

Научная статья

УДК 519.2:53.08

<https://doi.org/10.32446/0368-1025it.2022-4-23-29>

Многошаговый алгоритм построения статистических оценок на основе байесовского подхода в измерительных задачах

Рустам Зиннатуллович Хайруллин^{1, 2}

¹ Национальный исследовательский университет «Московский государственный строительный университет», Москва, Россия, zrkzrk@list.ru, <https://orcid.org/0000-0002-0596-4955>

² Главный научный метрологический центр МО РФ, Мытищи, Московская обл., Россия

Аннотация. Разработан многошаговый алгоритм на основе байесовского подхода к построению эффективных статистических оценок результатов измерений. Представлена общая логическая схема многошагового алгоритма, позволяющая строить обобщённые байесовские оценки с использованием смеси априорного и апостериорного распределений при неоднородности априорных и апостериорных данных. Сформулированы условия существования сопряжённого семейства априорных распределений. Описана методика расчёта конкретных значений параметров сопряжённых априорных распределений. Подробно изложен байесовский подход применительно к биномиальному и отрицательно-биномиальному законам распределения. С использованием функции правдоподобия получены формулы пересчёта параметров соответствующего сопряжённого закона распределения, необходимые для пошаговых переходов в многошаговом алгоритме. Приведены примеры применения алгоритма для оценки соответствия измерительных систем заданным требованиям, а также для обработки результатов количественного физико-химического анализа. Представленные результаты показывают, что байесовский подход даёт существенный выигрыш по сравнению с методом максимального правдоподобия в точности построения статистических оценок при небольших и средних объёмах выборок. Указанное обстоятельство делает байесовский подход особенно эффективным для оценки метрологических характеристик измерительных систем в случае, когда многократное повторение испытаний нецелесообразно или трудоёмко. На конкретных примерах проиллюстрировано, что при увеличении объёма и количества выборок результаты многошагового байесовского подхода и классического метода максимального правдоподобия будут идентичными.

Ключевые слова: достоверность результатов измерений, байесовский подход, апостериорная информация, статистические оценки, метод максимального правдоподобия, многошаговый алгоритм

Для цитирования: Хайруллин Р. З. Многошаговый алгоритм построения статистических оценок на основе байесовского подхода в измерительных задачах // Измерительная техника. 2022. № 4. С. 23–29. <https://doi.org/10.32446/0368-1025it.2022-4-23-29>

Multi-step algorithm for constructing statistical estimates based on the Bayesian approach in measuring tasks

Rustam Z. Khayrullin^{1, 2}

¹ Moscow State University of Civil Engineering (National Research University), Moscow, Russia, zrkzrk@list.ru, <https://orcid.org/0000-0002-0596-4955>

² Main Scientific Metrological Centre, Mytischy, Moscow region, Russia

Abstract. A multi-step algorithm based on the Bayesian approach to constructing effective statistical estimates of measurement results has been developed. A general logical scheme of a multi-step algorithm is presented, which allows, in the case of heterogeneity of a priori and a posteriori data, to build generalized Bayesian estimates based on the use of a mixture of a priori and a posteriori distributions. Conditions for the existence of a conjugate family of a priori distributions are formulated. A technique for calculating specific values of parameters in conjugate a priori distributions is described. The technology for applying the Bayesian approach is described in more detail for the binomial and negative-binomial distribution laws. Using the likelihood function, formulas for recalculating the parameters of the corresponding conjugate distribution law are obtained, which allow one to pass from the next step to the next step of the multi-step algorithm. Examples of applying the algorithm to the problem of assessing the compliance of measuring systems with specified requirements, as well as to the problem of processing the results of quantitative physical and chemical analysis are given. The presented results show that the Bayesian approach gives a significant gain in the accuracy of constructing statistical estimates for small and medium sample sizes. This circumstance makes the Bayesian approach particularly effective in the problems of assessing the metrological characteristics of measuring systems in the case when repeated repetition of tests is inexpedient or time consuming. On specific examples, it is illustrated that with an increase in the volume and number of samples, the multi-step Bayesian approach and the classical maximum likelihood method will give identical results.

