50779.50-95 «Приёмочный контроль качества по количественному признаку. Общие требования» сказано, что в нормативных документах или договоре на поставку должны быть указаны признаваемые сторонами виды распределения показателей качества, а нормальное распределение приводится как пример.

Нормальное (или близкое к нормальному) распределение показателя качества действительно имеет место, особенно в крупносерийном и массовом производстве. Отклонения от нормального закона могут свидетельствовать о нестабильности техпроцесса или о формировании партии изделий из различных источников, каждый из которых характеризуется различными особенностями процесса изготовления. Однако в ряде случаев распределение, отличное от нормального, может быть порождено нормальным распределением отдельных составляющих, влияющих на значение показателя качества.

Цель настоящей работы – анализ механизма генерации распределения Рэлея для размеров деталей, имеющих определённые особенности конструкции и технологии изготовления, и построение предназначенных именно для распределения Рэлея планов для выборочного контроля партий деталей по количественному признаку.

Постановка задачи. В процессе модернизации системы качества на одном из производственных предприятий г. Москвы возник вопрос об организации выборочного контроля партий деталей (эскиз детали показан на рис. 1). Детали поступали от субподрядчика партиями по 200 штук. Если применить контроль по альтернативному признаку, то для приемлемого уровня несоответствий $AQL=0,01$ в ГОСТ Р ИСО 2859-1-2007 «Статистические методы. Процедуры выборочного контроля по альтернативному признаку. Часть 1. Планы выборочного контроля последовательных партий на основе приемлемого уровня качества» рекомендуется план контроля для выборки объёмом $n=50$ и приёмочным числом $Ac=1$ (нормальный контроль, уровень III). Риск изготовителя такого плана контроля равен 0,089, а риск производителя на уровне предельного качества $LQ=0,05$ составляет 0,279. Таким образом, контролируется четверть партии, но оба риска остаются довольно высокими.

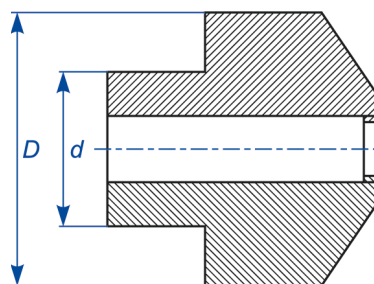


Рис. 1. Эскиз контролируемой детали

Fig. 1. Sketch of the inspected part

С целью сокращения рисков или объёма выборки рассмотрен контроль по количественному признаку. Как отмечено выше, применение ГОСТ Р ИСО 3951-1-2015, ГОСТ Р ИСО 3951-2-2015 возможно при нормально распределённом показателе качества, поэтому авторы настоящей статьи изучили распределения значений трёх диаметров, подлежащих контролю – двух наружных и одного внутреннего. При этом получили гистограмму (рис. 2) действительных значений диаметра цилиндрической поверхности $d = 40_{-0,05}$ мм для партии деталей, откуда следует, что распределение значений d явно асимметрично. Предположили, что такая асимметрия вызвана предварительным отбором деталей при нормальном распределении действительных значений размера, однако данное предположение не подтвердилось. Кроме того, согласно рис. 2 плотность вероятности резко убывает по мере приближения к верхней границе диапазона, что также свидетельствует против нормальности закона распределения.

При изучении чертежа (см. рис. 1) и технологического процесса изготовления детали предположили, что отклонение диаметра $d = 40$ мм имеет распределение Рэлея. Соответствующую гипотезу подтвердили при проверке по критерию Андерсона-Дарлинга (объём данных 200, уровень значимости 0,05). Объяснение этому факту состоит в том, что при финишной обработке цилиндрической поверхности диаметром d , осуществляемой при закреплении детали по поверхности диаметром $D = 70$ мм и вращении относительно её оси, для обеспечения требований по качеству (шероховатости) должен быть снят припуск, не меньший заданного. Вследствие отклонения от соосности поверхностей диаметрами d и D , с той стороны, в которую смещена ось поверхности диаметром d , снимается больший припуск, чем было бы при строгой соосности поверхностей. В результате диаметр обработанной поверхности может оказаться только меньше заданного.

