

Основы идентификации пространственных распределений интенсивности лазерных пучков

Аркадий Михайлович Райцин^{1✉}, Михаил Владимирович Улановский²

¹ Московский технический университет связи и информатики, Москва, Россия, arcadiyram@rambler.ru[✉], <https://orcid.org/0000-0003-3148-4469>

² Всероссийский научно-исследовательский институт оптико-физических измерений, Москва, Россия, ulanovsky@vniiofi.ru

Аннотация. Изложены основы идентификации пространственных распределений интенсивности лазерных пучков. Указанная идентификация имеет существенное значение при сертификации лазерных источников. Задача идентификации заключается в оценке сходства распределения интенсивности излучаемого поля с заданным (расчётным) распределением. Предложена методология идентификации пространственных распределений интенсивности лазерных пучков. Для формирования мер сходства распределения интенсивности излучаемого поля с произвольно заданным распределением разработан математический аппарат, основанный на функциональных неравенствах. Рассмотрены различные меры сходства, проведено сравнение ряда пространственных распределений интенсивности с гауссовым и равномерным распределениями интенсивности в зависимости от динамического диапазона средства идентификации. Показана чувствительность мер сходства к форме распределения интенсивности излучаемого поля. Доказано, что такие известные характеристики, как абберационный фактор и коэффициент распространения лазерного пучка являются частными случаями мер, основанных на решениях функциональных неравенств.

Ключевые слова: интенсивность лазерного излучения, идентификация пространственных распределений интенсивности, мера сходства, сертификация лазерных источников, гауссово распределение, равномерное распределение, абберационный фактор, коэффициент распространения лазерного пучка

Для цитирования: Райцин А. М., Улановский М. В. Основы идентификации пространственных распределений интенсивности лазерных пучков // Измерительная техника. 2022. № 4. С. 30–36. <https://doi.org/10.32446/0368-1025it.2022-4-30-36>

Bases for identification of spatial distribution of intensity laser beams

Arkady M. Raitsin^{1✉}, Michael V. Ulanovskii²

¹ Moscow Technical University of Communications and Informatics, Moscow, Russia, arcadiyram@rambler.ru[✉], <https://orcid.org/0000-0003-3148-4469>

² All-Russian Research Institute of Optical and Physical Measurements, Moscow, Russia, ulanovsky1946@mail.ru

Abstract. The fundamentals of identification of spatial distributions of laser beam intensity are presented. This identification is essential for the certification of laser sources. The task of identification is to assess the similarity of the distribution of the intensity of the radiated field with a given (calculated) distribution. A methodology for identifying spatial distributions of laser beam intensity is proposed. To form measures of similarity of the intensity distribution of the radiated field with an arbitrarily given distribution, a mathematical apparatus based on functional inequalities has been developed. Various measures of similarity are considered, a number of spatial intensity distributions are compared with Gaussian and uniform intensity distributions depending on the dynamic range of the identification tool. The sensitivity of similarity measures to the shape of the intensity distribution of the emitted field is shown. It is proved that such well-known characteristics as the aberration factor and the propagation coefficient of the laser beam are special cases of measures based on solutions of functional inequalities.

Keywords: intensity of laser radiation, identification of spatial intensity distributions, measure of similarity, certification of laser sources, Gaussian distribution, uniform distribution, aberration factor, laser beam propagation coefficient

Введение. При сертификации лазерных источников, предназначенных для использования в различных оптико-электронных комплексах, актуальной задачей является идентификация пространственного распределения интенсивности (РИ) $I(x, y, z)$ в поперечном сечении лазерного пучка с продольной координатой z . Математическое описание пространственного распределения амплитуды или интенсивности лазерных пучков основано на расчётных решениях

уравнения квазиоптики и подтверждено на практике. Решениями уравнения являются гауссовы пучки различных порядков, при этом особую роль при применении лазеров играет низшая мода TEM_{00} . Однако в силу множества различных причин РИ излучаемого поля часто не совпадает с расчётной моделью, и при практическом использовании лазеров возникает задача оценки сходства излучаемого РИ с заданным (расчётным), т. е. задача идентификации пространственного

РИ излучения в поперечном сечении пучка. Разработчиков лазеров и систем на их основе интересует сходство РИ с распределением Гаусса, что определяется стандартизованной характеристикой – коэффициентом распространения M^2 (ISO 11146:2021 “Lasers and laser-related equipment. Test methods for laser beam widths, divergence angles and beam propagation ratios, Part 1–2”). В то же время при применении лазеров в системах дальнометрии важно, чтобы на выходной апертуре лазера было равномерное РИ [1].

Цель работы – предложить методологию идентификации пространственных РИ.

Идентификация пространственных распределений интенсивности. Излучаемое поле, создаваемое источником, определено в бесконечной области поперечного сечения лазерного пучка и имеет РИ, удовлетворяющее уравнению квазиоптики. Для пространственного РИ справедливо условие, при котором с увеличением координат в области поперечного сечения уменьшается интенсивность излучения, приближаясь к нулевому значению, т. е. $\lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty}} I(x, y, z) = 0$.