Keywords: reliability of measurement results, Bayesian approach, a posteriori information, statistical estimates, maximum likelihood method, multi-step algorithm

Введение. Проблема построения эффективных статистических оценок является актуальной для многих областей деятельности [1–6]. Одним из эффективных направлений построения доверительных интервалов и доверительных областей является байесовский подход (БП) [7–16]. БП широко распространён при обработке результатов измерений, решении измерительных задач [17–21], приёмо-сдаточных испытаниях готовой продукции и товаров, количественном физико-химическом анализе [22]. В работах [17–20] описан БП применительно к нормальному, равномерному и экспоненциальному законам распределения, а также к законам Парето и Пуассона. В [21] БП используется для построения статистических оценок коэффициентов уравнении множественной линейной регрессии.

Цель настоящей работы – обобщив результаты [17–20], разработать алгоритм последовательного применения БП

к построению последовательности оценок параметров случайных величин и их доверительных интервалов (многошаговый алгоритм БП), а также выполнить сравнительный анализ размахов доверительных интервалов БП и метода максимального правдоподобия (ММП). Использование многошагового алгоритма позволит повысить достоверность измерений указанной последовательности оценок.

Логическая схема многошагового применения байесовского подхода. Разработка многошагового алгоритма.

Пусть закон распределения некоторой случайной величины зависит от s -мерного вектора параметров $\Theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_s)$. Компонентами такого вектора могут быть, например, среднее значение случайной величины, среднее квадратическое отклонение (СКО), интенсивность потока, вероятность случайного события и т. д. Требуется построить наиболее эффективную статистическую оценку $\hat{\Theta}$ этого вектора параметров по имеющейся априорной информации и дополнительной апостериорной информации, представляющей собой вектор наблюдений

$$\mathbf{X} = (x_1, x_2, \dots, x_n). \quad (1)$$

Количество выполняемых шагов определяется дополнительной апостериорной информацией, появляющейся в процессе испытаний, а также возможностью и целесообразностью использования этой информации. Каждый шаг состоит из нескольких этапов, позволяющих построить статистические оценки средних значений исследуемых параметров и доверительные интервалы для этих параметров. Логическая схема многошагового алгоритма представлена на рис. 1. Входные данные алгоритма – априорные сведения и дополнительные статистические данные (апостериорные данные). Опишем основные этапы, выполняемые на каждом шаге алгоритма.

1. По данным анализа функционирования исследуемого объекта или на основе технической документации задаются априорные сведения о векторе параметров Θ . Априорные сведения могут быть в виде функции плотности распределения $p(\Theta)$ или статистических характеристик, например, среднего значения, СКО, интенсивности потока, вероятности случайного события и т. д.

2. Проверяется, существуют ли дополнительные статистические данные. Если дополнительных данных нет, то процесс статистического оценивания завершается, и в качестве характеристик объекта принимаются априорные данные. В противном случае предполагается, что дополнительные апостериорные данные (1) сформированы в соответствии с законом распределения вероятностей $f(\mathbf{X}|\Theta)$ и наблюдения $\mathbf{X}$ при фиксированном Θ являются независимыми. Переходят к следующему шагу.

3. Проверка однородности априорной информации и дополнительных статистических данных (с использованием критерия однородности Стьюдента). В случае однородности переходят к шагу 5, в случае неоднородности – к шагу 4.

4. Формируется смесь априорного и апостериорного распределений [22] в таких пропорциях, чтобы обеспечить однородность, апостериорное распределение имеет большую долю. Формируются скорректированные априорные данные.