Если горизонтальная и вертикальная составляющие отклонения от соосности поверхностей независимы, нормально распределены с нулевыми математическими ожиданиями

и одинаковыми дисперсиями σ^2 , то отклонение от соосности Δ имеет распределение Рэлея

$$f_{\Delta}(x; \sigma) = \begin{cases} \frac{x}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right), & x \geq 0; \\ 0, & x < 0, \end{cases} \quad (1)$$

а плотность распределения диаметра d (далее в формулах диаметр d обозначен X) определяется как

$$f_X(x; a, \sigma) = \begin{cases} \frac{a-x}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{(a-x)^2}{2\sigma^2}\right), & x \leq a; \\ 0, & x > a, \end{cases} \quad (2)$$

где a – значение диаметра d при строгой соосности базовой и обрабатываемой поверхностей и снятии одинакового припуска по всей поверхности.

На рис. 3 показано влияние отклонения от соосности базовой и обрабатываемой поверхностей перед обработкой на формирование диаметра обработанной поверхности (влияние других факторов условно не учитывали): если поверхности соосны, то по всей окружности снимается одинаковый заданный припуск z , диаметр поверхности после обработки равен номинальному (см. рис. 3, а); если оси поверхностей не совпадают, то минимальный снимаемый припуск $z_{\min}$ равен заданному, диаметр поверхности после обработки меньше номинального (см. рис. 3, б).

Описанный механизм должен действовать для всех деталей подобного вида, когда имеющееся перед обработкой отклонение от соосности базовой и обрабатываемой поверхностей трансформируется в отклонение размера, причём влияние этого отклонения значительно больше, чем влияние других случайных факторов (износ инструмента, погрешности станка, неоднородность материала детали и т. п.).

Таким образом, распределение диаметров деталей определяется двумя параметрами. При контроле партии по количественному признаку необходимо измерить диаметры

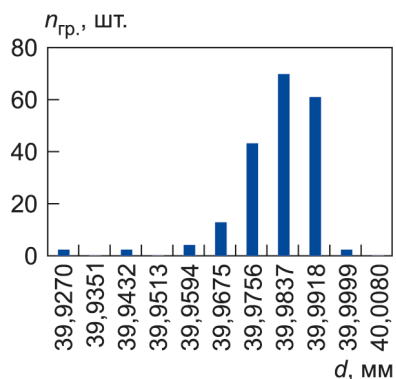


Рис. 2. Гистограмма действительных значений диаметра $d = 40_{-0,05}$ мм по результатам измерения 200 деталей; $n_{гр}$ – количество деталей в группе

Fig. 2. Histogram of the actual values of the $d = 40_{-0,05}$ mm according to the measurement results of 200 parts; $n_{гр}$ – the number of parts in a group

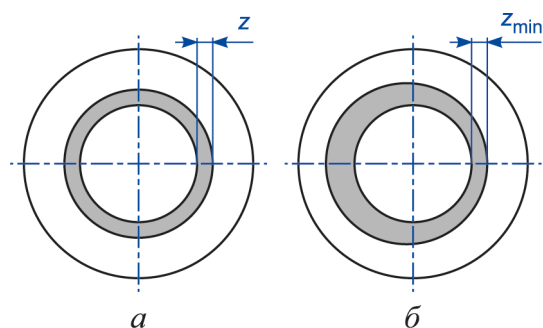


Рис. 3. Влияние отклонения от соосности базовой и обрабатываемой поверхностей перед обработкой на формирование диаметра обработанной поверхности для соосных (а) и несоосных (б) поверхностей

Fig. 3. The effect of deviation from the alignment of the base and treated surfaces before processing on the formation of the diameter of the treated surface, for the surfaces are aligned (а) and the surfaces do not coincide (б)

деталей некоторой случайной выборки, по результатам измерений вычислить оценки $\hat{a}$, $\hat{\sigma}$ параметров распределения и оценить уровень несоответствий в партии. С учётом того, что плотности (2) соответствует функция распределения

$$F_X(x; a, \sigma) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{(a-x)^2}{2\sigma^2}\right), & x \leq a; \\ 1, & x > a, \end{cases} \quad (3)$$

уровень несоответствий, т. е. вероятность получения несоответствующей детали при определённых значениях параметров и границах поля допуска x_L , x_U можно записать как

$$p = 1 - [F_X(x_U; a, \sigma) - F_X(x_L; a, \sigma)]. \quad (4)$$

Подставив в (4) с учётом (3) оценки $\hat{a}$, $\hat{\sigma}$, можно найти оценку уровня несоответствий $\hat{p}$. Если её значение превысит установленный уровень, то партия должна быть отклонена.