Излучаемое поле, участвующее в измерительном процессе, непосредственно не связано с измерениями и существует независимо от них, но именно оно интересует пользователя.

Создание мер и их применение для оценки сходства излучаемого поля с заданным является задачей идентификации, и её решение позволяет выработать рекомендации к необходимому изменению параметров резонатора лазера и режима его работы, что важно при сертификации лазера. Представляется целесообразным, чтобы формируемая мера принимала наибольшее значение при совпадении РИ излучаемого поля с заданным и уменьшалась в остальных случаях.

Средство идентификации располагается на расстоянии z от источника и состоит, как правило, из матричного преобразователя, измеряющего РИ, и блока обработки измерений. Так как матричный преобразователь имеет ограниченный динамический диапазон измерений интенсивности и апертуру, на его вход попадает только часть излучаемого поля, которое будем называть измеряемым $\hat{I}(x, y)$. Это поле после преобразования излучения средством идентификации в электрические сигналы преобразуется в измеренное, поступающее в блок обработки измерений, где производится сравнение измеренного поля с заданным по формируемой мере сходства μ . Сходство оценивается по результатам измерений РИ – совокупности отсчётов в виде двумерных массивов $\hat{I}(i, j)$, $i=1, 2, \dots, m$, $j=1, 2, \dots, n$, размером $m \times n$, соответствующих фиксированному значению координаты z . Решение о степени сходства излучаемого поля с заданным принимается на основании сравнения измеренного поля с заданным, поэтому при малой погрешности средства идентификации приближённо можно считать, что измеренное и измеряемое поле совпадают.

На практике интерес для идентификации представляет область РИ излучения в сечении пучка, содержащая основную часть энергии. Для идентификации такого РИ необходимо измеряемое поле «приблизить» к излучаемому, т. е. динамический диапазон и размеры входной апертуры матричного преобразователя должны быть энергетически и пространственно

согласованы с параметрами излучаемого поля. Идентификация при этом более достоверна, так как измеряемое поле содержит более полную информацию об излучаемом поле.

Известной и единственной стандартизованной характеристикой идентификации в настоящее время является коэффициент распространения M^2 , определяющий меру сходства РИ излучаемого поля с гауссовым распределением. По мнению авторов настоящей статьи, такая характеристика не может быть исчерпывающей, так как не существует взаимно-однозначного соответствия между РИ и коэффициентом распространения: одному и тому же параметру M^2 могут соответствовать различные РИ. В связи с этим для более надёжной идентификации необходимо разрабатывать альтернативные меры сходства.

В литературе [2–4] по измерению пространственно-энергетических характеристик лазерного пучка основное внимание уделяется традиционным характеристикам – ширине пучка, углу расходимости, координатам центроида. Литературы по системному изложению основ идентификации пространственных РИ лазерных пучков очень мало.

Методология идентификации пространственных распределений интенсивности. Как указано выше, одной из задач идентификации является формирование мер, определяющих степень сходства РИ $I(x, y)$ излучаемого поля с заданным распределением $\psi(x, y)$. Для решения задач идентификации применяют следующие методы:

классические методы решения вариационных задач, определяющие степень сходства излучаемого РИ с гауссовым или равномерным распределением [5–7];

кумулянтный метод решения, используемый в теории вероятностей и применяемый для идентификации закона распределения [8].

Рассмотрим меры идентификации, основанные на функциональных неравенствах, в частности, интегральных неравенствах Коши-Буняковского [9]. Пусть идентифицируемая функция излучаемого поля $f(x, y)$ (например, распределение амплитуды или интенсивности) и функция $\psi(x, y)$ определены в фиксированном поперечном сечении лазерного пучка z , интегрируемые по координатам x, y соответственно. В общем случае упомянутые выше функции могут быть комплексными. Тогда справедливо интегральное неравенство Коши-Буняковского

$$\left| \iint_G f(x, y) \psi(x, y) dx dy \right|^2 \leq \iint_G |f^2(x, y)| dx dy \iint_G |\psi^2(x, y)| dx dy. \quad (1)$$

Ограниченная область интегрирования G в (1) обусловлена конечностью апертуры и динамическим диапазоном матричного преобразователя. Из неравенства (1) следует первая мера сходства μ_1 идентифицируемой функции с произвольно заданной функцией:

$$\mu_1 = \frac{\left| \iint_G f(x, y) \psi(x, y) dx dy \right|^2}{\iint_G |f^2(x, y)| dx dy \iint_G |\psi^2(x, y)| dx dy} \leq 1. \quad (2)$$

Мера сходства (2) находится в интервале $0 \leq \mu_1 \leq 1$, а равенство $\mu_1 = 1$ достигается в случае

$$f(x, y) = \lambda \psi(x, y), \quad (3)$$

где λ – числовая константа.