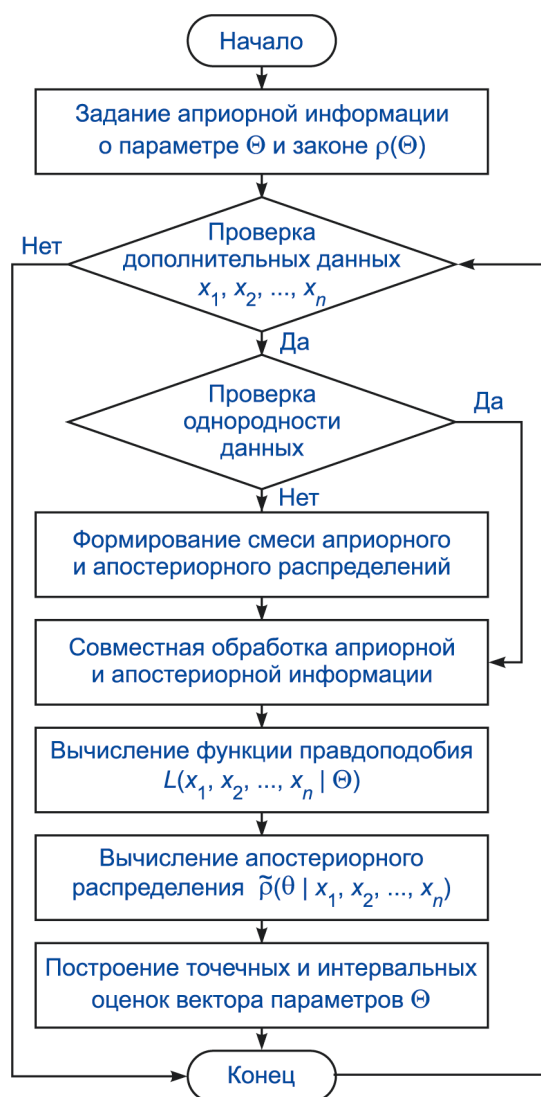


Рис. 1. Общая схема многошагового алгоритма статистического оценивания

Fig. 1. The general logic scheme for the implementation of the Bayesian approach in statistical assessment

Статистические оценки, построенные на основе скорректированной априорной информации, назовём обобщёнными байесовскими оценками.

5. Совместная обработка априорной и апостериорной информации. Этот шаг состоит из нескольких этапов.

5.1 Вычисляется функция правдоподобия

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n | \Theta) = f(x_1 | \Theta) f(x_2 | \Theta) \dots f(x_n | \Theta). \quad (2)$$

5.2 Вычисляется апостериорное распределение с использованием формулы Байеса

$$\tilde{p}(\Theta | x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{\rho(\Theta) L(x_1, x_2, \dots, x_n | \Theta)}{\int L(x_1, x_2, \dots, x_n | \Theta) \rho(\Theta) d\Theta}. \quad (3)$$

5.3 Строятся точечные и интервальные оценки исследуемого вектора параметров Θ . Переход к этапу 2.

Сопряжённые распределения. Семейство априорных распределений назовём сопряжённым по отношению к наблюдаемой генеральной совокупности (по отношению к функции правдоподобия $L(x_1, x_2, \dots, x_n | \Theta)$), если и вычисленное по формуле (3) апостериорное распределение $\tilde{p}(\Theta | x_1, x_2, \dots, x_n)$, как и априорное распределение, принадлежит этому же семейству. Другими словами, семейство распределений G сопряжено с $L(x_1, x_2, \dots, x_n | \Theta)$, если оно замкнуто относительно операции пересчёта априорного распределения в апостериорное [7].

Условие существования сопряжённого семейства априорных распределений. Если функция правдоподобия представима в виде произведения двух функций:

$$\begin{aligned} L(x_1, x_2, \dots, x_n | \Theta) = \\ = v[T_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, T_m(x_1, x_2, \dots, x_n; \Theta)] \times \\ \times \psi(x_1, x_2, \dots, x_n), \end{aligned} \quad (4)$$

где первый сомножитель v – некоторая функция, зависящая от m других функций ($T_j(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $j=1, 2, \dots, m$) и вектора параметров Θ , а второй сомножитель – функция $\psi(x_1, x_2, \dots, x_n)$, не зависящая от вектора параметров Θ , то существует семейство $G = \{\rho(\Theta); B\}$ априорных распределений, сопряжённое с $L(x_1, x_2, \dots, x_n | \Theta)$ [7, 8]. Здесь B – вектор параметров сопряжённого распределения.