При дальнейшем исследовании авторы настоящей статьи установили, что значение параметра a более стабильное, близкое к заданному, поэтому имеет смысл рассмотреть и упрощённый вариант задачи, в котором требуется оценить только параметр σ . Однако очевидно, что и параметр a может изменяться (например, вследствие износа инструмента или неточности настройки), поэтому требуется разработать и процедуру контроля по двум параметрам. В итоге рассматривали две задачи: упрощённую однопараметрическую, в которой значение параметра a считается известным; двухпараметрическую, в которой оцениваются оба параметра распределения.

Строго говоря, распределением Рэлея называется только однопараметрическое распределение с плотностью (1), так что здесь рассматривали обобщение распределения Рэлея. Для краткости, имея всегда в виду $\sigma > 0$, записывали $X \sim R(a, \sigma)$, если случайная величина $X - a$ имеет распределение Рэлея с параметром σ ; если же распределение Рэлея имеет величина $a - X$, как в случае (2), то записывали $X \sim R(a, -\sigma)$.

Параметры рассматриваемого распределения можно оценивать методом максимального правдоподобия. Такая задача является частным случаем задачи оценивания параметров гамма-распределения. Гамма-распределение включает три параметра, и оценивание как всех трёх, так и некоторых из них в различных сочетаниях подробно рассмотрено А. И. Орловым [22], причём наряду с оценками максимального правдоподобия используются так называемые одношаговые оценки, также являющиеся наилучшими асимптотически нормальными. Однако в настоящем исследовании требуется знать не асимптотическое распределение оценок, а распределение конечных выборок.

Для данных, распределённых по закону Рэлея при цензурировании (ограничении сверху некоторой постоянной), в работе [23] рассмотрено построение контрольных карт Шухарта, но представлен только однопараметрический случай.

План контроля при известном значении параметра a .

Пусть размеры деталей из выборки представляют собой независимые случайные величины $X_1, X_2, \dots, X_n$, распределённые

по закону $R(a, -\sigma)$, причём значение параметра a известно. Рассмотрим следующую величину:

$$S_n^2 = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n (a - X_i)^2. \quad (5)$$

Величины в скобках независимы, каждая из них распределена по закону Рэлея, следовательно, их квадраты с точностью до множителя σ^2 имеют распределение хи-квадрат (χ^2) с двумя степенями свободы. Поэтому величина $2n\sigma^{-2}S_n^2$ при сделанных предположениях распределена по закону χ^2 с $2n$ степенями свободы. Математическое ожидание E этой величины определяется как

$$E(2n\sigma^{-2}S_n^2) = 2n,$$

поэтому (5) является несмещённой оценкой σ^2 .

Уровень несоответствий партии изделий при фиксированном значении параметра a однозначно связан со значением параметра σ . Поэтому первый способ контроля заключается в том, чтобы измерить размеры деталей из взятой выборки и найти оценку σ^2 согласно (5), принять партию, если полученное значение не превышает заданного критического значения $\sigma_{кр}^2$, в противном же случае партию следует отклонить. Функция (в данном случае – $L(\sigma)$), показывающая вероятность приёмки партии в зависимости от значения параметра, называется оперативной характеристикой плана контроля. Её можно записать исходя из распределения статистики (5):

$$L(\sigma) = P\{S_n^2 \leq \sigma_{кр}^2\} = \chi^2(2n\sigma_{кр}^2\sigma^{-2}; 2n), \quad (6)$$

где $\chi^2(x; m)$ – распределение хи-квадрат с m степенями свободы.

Во многих отношениях удобнее представить оперативную характеристику как функцию уровня несоответствий в партии p , определённого в соответствии с (4). Например, если $a = x_U$, то

$$p = F_X(x_L; a, \sigma) = \exp\left(-\frac{(a - x_L)^2}{2\sigma^2}\right),$$

откуда

$$\sigma^2 = (a - x_L)^2 / (-2 \ln p). \quad (7)$$

Следовательно, оперативную характеристику как функцию уровня несоответствий можно записать в форме

$$L(p) = \chi^2\left(-\frac{4n \ln p \sigma_{кр}^2}{(a - x_L)^2}; 2n\right). \quad (8)$$

Можно также выразить согласно (7) значение $\sigma_{кр}^2$ через критический уровень несоответствий $p_{кр}$, и тогда оперативная характеристика примет вид

$$L(p) = \chi^2\left(-\frac{2n \ln p}{\ln p_{кр}}; 2n\right). \quad (9)$$

Запись оперативной характеристики в форме (8) или (9) позволяет построить план контроля, подобрав значения $\sigma_{кр}$

(или $p_{кр}$) и объём n выборки, а также сравнить его с планом контроля по альтернативному признаку. Например, при значении $\sigma_{кр}=0,0188$ мм и при тех же объёме выборки $n=50$, уровне несоответствия $AQL=0,01$ и уровне предельного качества $LQ=0,05$ получили риски изготовителя и потребителя соответственно $\alpha=1-L(AQL)=0,04$ и $\beta=L(LQ)=0,095$.