Для практического определения представленной меры идентификации РИ в блоке обработки измерений средства идентификации в соответствии с формулой (2) производится численное интегрирование функций, содержащих измеренное РИ $\hat{I}(i, j)$, $i = 1, 2, \dots, m$, $j = 1, 2, \dots, n$ и заданное РИ, представленное в виде отсчетов двумерного массива.

Недостатком такой методологии является ограниченность области G заданного поля. Больше информации можно получить

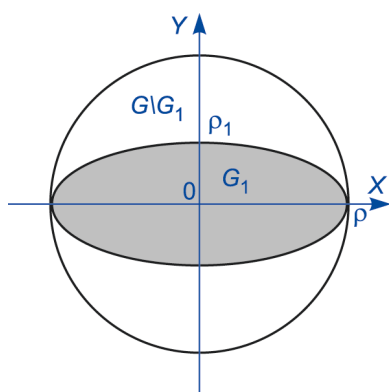


Рис. 1. Область измеряемого поля

Fig. 1. Area of the measured field

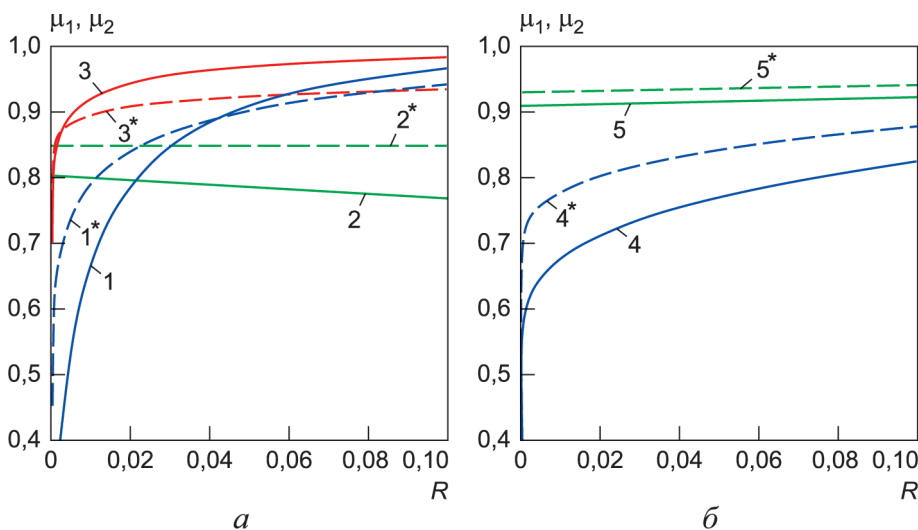


Рис. 2. Зависимости мер сходства μ_1 (1–5), μ_2 (1*–5*) распределения интенсивности излучаемого поля от нижней границы R динамического диапазона матричного преобразователя для распределений:

a – Коши (1, 1*), гаусс-эллиптического при заданном параметре эллиптичности $\gamma = 0,5$ (2, 2*), экспоненциального (3, 3*); b – супергауссового (4, 4*), (5, 5*), кривые 4, 5 и 4*, 5* построены при $N = 6$ и 8 соответственно

Fig. 2. Dependences of similarity measures μ_1 (1–5), μ_2 (1*–5*) of the intensity distribution of the radiated field on the lower boundary R of the dynamic range of the matrix converter for distributions:

a – Cauchy (1, 1*), Gaussian-elliptic for a given ellipticity parameter $\gamma = 0,5$ (2, 2*), exponential (3, 3*); b – super-Gaussian (4, 4*), (5, 5*); curves 4, 5 and 4*, 5* are plotted for $N = 6$ and 8, respectively

при сравнении с полем, заданным на всей плоскости поперечного сечения пучка. Такое сравнение возможно при использовании мер, основанных на классических методах решения вариационных задач [5–7].

Для идентификации стигматических пучков удобно неравенство (2) записать в полярных координатах r, φ :

$$\mu_1 = \frac{\left| \iint_G r f(r, \varphi) \psi(r, \varphi) dr d\varphi \right|^2}{\iint_G r |f^2(r, \varphi)| dr d\varphi \iint_G r |\psi^2(r, \varphi)| dr d\varphi} \leq 1. \quad (4)$$

Рассмотрим меры идентификации для различных РИ излучаемого поля и заданных функций $\psi(x, y)$.

Первые меры сходства различных РИ излучаемого поля с заданным РИ Гаусса.