Методика расчёта конкретных значений параметров сопряжённых априорных распределений. В большинстве решаемых практических задач известны априорные средние значения $\Theta_0 = E\Theta = (E\theta_1, E\theta_2, \dots, E\theta_s)^T$ и СКО $\Delta_1 = \sqrt{D\theta_1}$, $\Delta_2 = \sqrt{D\theta_2}, \dots, \Delta_s = \sqrt{D\theta_s}$ оцениваемого параметра. В этом случае конкретные значения параметров априорного распределения могут быть вычислены методом моментов [7, 8].

Опишем алгоритм расчёта параметров одномерной функции распределения $\rho(\theta)$ на примере бета-распределения. Плотность бета-распределения имеет вид:

$$\rho(\theta) = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \theta^{a-1} (1-\theta)^{b-1}, \quad (5)$$

где $\Gamma(z) = \int_0^\infty x^{z-1} e^{-x} dx$ – гамма-функция Эйлера [7, 8].

Плотность бета-распределения $\rho(\theta)$ зависит от параметров a, b . Если средние значения и СКО известны априори, т. е. $E\theta = \theta_0$ и $D\theta = \Delta^2$, то неизвестные параметры a и b определяются по формулам [7, 8, 17, 19]:

$$a = \theta_0^2(1-\theta_0)/\Delta^2 - \theta_0;$$

$$b = [\theta_0^2(1-\theta_0)/\Delta^2 - \theta_0][(1-\theta_0)/\theta_0].$$

Пересчёт значений параметров сопряжённых распределений при переходе от априорного сопряжённого распределения к апостериорному. Методика пересчёта параметров сопряжённых распределений для нормального закона описана в [17], а для экспоненциального, равномерного распределения и законов Пуассона и Парето – в [19].

Ниже описана технология применения БП для биномиального и отрицательного биномиального законов распределения (БЗР и ОБЗР соответственно).

Применение байесовского подхода к биномиальному распределению. Пусть $\xi_\theta(M)$ – случайная величина, или число «успехов» в серии из M испытаний Бернулли, где M – известное число; θ – неизвестная вероятность «успеха» в одном испытании. Тогда закон распределения вероятностей запишем как

$$f(x|\theta) = P\{\xi_\theta(M) = x|\theta\} = C_M^x \theta^x (1-\theta)^{M-x}, \quad x=0, 1, \dots, M.$$

Функцию правдоподобия для n серий испытаний представим в виде

$$\begin{aligned} L(x_1, x_2, \dots, x_n | \theta) = \prod_{i=1}^n C_M^{x_i} \theta^{x_i} (1-\theta)^{M-x_i} = \\ = \theta^{\sum_{i=1}^n x_i} (1-\theta)^{nM - \sum_{i=1}^n x_i} \prod_{i=1}^n C_M^{x_i}, \end{aligned} \quad (6)$$

где x_i – число «успехов» в i -й серии.

В результате сравнения (6) с частным случаем (4) при $m=1$ и $T(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n x_i = \bar{x}$ можно сделать вывод о существовании распределения, сопряжённого с $L(x_1, x_2, \dots, x_n | \theta)$.

Зададим первое приближение для плотности распределения $\rho^{(1)}(\theta) = 1, \theta \in (0; 1)$. С учётом эквивалентности (здесь и далее при выкладках с равенствами, справедливыми с точностью до нормирующей константы, вместо знака равенства используем знак эквивалентности $\sim$)

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n | \theta) \sim \theta^{\sum_{i=1}^n x_i} (1-\theta)^{nM - \sum_{i=1}^n x_i}$$

получим апостериорное распределение

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}^{(1)}(\theta | (x_1, x_2, \dots, x_n)) &\sim \rho^{(1)}(\theta) L(x_1, x_2, \dots, x_n | \theta) \sim \\ &\sim \theta^{\sum_{i=1}^n x_i} (1-\theta)^{nM - \sum_{i=1}^n x_i}. \end{aligned} \quad (7)$$