Более полно сопоставить полученный план контроля и рекомендованный ГОСТ Р ИСО 2859-1-2007 можно по оперативным характеристикам, показывающим вероятность приёмки партии в зависимости от доли несоответствующих изделий (рис. 4).

Статистики для контроля при неизвестном значении параметра a . Необходимо найти оценку параметра a , подставив её в (4) и оценить уровень несоответствий. Для удобства рассуждений рассматривали независимые случайные величины $X_1, X_2, \dots, X_n$, распределённые по закону $R(a, \sigma)$, т. е. их функция распределения имеет вид

$$F_X(x; a, \sigma) = \begin{cases} 1 - \exp\left(-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right), & x \geq a; \\ 0, & x < a. \end{cases} \quad (10)$$

Первая порядковая статистика

$$X_{(1)} = \min\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$$

имеет следующую функцию распределения:

$$\begin{aligned} F_{X_{(1)}}(x_{(1)}) &= P\{X_{(1)} \leq x_{(1)}\} = 1 - P\{X_{(1)} > x_{(1)}\} = \\ &= 1 - P\{X_1 > x_{(1)}, \dots, X_n > x_{(1)}\} = 1 - (1 - F_X(x_{(1)}))^n = \\ &= 1 - \exp(-n(x_{(1)} - a)^2 / (2\sigma^2)). \end{aligned} \quad (11)$$

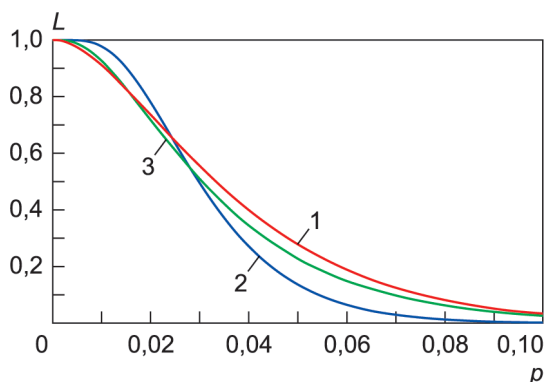


Рис. 4. Зависимости вероятности приёмки партии L от доли p несоответствующих изделий (оперативные характеристики) для плана контроля по альтернативному признаку по ГОСТ Р ИСО 2859-1-2007 с выборкой объёмом 50 и приёмочным числом 1 (1) и для построенных согласно формуле (8) планов контроля с $\sigma_{кр}=0,0188$ мм и выборками объёмом 50 и 25 (2, 3 соответственно)

Fig. 4. Dependences of the probability of acceptance of the lot L on the proportion p of nonconforming products (operational characteristics) for the attributes sampling plan according to GOST R ISO 2859-1-2007 with a sample of 50 and an acceptance number of 1 (1) and for sampling plans constructed according to formula (8) with samples of 50 and 25 (2, 3 respectively)

Из сравнения соотношения (11) с системой (10), следует, что эта функция распределения соответствует закону $R(a, \sigma/\sqrt{n})$. Соответственно, имеем плотность распределения первой порядковой статистики

$$f_{X_{(1)}}(x_{(1)}) = \frac{n(x_{(1)} - a)}{\sigma^2} \exp\left(-n \frac{(x_{(1)} - a)^2}{2\sigma^2}\right). \quad (12)$$

В частности, из (12) следует математическое ожидание $X_{(1)}$

$$E(X_{(1)}) = a + \sigma\sqrt{\pi/(2n)}.$$

Таким образом, первая порядковая статистика позволяет оценить параметр a , если известно значение или оценка параметра σ :

$$\hat{a} = X_{(1)} - \hat{\sigma}\sqrt{\pi/(2n)},$$

причём если $\hat{\sigma}$ является несмещённой, то и $\hat{a}$ тоже будет несмещённой. Заметим, что справедливо равенство

$$\begin{aligned} E\sum_{i=1}^n (X_i - X_{(1)}) &= \sum_{i=1}^n EX_i - nEX_{(1)} = na + n\sigma\sqrt{\pi/2} - \\ &- na - n\sigma\sqrt{\pi/2} = n(\sqrt{n} - 1)\sigma\sqrt{\pi/2}, \end{aligned}$$