Относительное РИ измеряемого поля. Будем считать, что измеряемое относительное РИ, определённое в области круга G апертуры матричного преобразователя, имеет вид

$$\frac{\tilde{I}(x, y)}{\tilde{I}_{\max}} = \begin{cases} I(x, y)/I_{\max}, & \text{если } I(x, y)/I_{\max} \geq R \text{ (область } G_1) \\ 0, & \text{если } I(x, y)/I_{\max} < R \text{ (область } G \setminus G_1) \end{cases}, \quad (5)$$

где R – нижняя граница измерений относительного РИ; $\tilde{I}_{\max}$ – наибольшее значение РИ измеряемого поля; $G \setminus G_1$ – область, соответствующая разности областей G и G_1 (рис. 1).

Согласно формуле (5) справедливо неравенство $R \leq I(x, y)/I_{\max} \leq 1$, и динамический диапазон измерений матричного преобразователя выражается как $D = -\lg R$.

Определим первую меру $\mu_{1Г}$ сходства РИ такого поля с РИ Гаусса $\psi(x, y) = R^{(x^2+y^2)/\rho^2}$, заданным в области круга G , принимающим значение R на его границе (окружность радиусом ρ). Выражение (2) примет вид

$$\mu_{1Г} = \frac{2 \ln R \left| \iint_{G_1} I(x, y) R^{(x^2+y^2)/\rho^2} dx dy \right|^2}{\pi \rho^2 (R^2 - 1) \iint_{G_1} I^2(x, y) dx dy} \leq 1. \quad (6)$$

Фактически, мера (6) выражает сходство измеряемого поля с заданным. Для того, чтобы эта мера выражала сходство излучаемого поля $I(x, y)$ с заданным, излучаемое РИ должно полностью находиться в области G_1 , что практически невыполнимо, но с большой степенью приближения достигается при увеличении динамического диапазона матричного преобразователя или уменьшении нижней границы R . Приведём пример, подтверждающий это утверждение.

РИ типа Коши излучаемого поля.

Рассмотрим излучаемое поле с РИ типа Коши, которое характеризуется слабо

спадающими «крыльями» и принимающее значение R на окружности G радиусом ρ :

$$I(x, y) = \frac{1}{1+b(x^2+y^2)/\rho^2} \Rightarrow I(r) = \frac{1}{1+br^2/\rho^2}, \quad (7)$$

где $b=(1-R)/R$.

Для того, чтобы измеряемое поле было близким к излучаемому, необходимо, чтобы интегралы, входящие в (6) и вычисляемые по области G_1 (в данном случае $G_1=G$), мало отличались от интегралов, вычисленных по бесконечной области xOy . Особенно это существенно для интеграла знаменателя, в отличие от числителя не имеющего экспоненциально убывающего множителя. Тогда интегралы знаменателя (6), вычисленные по ограниченной области G_1 и по бесконечной области xOy имеют вид соответственно

$$J_1 = \iint_{G_1} I^2(x, y) dx dy = \iint_G r I^2(r) dr d\varphi = 2\pi \int_0^\rho \frac{r dr}{(1+br^2/\rho^2)^2} = \pi \rho^2 R;$$

$$J_2 = \iint_{(xOy)} r I^2(r) dr d\varphi = 2\pi \int_0^\infty \frac{r dr}{(1+br^2/\rho^2)^2} = \frac{\pi \rho^2 R}{1-R}.$$

Относительная погрешность δ вычисления J_1 за счёт ограничения промежутка интегрирования точно равна $R \Rightarrow \delta = (J_2 - J_1)/J_2 = R$, т. е с уменьшением R мера измеряемого РИ приближается к мере излучаемого РИ. После преобразований интегралов формулу (6) для меры сходства РИ типа Коши и Гаусса можно записать в виде

$$\mu_{1\Gamma}^K(R) = \frac{8R \ln R}{(R^2 - 1)} \left(\int_0^1 \frac{r R^{r^2} dr}{R + (1-R)r^2} \right)^2.$$

На рис. 2, а представлена зависимость $\mu_{1\Gamma}^K(R)$ (кривая 1), диапазон изменения меры составляет от нуля до единицы.

Гаусс-эллиптическое РИ излучаемого поля. Рассмотрим излучаемое поле, имеющее гаусс-эллиптическое РИ, его главные оси ориентированы по координатным осям x, y [6]. РИ измеряется в эллиптической области G_1 , принимает значение R на эллипсе $x^2/\rho^2 + y^2/\rho_1^2 = 1$, ограничивающем эту область, и равно нулю за её пределами в области $G \setminus G_1$ ($(\rho \geq \rho_1)$) (см. рис. 1):

$$I(x, y) = R^{x^2/\rho^2 + y^2/\rho_1^2}. \quad (8)$$

Первую меру сходства Гаусс-эллиптического РИ с заданным РИ Гаусса после вычислений интегралов в формуле (6) определим как

$$\mu_{1\Gamma}^{\Gamma\Delta}(R) = \frac{4\gamma \ln^2 R}{(R^2 - 1)^2} \left\{ \int_0^1 R^{(3+\gamma^2)x/2} I_0[x(1-\gamma^2) \ln R/2] dx \right\}^2, \quad (9)$$

где $I_0(x)$ – модифицированная функция Бесселя нулевого порядка; $\gamma = \rho_1/\rho$ – параметр эллиптичности.