поэтому существует несмещённая оценка

$$\begin{aligned} \hat{a} &= X_{(1)} - \frac{1}{n(\sqrt{n} - 1)} \sum_{i=1}^n (X_i - X_{(1)}) = \\ &= \frac{1}{n(\sqrt{n} - 1)} \left[(n(\sqrt{n} - 1) + 1)X_{(1)} - \sum_{i=2}^n X_{(i)} \right]. \end{aligned}$$

Поскольку в распределения (3), (10) входит не параметр σ , а его квадрат, то требуется несмещённая оценка именно σ^2 . Для нахождения такой оценки рассмотрим случайную величину

$$Y_n = \sum_{i=1}^n (X_i - X_{(1)})^2 = \sum_{i=2}^n (X_{(i)} - X_{(1)})^2. \quad (13)$$

Распределение этой статистики не зависит от параметра a , а определяется только параметром σ . Кроме того, если все величины $X_1, X_2, \dots, X_n$ умножить на одну и ту же положительную постоянную, то Y_n умножится на квадрат той же постоянной. По указанным причинам достаточно вычислить математическое ожидание (13) для величин $X_1, X_2, \dots, X_n \sim R(0, 1)$, а потом результат умножить на σ^2 . Использовали известное (см., например, [24]) свойство условного математического ожидания

$$E(E(U_1|U_2)) = EU_1,$$

где $E(U_1|U_2)$ – условное математическое ожидание случайной величины U_1 относительно случайной величины U_2 .

Плотность условного распределения случайной величины $X \sim R(0, 1)$ при условии $X > b$, где $b > 0$ – постоянная, имеет вид (это используется также в [23])

$$f_{X|X \geq b}(x) = \begin{cases} \frac{f_X(x)}{P\{X \geq b\}}, & x \geq b \\ 0, & x < b \end{cases} = \begin{cases} x \frac{\exp(-x^2/2)}{\exp(-b^2/2)}, & x \geq b; \\ 0, & x < b. \end{cases} \quad (14)$$

Порядок слагаемых в (13) роли не играет, важно лишь, что все величины X_i больше, чем $X_{(1)}$. Поэтому для решения поставленной задачи можно просто найти математическое ожидание величины $(X - X_{(1)})^2$ при условии $X > X_{(1)}$, после чего результат умножить на $(n-1)$. В соответствии с (14) получили:

$$\begin{aligned} E((X - X_{(1)})^2 | X_{(1)}, X > X_{(1)}) &= \int_{X_{(1)}}^{\infty} (x - x_{(1)})^2 \frac{x \exp(-x^2/2)}{\exp(-x_{(1)}^2/2)} dx = \\ &= \int_{X_{(1)}}^{\infty} (x^2 - 2x x_{(1)} + x_{(1)}^2) \frac{x \exp(-x^2/2)}{\exp(-x_{(1)}^2/2)} dx. \end{aligned} \quad (15)$$

Раскрыли скобки в (15) и нашли по отдельности следующие интегралы:

$$\begin{aligned} \int_{X_{(1)}}^{\infty} x^2 x e^{-x^2/2} dx &= 2 \int_{X_{(1)}}^{\infty} \frac{x^2}{2} e^{-x^2/2} d\frac{x^2}{2} = (x_{(1)}^2 + 2) e^{-x_{(1)}^2/2}; \\ \int_{X_{(1)}}^{\infty} x^2 e^{-x^2/2} dx &= - \int_{X_{(1)}}^{\infty} x e^{-x^2/2} d(-x^2/2) = - \int_{X_{(1)}}^{\infty} x dx e^{-x^2/2} = \\ &= -x e^{-x^2/2} \Big|_{X_{(1)}}^{\infty} + \int_{X_{(1)}}^{\infty} e^{-x^2/2} dx = x_{(1)} e^{-x_{(1)}^2/2} + \sqrt{2\pi} (1 - \Phi(x_{(1)})); \\ \int_{X_{(1)}}^{\infty} x e^{-x^2/2} dx &= e^{-x_{(1)}^2/2}, \end{aligned}$$

где $\Phi(x_{(1)})$ – функция стандартного нормального распределения.