В предельных случаях динамического диапазона матричного преобразователя – большом ($R \approx 0$) и малом ($R \approx 1$) диапазонах меры сходства равны соответственно

$$\mu_{1\Gamma}^{\Gamma\Delta}(0) = 2\gamma/(1+\gamma^2); \quad \mu_{1\Gamma}^{\Gamma\Delta}(1) = \gamma.$$

Зависимость $\mu_{1\Gamma}^{\Gamma\Delta}(R)$ также показана на рис 2, а (кривая 2) при заданном параметре эллиптичности $\gamma=0,5$, диапазон изменения меры составляет от $\mu_{1\Gamma}^{\Gamma\Delta}(1)$ до $\mu_{1\Gamma}^{\Gamma\Delta}(0)$.

Экспоненциальное РИ излучаемого поля. Рассмотрим излучаемое поле с экспоненциальным РИ

$$I(r, z) = R^{r/\rho}. \quad (10)$$

РИ принимает значение R на окружности радиуса ρ области G_1 . В этом случае $G_1=G$, и выражение (6) запишем в виде

$$\mu_{1\Gamma}^{\Delta}(R) = \frac{\ln R \left[2^4 \sqrt{R(R^2-1)} + \sqrt{-\pi \ln R} \left(\operatorname{erf} \frac{\sqrt{-\ln R}}{2} - \operatorname{erf} \frac{3\sqrt{-\ln R}}{2} \right) \right]^2}{\sqrt{R(R^2-1)} (2R^2 \ln R - R^2 + 1)},$$

где $\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-x^2} dx$ – функция ошибок.

Зависимость $\mu_{1\Gamma}^{\Delta}(R)$ также показана на рис 2, а (кривая 3), диапазон изменения меры составляет от нуля до единицы.

Первая мера сходства супергауссова РИ излучаемого поля с заданным равномерным РИ. Рассмотрим излучаемое поле с супергауссовым РИ, принимающим значение R на границе окружности G_1 радиусом ρ :

$$I(r) = R^{(r/\rho)^N}. \quad (11)$$

Такое РИ при увеличении показателя степени N характеризуется более плоской вершиной и крутым спадом интенсивности на краях пучка. На практике равномерное РИ прямоугольной формы формируется оптическими методами из супергауссовой функции [10].

При формировании такого пучка полезно знать меру его сходства с равномерным РИ $\psi(x, y) = C$, заданным в области G . Тогда $G_1=G$ и выражение (4) примет вид

$$\mu_{1\Gamma}^{CG}(R) = \frac{2 \left| \int_0^1 r R^{r^N} dr \right|^2}{\int_0^1 r R^{2r^N} dr} \leq 1.$$

При малых значениях R мера сходства определяется как

$$\mu_{1\Gamma}^{CG}(R) \approx 2(-2/\ln R)^{2/N} \Gamma(2/N) N^{-1},$$

где $\Gamma(x)$ – гамма-функция.

На рис 2, б представлены зависимости $\mu_{1\Gamma}^{CG}(R)$ при $N=6$ и 8 (кривые 4, 5 соответственно), диапазон изменения данной меры составляет от нуля до единицы.

Первая мера сходства распределения амплитуды излучаемого поля с заданным равномерным распределением

амплитуды. Аберрационный фактор. Пусть $f(x, y) = u(x, y)$ – распределение амплитуды поля на выходной апертуре лазера ($z=0$), при этом заданная функция распределения амплитуды принимает постоянное значение $\psi(x, y) = C$. Функции определены в области G апертуры излучателя. В этом случае неравенство (2) запишем в виде

$$\mu_{1p} = \frac{\left| \iint_G u(x, y) dx dy \right|^2}{S^* \iint_G |u(x, y)|^2 dx dy} \leq 1, \quad (12)$$

где S^* – площадь выходной апертуры лазера.

В соответствии с формулой (3) мера (12) принимает наибольшее значение $\mu_{1p} = 1$ только при постоянном распределении комплексной амплитуды $u(x, y) = C$.

В работе [1] мера (12), полученная из уравнения квазиоптики, называется аберрационным фактором. Числитель (12) рассматривается как интенсивность излучения вдоль осевого направления, умноженная на квадрат длины волны, а знаменатель – как мощность излучения по выходному сечению источника. Утверждается, что из всех возможных излучателей с одинаковыми мощностями и площадями выходных сечений наибольшей осевой силой света обладает излучатель с равномерным РИ с постоянной фазой. Тот же результат следует из решения функционального неравенства (12).

Вторые меры сходства РИ излучаемого поля с заданными РИ. Запишем следствие из неравенства (1) в виде

$$\left| \iint_G f(x, y) \psi(x, y) \eta(x, y) dx dy \right|^2 \leq \iint_G |f(x, y)|^2 \eta^2(x, y) dx dy \iint_G |\psi(x, y)|^2 dx dy, \quad (13)$$

где $\eta(x, y)$ – произвольно заданная функция, интегрируемая в области G .

Из неравенства (13) получим вторую меру сходства РИ излучаемого поля с заданным

$$\mu_2 = \frac{\left| \iint_G f(x, y) \psi(x, y) \eta(x, y) dx dy \right|^2}{\iint_G |f(x, y)|^2 \eta^2(x, y) dx dy \iint_G |\psi(x, y)|^2 dx dy} \leq 1. \quad (14)$$

Равенство $\mu_2 = 1$ выполняется только в случае, когда

$$\psi(x, y) = \lambda \eta(x, y), \quad (15)$$

где λ – числовой множитель.

Заданное РИ Гаусса. Определим функции $f(x, y) = I(x, y)$; $\psi(x, y) = \ln I(x, y)$; $\eta(x, y) = -(x^2 + y^2) \rho^{-2}$. Из (14) получим меру сходства с РИ Гаусса

$$\mu_{2G} = \frac{\left(\iint_G I(x, y) \ln I(x, y) (x^2 + y^2) dx dy \right)^2}{\iint_G I(x, y) \ln^2 I(x, y) dx dy \iint_G I(x, y) (x^2 + y^2)^2 dx dy} \leq 1. \quad (16)$$

Условие (15) приводит к выражению

$$\ln I(x, y) = -(x^2 + y^2) / \rho^2 \Rightarrow I(x, y) = e^{-(x^2 + y^2) / \rho^2},$$

из которого следует, что $\mu_{2G} = 1$ при гауссовом РИ.

В отличие от меры (2) в формировании меры (16) участвует только РИ излучаемого поля $I(x, y)$. В полярной системе координат (16) имеет вид

$$\mu_{2G} = \frac{\left(\iint_G r^3 I(r, \varphi) \ln I(r, \varphi) dr d\varphi \right)^2}{\iint_G r I(r, \varphi) \ln^2 I(r, \varphi) dr d\varphi \iint_G I(r, \varphi) r^5 dr d\varphi} \leq 1.$$

Результаты вычислений второй меры сходства $\mu_{2G}(R)$ для РИ (7), (8), (10) с заданным РИ Гаусса представлены на рис. 2, а. Диапазоны изменения второй меры для РИ (7), (8), (10) составляют 0–1; 2/3–1; 0,80–0,96 соответственно.

Заданное равномерное РИ. Определим функции $f(x, y) = I(x, y)$; $\psi(x, y) = I(x, y)$; $\eta(x, y) = C$ и запишем (14) как

$$\mu_{2p} = \frac{\left(\iint_G r I^2(r, \varphi) dr d\varphi \right)^2}{\iint_G r I^3(r, \varphi) dr d\varphi \iint_G r I(r, \varphi) dr d\varphi} \leq 1. \quad (17)$$

Равенство (15) выполняется в случае, когда $I(r, \varphi) = C$, т. е. $\mu_{2p} = 1$ при равномерном РИ.

Вторая мера сходства супергауссова РИ излучаемого поля с заданным равномерным РИ. Для излучаемого поля (11) формула (17) имеет вид

$$\mu_{2p}^{CG} = \left(\int_0^1 r R^{2r^N} dr \right)^2 \left(\int_0^1 r R^{3r^N} dr \int_0^1 r R^{r^N} dr \right)^{-1}.$$

На рис. 2, б представлены зависимости этой меры при $N=6$ и 8 (кривые 4* и 5* соответственно). Диапазон изменения меры составляет $(3/4)^{2/N} - 1$.

Коэффициент распространения лазерного пучка как частный случай решения функционального неравенства. Обычно в литературе (например, в [11]) связывают наименьшие коэффициент распространения и дифракционную расходимость пучка с гауссовым РИ. Покажем, что данный факт можно подтвердить, используя не физические характеристики оптических пучков, а рассматривая решение соответствующего функционального неравенства.

Рассмотрим выражение (14) и поставим задачу найти ещё одну меру μ_{3G} , $\mu_{3\gamma}$ сходства с РИ Гаусса, приводящую её к коэффициенту распространения – параметру M^2 . Найдём РИ, измеряемое в области G_1 и удовлетворяющее условию (5). В выражении (14) определим функции

$$f(x, y) = |u(x, y)|^2;$$

$$\psi_x(x, y) = [\partial |u(x, y)| / \partial x] / |u(x, y)|; \quad \eta_x(x, y) = -2x / \rho^2;$$

$$\psi_y(x, y) = [\partial|u(x, y)|/\partial y]/|u(x, y)|; \quad \eta_y(x, y) = -2y/\rho^2.$$