Подставили полученные результаты в (14), умножили на плотность (2) с $a=0$, $\sigma=1$ и проинтегрировали, в результате чего получили выражение, значение которого легко найти численно:

$$\begin{aligned} \gamma_n &= E((X - X_{(1)})^2, X > X_{(1)}) = \\ &= 2 - 2\sqrt{2\pi} \int_0^{\infty} x_{(1)} \frac{(1 - \Phi(x_{(1)}))}{\exp(-x_{(1)}^2/2)} n x_{(1)} \exp(-n x_{(1)}^2/2) dx_{(1)} = \\ &= 2 \left(1 - \sqrt{2\pi} \frac{n}{n-1} \int_0^{\infty} (1 - \Phi(x_{(1)})) (n-1) x_{(1)}^2 \exp(-(n-1) x_{(1)}^2/2) dx_{(1)} \right). \end{aligned}$$

При $X_1, X_2, \dots, X_n \sim R(a, \sigma)$ математическое ожидание

$$E(Y_n) = (n-1) \gamma_n \sigma^2,$$

поэтому несмещённую оценку σ^2 даёт статистика

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{\gamma_n(n-1)} \sum_{i=1}^n (X_i - X_{(1)})^2 = \frac{1}{\gamma_n(n-1)} \sum_{i=2}^n (X_{(i)} - X_{(1)})^2.$$

В случае результатов наблюдений, распределённых по закону $R(a, -\sigma)$, ближайшим к значению a будет не первая, а n -я порядковая статистика с математическим ожиданием

$$E(X_{(n)}) = a - \sigma \sqrt{\pi/(2n)}.$$

Тогда оценка параметра a примет вид

$$\begin{aligned} \hat{a} &= X_{(n)} + \hat{\sigma} \sqrt{\pi/(2n)} = X_{(n)} + \frac{1}{n(\sqrt{n}-1)} \sum_{i=1}^n (X_{(n)} - X_i) = \\ &= \frac{1}{n(\sqrt{n}-1)} \left[(n(\sqrt{n}-1)+1) X_{(n)} - \sum_{i=1}^{n-1} X_{(i)} \right], \end{aligned}$$

а несмещённая оценка σ^2 – вид

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{\gamma_n(n-1)} \sum_{i=1}^n (X_{(n)} - X_{(i)})^2 = \frac{1}{\gamma_n(n-1)} \sum_{i=1}^{n-1} (X_{(n)} - X_{(i)})^2.$$

Решение задачи поиска закона распределения полученных оценок и построения на их основе оперативной характеристики плана контроля будет приведено в следующей статье.

Заключение. Распределение Рэлея является естественным для отклонений диаметра поверхности детали определённых конструкции и способах базирования и обработки. Для контроля партий таких деталей по количественному признаку требуется построение планов, предназначенных именно для распределения Рэлея. В настоящей статье построены планы при одном из двух неизвестном контролируемом параметре и найдены несмещённые оценки обоих неизвестных контролируемых параметров. В дальнейшем планируется найти распределения этих оценок, необходимые для построения оперативных характеристик планов контроля.

Список источников

1. Григорьев С. Н., Мастеренко Д. А., Телешевский В. И., Емельянов П. Н. Современное состояние и перспективы развития метрологического обеспечения машиностроительного производства // Измерительная техника. 2012. № 11. С. 56–59.
2. Телешевский В. И. Измерительная информатика в машиностроении // Вестник МГТУ «СТАНКИН». 2008. № 1. С. 33–38.
3. Grigoriev S. N., Miganov M. S., Shekhtman S. R., Miganov A. M., Ershov A. A., Pivkin P. M., Proc. SPIE 11914, SPIE Future Sensing Technologies, 2021, pp. 119–141. <https://doi.org/10.1117/12.2605753>
4. Григорьев С. Н., Телешевский В. И. Проблемы изменений в технологических процессах формообразования // Измерительная техника. 2011. № 7. С. 3–7
5. Григорьев С. Н., Синопальников В. А., Терешин М. В., Гурин В. Д. Контроль параметров процесса резания на основе диагностирования инструмента и заготовки // Измерительная техника. 2012. № 5. С. 46–48.
6. Grigoriev S. N., Gurin V. D., Volosova M. A., Cherkasova N. Y., Materwiss. Werksttech., 2013, no. 44, pp. 790–796. <https://doi.org/10.1002/mawe.201300068>

7. Grigoriev S. N., Martinov G. M., *Proc. CIRP*, 2014, no. 14, pp. 517–522. <https://doi.org/10.1016/j.procir.2014.03.051>

8. Grigoriev S. N., Martinov G. M., *Proc. CIRP*, 2016, vol. 41, pp. 858–863. <https://doi.org/10.1016/j.procir.2015.08.031>

9. Grigoriev S. N., Kozochkin M. P., Sabirov F. S., Kutin A. A., *Proc. CIRP*, 2012, vol. 1, pp. 599–604. <https://doi.org/10.1016/j.procir.2012.05.006>

10. Леун В. И., Николаева Е. В., Тигнибидин А. В. Тенденция развития теории и практики создания управляющих приборов для повышения точности и производительности операций шлифования деталей и инструментов в технологических процессах машиностроения, приборостроения и инструментальных производств // Динамика систем, механизмов и машин. 2012. № 2. С. 251–254.