Запишем (14) в виде двух неравенств

$$\mu_{3ГХ} = \frac{\left| \iint_{G_1} x|u(x, y)|(\partial|u(x, y)|/\partial x) dx dy \right|}{\sqrt{\iint_{G_1} (\partial|u(x, y)|/\partial x)^2 dx dy} \sqrt{\iint_{G_1} x^2 |u(x, y)|^2 dx dy}} \leq 1; \quad (18)$$

$$\mu_{3ГУ} = \frac{\left| \iint_{G_1} y|u(x, y)|(\partial|u(x, y)|/\partial y) dx dy \right|}{\sqrt{\iint_{G_1} (\partial|u(x, y)|/\partial y)^2 dx dy} \sqrt{\iint_{G_1} y^2 |u(x, y)|^2 dx dy}} \leq 1. \quad (19)$$

Условие (15) приводит к системе дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \frac{\partial|u(x, y)|/\partial x}{|u(x, y)|} = -2x/\rho^2; \\ \frac{\partial|u(x, y)|/\partial y}{|u(x, y)|} = -2y/\rho^2, \end{cases}$$

решение которой – функция Гаусса

$$u(x, y) = u_{\max} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{\rho^2}\right) \Rightarrow \\ \Rightarrow |u(x, y)|^2 = I(x, y) = I_{\max} \exp\left(-\frac{2x^2 + 2y^2}{\rho^2}\right).$$

Проинтегрировав числитель неравенства (18) по частям, после преобразований получим

$$\left| \iint_{G_1} x|u(x, y)|(\partial|u(x, y)|/\partial x) dx dy \right| = (\tilde{\sigma}_{00}^2 - I_{\max} RS)/2,$$

где $\tilde{\sigma}_{00}^2 = \iint_{G_1} I(x, y) dx dy$; S – площадь области G_1 .

Аналогичное выражение получим для числителя неравенства (19). Меры сходства с РИ Гаусса для удобства запишем в виде функций $\phi_{3ГХ} = \mu_{3ГХ}^{-1}$ и $\phi_{3ГУ} = \mu_{3ГУ}^{-1}$:

$$\phi_{3ГХ} = \frac{2 \sqrt{\iint_G (\partial|u(x, y)|/\partial x)^2 dx dy} \sqrt{\iint_G x^2 I(x, y) dx dy}}{\tilde{\sigma}_{00}^2 - I_{\max} RS} \geq 1, \quad (20)$$

а мера $\phi_{3ГУ}$ имеет вид (20), где производная в первом интеграле вычисляется по переменной y , подынтегральное выражение во втором интеграле вместо переменной x^2 содержит y^2 .

Рассмотрим частный случай $\phi_{3ГХ}, \phi_{3ГУ}$ в плоскости источника излучения, т. е. при $z=0$. Если полученные меры отнести к характеристикам излучаемого поля, тогда $R=0$,

пределы интегрирования бесконечны и справедливы соотношения

$$\phi_{3ГХ} = 2 \sqrt{\iint_{-\infty-\infty}^{\infty} \left(\frac{x}{\sigma_{00}}\right)^2 I(x, y) dx dy} \times \\ \times \sqrt{\iint_{-\infty-\infty}^{\infty} \left(\frac{\partial|u(x, y)|/\partial x}{\sigma_{00}}\right)^2 dx dy} \geq 1; \quad (21)$$

$$\phi_{3ГУ} = 2 \sqrt{\iint_{-\infty-\infty}^{\infty} \left(\frac{y}{\sigma_{00}}\right)^2 I(x, y) dx dy} \times \\ \times \sqrt{\iint_{-\infty-\infty}^{\infty} \left(\frac{\partial|u(x, y)|/\partial y}{\sigma_{00}}\right)^2 dx dy} \geq 1; \quad (22)$$

где $\sigma_{00}^2 = \iint_{-\infty-\infty}^{\infty} I(x, y) dx dy$.

Выражения (21), (22) полностью совпадают с коэффициентами M^2 распространения лазерного пучка [11]. Наименьшее (единица) значение $\phi_{3ГХ}, \phi_{3ГУ}$ достигается для функции Гаусса, для всех других РИ $M_{ГХ}^2 = \phi_{3ГХ} > 1, M_{ГУ}^2 = \phi_{3ГУ} > 1$.

Заключение. Из сравнения результатов мер сходства, представленных на рис. 2, а, б, следует, что предложенные меры (2), (14) чувствительны к форме распределения интенсивности, определяют степень сходства распределения интенсивности излучаемого поля с заданным распределением и представляют альтернативу стандартизованному коэффициенту распространения лазерного пучка. При этом первая мера в целом характеризуется большим диапазоном изменения, что является её преимуществом.

При практической реализации рассмотренных мер с целью увеличения информативности идентификации представляется целесообразным применять их в совокупности с характеристикой M^2 .

В дальнейших исследованиях следует оценить устойчивость предложенных мер к погрешностям измерений.