11. Деминг У. Э. Выход из кризиса: Новая парадигма управления людьми, системами и процессами: Пер. с англ. М.: Альпина Бизнес Букс, 2007. 370 с.

12. Адлер Ю. П., Шпер В. Л. Практическое руководство по статистическому управлению процессами. М.: Альпина Паблишер, 2019. 320 с.

13. Уилер Д., Чамберс Д. Статистическое управление процессами: Оптимизация бизнеса с использованием контрольных карт Шухарта. М.: Альпина Паблишер, 2009. 310 с.

14. Лapidус В. А. Система Шухарта. Н. Новгород: Приоритет, 2004. 65 с.

15. Розно М. И. Статистический контроль качества продукции по альтернативному признаку при изменённом допуске (метод АКУД) // Надёжность и контроль качества. 1992. № 2. С. 44–52.

16. Розно М. И. Регулирование процессов на основе данных по альтернативному признаку по суженному допуску // Методы менеджмента качества. 2001. № 12. С. 27–33.

17. Григорович В. Г., Козлова Н. О., Юдин С. В. Метод оценки центра группирования размеров в условиях производства на АРП // Автоматизация технологических процессов в машиностроении. Волгоградский государственный технический университет. 1995. С. 197–202.

18. Григорович В. Г., Козлова Н. О., Юдин С. В. Информационно-статистические методы регулирования технологических процессов // Кузнечно-штамповочное производство. 2000. № 9. С. 27–29.

19. Steiner S. H., Geyer P. L., Wesolowsky G. O., *International Journal of Production Research*, 1994, vol. 32, no. 1, pp. 75–91. <https://doi.org/10.1080/00207549408956917>

20. Steiner S. H., Geyer P. L., Wesolowsky G. O., *Quality and Reliability Engineering International*, 1996, vol. 12, no. 5, pp. 345–353. [https://doi.org/10.1002/\(SICI\)1099-1638\(199609\)12:5<345::AID-QRE11>3.0.CO;2-M](https://doi.org/10.1002/(SICI)1099-1638(199609)12:5<345::AID-QRE11>3.0.CO;2-M)

21. Masterenko D. A., Metel A. S., *Mechanics & Industry*, 2017, vol. 18, no. 7, 702. <https://doi.org/10.1051/meca/2017054>

22. Орлов А. И. Прикладная статистика. М.: Экзамен, 2004. 483 с.

23. Raza S. M., Butt M. M., Siddiqi A. F., Shewhart Control Charts for Rayleigh Distribution in the Presence of Type I Censored Data, *Journal of ISOSS*, 2016, vol. 2 (2), pp. 210–217.

24. Розанов Ю. А. Теория вероятностей, случайные процессы и математическая статистика. М.: Наука, 1985. 320 с.

References

1. Grigoriev S. N., Masterenko D. A., Teleshevskii V. I., Emelyanov P. N., *Measurement Techniques*, 2013, vol. 55, no. 11, pp. 1311–1315. <https://doi.org/10.1007/s11018-013-0126-0>

2. Teleshevsky V. I., Measuring informatics in mechanical engineering, *Vestnik of MSTU “STANKIN”*, 2008, no. 1, pp. 33–38. (In Russ.)

3. Grigoriev S. N., Migranov M. S., Shekhtman S. R., Migranov A. M., Ershov A. A., Pivkin P. M., *SPIE Future Sensing Technologies*, 2021, pp. 119–141. <https://doi.org/10.1117/12.2605753>

4. Grigoriev S. N., Teleshevskii V. I., *Measurement Techniques*, 2011, vol. 54, no. 7, pp. 744–749. <https://doi.org/10.1007/s11018-011-9798-5>

5. Grigoriev S. N., Sinopalnikov V. A., Tereshin M. V., Gurin V. D., *Measurement Techniques*, 2012, vol. 55, no. 5, pp. 555–558. <https://doi.org/10.1007/s11018-012-9999-6>

6. Grigoriev S. N., Gurin V. D., Volosova M. A., Cherkasova N. Y., *Materwiss. Werksttech.*, 2013, no. 44, pp. 790–796. <https://doi.org/10.1002/mawe.201300068>

7. Grigoriev S. N., Martinov G. M., *Proc. CIRP*, 2014, no. 14, pp. 517–522. <https://doi.org/10.1016/j.procir.2014.03.051>

8. Grigoriev S. N., Martinov G. M., *Proc. CIRP*, 2016, vol. 41, pp. 858–863. <https://doi.org/10.1016/j.procir.2015.08.031>

9. Grigoriev S. N., Kozochkin M. P., Sabirov F. S., Kutin A. A., *Proc. CIRP*, 2012, vol. 1, pp. 599–604. <https://doi.org/10.1016/j.procir.2012.05.006>

10. Leun V. I., Nikolaeva E. V., Tignibidin A. V., The trend in the development of theory and practice of creating control devices to improve the accuracy and productivity of grinding operations of parts and tools in technological processes of mechanical engineering, instrumentation and tool production, *Dynamics of Systems, Mechanisms and Machines*, 2012, no. 2, pp. 251–254. (In Russ.)

11. Deming W. E., *Out of the Crisis*, MIT Press, Reprint edition (August 11, 2000), 524 p.

12. Adler Yu. P., Shper V. L., *Prakticheskoe rukovodstvo po statisticheskomu upravleniyu processami [Practical guide to statistical process management]*, Moscow, Alpina Publisher, 2019, 320 p. (In Russ.)

13. Wheeler D. J., Chambers D. S., *Understanding Statistical Process Control*, Addison-Wesley, 1990, 310 p.

14. Lapidus V. A., *Sistema Shuharta [Shewhart's System]*, N. Novgorod, Priority Publ., 2004. 65 p. (In Russ.)

15. Rozno M. I., Statisticheskij kontrol' kachestva produkci po al'ternativnomu priznaku pri izmenyonnom dopuske (metod AKUD) [Statistical quality control of products on an alternative basis with a modified tolerance (AKUD method)], *Reliability and quality control*, 1992, no. 2, pp. 44–52. (In Russ.)

16. Rozno M. I., Regulation of processes based on data on an alternative feature by a narrowed tolerance, *Methods of quality management*, 2001, no. 12, pp. 27–33. (In Russ.)

17. Grigorovich V. G., Kozlova N. O., Yudin S. V., Metod ocenki centra gruppировaniya razmerov v usloviyah proizvodstva

na ARL [Method of estimating the size grouping center in production conditions at ARL], *Avtomatizaciya tekhnologicheskikh processov v mashinostroenii*, Volgograd State Technical University, 1995, pp. 197–202. (In Russ.)

18. Grigorovich V. G., Kozlova N. O., Yudin S. V., Informacionno-statisticheskie metody regulirovaniya tekhnologicheskikh processov [Information and statistical methods of regulation of technological processes], *Forging and stamping production*, 2000, no. 9, pp. 27–29. (In Russ.)

19. Steiner S. H., Geyer P. L., Wesolowsky G. O., *International Journal of Production Research*, 1994, vol. 32, no. 1, pp. 75–91. <https://doi.org/10.1080/00207549408956917>

20. Steiner S. H., Geyer P. L., Wesolowsky G. O., *Quality and Reliability Engineering International*, 1996, vol. 12, no. 5, pp. 345–353.

[https://doi.org/10.1002/\(SICI\)1099-1638\(199609\)12:5<345::AID-QRE11>3.0.CO;2-M](https://doi.org/10.1002/(SICI)1099-1638(199609)12:5<345::AID-QRE11>3.0.CO;2-M)

21. Masterenko D. A., Metel A. S., *Mechanics & Industry*, 2017, vol. 18, no. 7, 702.

<https://doi.org/10.1051/meca/2017054>

22. Orlov A. I., *Prikladnaya statistika [Applied statistics]*, Moscow, Exam, Publ., 2004. 483 p. (In Russ.)

23. Raza S. M., Butt M. M., Siddiqi A. F., Shewhart Control Charts for Rayleigh Distribution in the Presence of Type I Censored Data, *Journal of ISOSS*, 2016, vol. 2 (2), pp. 210–217.

24. Rozanov Yu. A., *Teoriya veroyatnostej, sluchajnye processy i matematicheskaya statistika [Probability theory, random processes and mathematical statistics]*, Moscow, Nauka Publ., 1985. 320 p. (In Russ.)

Статья поступила в редакцию 25.05.2022; одобрена после рецензирования 30.05.2022; принята к публикации 31.05.2022.
The article was submitted 25.05.2022; approved after reviewing 30.05.2022; accepted for publication 31.05.2022.