Список источников

1. Ананьев Ю. А. Оптические резонаторы и лазерные пучки. М.: Наука, 1990. 264 с.
2. Мацак И. С., Кудрявцев Е. М., Тугаенко В. Ю. Моделирование погрешностей измерений диаметра широкоапертурного лазерного пучка с плоским профилем // Компьютерные исследования и моделирование. 2015. Т. 7. № 1. С. 113–124. <https://doi.org/10.20537/2076-7633-2015-7-1-113-124>
3. Мацак И. С., Тугаенко В. Ю., Сергеев Е. С. Метод измерения диаметра широкоапертурного пучка лазерного излучения // Метрология. 2014. № 4. С. 13–24.
4. Ji-chuan Xing, Yan Song, *Proceedings of SPIE – The International Society for Optical Engineering*, 2012, 8417. <https://doi.org/10.1117/12.976829>
5. Райцин А. М., Улановский М. В. Применение логарифмического момента распределения интенсивности в качестве альтернативы коэффициенту распространения лазерного пучка // Измерительная техника. 2015. № 6. С. 30–32.

6. Каспаров В. М., Райцин А. М., Улановский М. В. Методы идентификации пространственных распределений интенсивности лазерных пучков // Измерительная техника. 2017. № 2. С. 36–40.

7. Райцин А. М. Новая интегральная характеристика степени отличия пространственного распределения лазерного пучка от распределения Гаусса // Измерительная техника. 2011. № 2. С. 36–40.

8. Безуглов Д. А., Швидченко С. А. Кумулянтный метод определения закона распределения // H&ES Research – Научно-технические технологии в космических исследованиях Земли. 2011. № 1. С. 11–14.

9. Цыпкин Я. З. Информационная теория идентификации М.: Наука Физматлит, 1995. 336 с.

10. Гуламов А. А. Формирование супергауссовых пучков // Учёные записки. Электронный научный журнал Курского Государственного университета. 2006. № 1. С. 59–70.

11. Потёмкин А. К., Хазанов Е. А. Вычисление параметра M^2 лазерных пучков методом моментов // Квантовая электроника. 2005. Т. 35. № 11. С. 1042–1044.

References

1. Anan'ev Yu. A., *Opticheskie rezonatory i lazernye puchki*, Moscow, Nauka Publ., 1990, 264 p. (In Russ.)

2. Matsak I. S., Kudryavtsev E. M., Tugaenko V. Yu., Modelling diameter measurement errors of a wide-aperture laser beam with flat

profile, *Computer Research and Modeling*, 2015, vol. 7, no. 1, pp. 113–124. (In Russ.) <https://doi.org/10.20537/2076-7633-2015-7-1-113-124>

3. Matsak I. S., Tugaenko V. Yu., Sergeev E. S., *Measurement Techniques*, 2014, vol. 57, no. 6, pp. 651–657. <https://doi.org/10.1007/s11018-014-0514-0>

4. Ji-chuan Xing, Yan Song, *Proceedings of SPIE – The International Society for Optical Engineering*, 2012, 8417. <https://doi.org/10.1117/12.976829>

5. Raitsin A. M., Ulanovskii M. V., *Measurement Techniques*, 2015, vol. 58, no. 6, pp. 630–633. <https://doi.org/10.1007/s11018-015-0766-3>

6. Kasparov V. M., Raitsin A. M., Ulanovskii M. V., *Measurement Techniques*, 2017, vol. 59, no. 10, pp. 1078–1083. <https://doi.org/10.1007/s11018-017-1095-5>

7. Raitsin A. M., *Measurement Techniques*, 2011, vol. 54, no. 2, pp. 162–169. <https://doi.org/10.1007/s11018-011-9700-5>

8. Bezuglov D. A., Shvidchenko S. A., Kumulyantnyi metod opredeleniya zakona raspredeleniya, *H&ES Research – Naukoemkie tekhnologii v kosmicheskikh issledovaniyakh Zemli*, 2011, no. 1, pp. 11–14. (In Russ.)

9. Tsypkin Ya. Z., *Informatsionnaya teoriya identifikatsii*, Moscow, Nauka Fizmatlit Publ., 1995, 336 p. (In Russ.)

10. Gulamov A. A., Formirovanie supergaussovyykh puchkov, *Uchenye zapiski, Ehlektronnyi nauchnyi zhurnal Kurskogo Gosudarstvennogo universiteta*, 2006, no. 1, pp. 59–70. (In Russ.)

11. Potemkin A. K. et al., *Quantum Electronics*, 2005, no. 35 (11), 1042. <http://dx.doi.org/10.1070/QE2005v035n11ABEH012788>

Статья поступила в редакцию 20.01.2022; одобрена после рецензирования 02.03.2022; принята к публикации 04.03.2022.
The article was submitted 20.01.2022; approved after reviewing 02.03.2022; accepted for publication 04.03.2022.