Таблица 1

Результаты двух испытаний

n	ξ_1	ξ_2
1	2	80
2	0	72
3	3	100
4	1	88
5	2	90

Правая часть (7) с точностью до нормирующего множителя, не зависящего от θ , представляет собой плотность бета-распределения (5) с параметрами

$$\left. \begin{aligned} a &= \sum_{i=1}^n x_i + 1; \\ b &= nM - \sum_{i=1}^n x_i + 1. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Непосредственный расчёт по формуле (3) даёт апостериорное распределение

$$\begin{aligned} \tilde{p}(\theta | (x_1, x_2, \dots, x_n)) &\sim \theta^{a-1} (1-\theta)^{b-1} \theta^{\sum_{i=1}^n x_i} (1-\theta)^{nM - \sum_{i=1}^n x_i} = \\ &= \theta^{a + \sum_{i=1}^n x_i} (1-\theta)^{b + nM - \sum_{i=1}^n x_i}. \end{aligned} \quad (9)$$

Из (9) с учётом (8) можно получить новые значения параметров бета-распределения, соответствующих последующему шагу байесовского алгоритма:

$$\left. \begin{aligned} \tilde{a} &= a + \sum_{i=1}^n x_i; \\ \tilde{b} &= b + nM - \sum_{i=1}^n x_i. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Применение байесовского подхода к отрицательно-му биномиальному распределению. Рассмотрим случайную величину, имеющую ОБЗР, $\xi(\theta, K)$ – число испытаний в схеме Бернулли до K -го появления «успеха», где θ – неизвестная вероятность появления «успеха» при одном испытании; K – некоторое заданное целое положительное число. Тогда справедливо равенство

$$f(x|\theta) = P\{\xi(\theta; K) = x|\theta\} = C_{x-1}^{K-1} \theta^K (1-\theta)^{x-K}, \quad x = K, K+1, \dots$$

Функция правдоподобия имеет вид

$$\begin{aligned} L(x_1, x_2, \dots, x_n | \theta) &= \prod_{i=1}^n C_{x_i-1}^{K-1} \theta^K (1-\theta)^{x_i-K} = \\ &= \theta^{Kn} (1-\theta)^{\sum_{i=1}^n x_i - Kn} \prod_{i=1}^n C_{x_i-1}^{K-1}. \end{aligned} \quad (11)$$

При сравнении (11) с частным случаем (4) при $m=1$ и $T(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n x_i$ можно сделать вывод, что сопряжённое распределение существует. Правая часть $L(x_1, x_2, \dots, x_n | \theta)$ представляет собой (с точностью до нормирующего множителя, не зависящего от θ) плотность бета-распределения (5) с параметрами

$$\left. \begin{aligned} a &= Kn + 1; \\ b &= \sum_{i=1}^n x_i - Kn + 1. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Аналогично описанному выше для БЗР получим новые значения параметров бета-распределения для ОБЗР:

$$\left. \begin{aligned} \tilde{a} &= a + Kn; \\ \tilde{b} &= b + \sum_{i=1}^n x_i - Kn. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Отметим некоторые свойства ОБЗР. При $K \rightarrow \infty$ ОБЗР становится распределением Пуассона, а при $K=1$ – геометрическим распределением (распределением Бозе-Эйнштейна для одного источника – a simple source). Если K – целое число, то ОБЗР становится обобщённым распределением Бозе-Эйнштейна.

Результаты расчётов.

Результаты расчётов для БЗР. Пусть испытывается партия измерительных систем (изделий). Для оценки вероятности θ того, что изделие не будет соответствовать заданным требованиям (будет бракованным), проведено испытание № 1: проконтролировано $n=5$ партий по $M=80$ изделий в каждой партии. Предполагается, что число ξ_1 не прошедших контроль образцов в партии объёмом M описывается БЗР с параметрами θ, M . Результаты контроля представлены в табл. 1, где n – номер партии.

Согласно статистическому анализу аналогичных партий изделий допустимая доля образцов изделий, не прошедших контроль, в среднем равна 0,01 и имеет разброс, характеризующийся СКО 0,003. Требуется с использованием сопряжённого априорного распределения параметра θ получить байесовские точечную и интервальную (с уровнем доверия $P_0=0,90$) оценки вероятности брака и сравнить их с соответствующими оценками ММП.

Как было установлено выше, для БЗР сопряжённое априорное распределение параметра θ существует и описывается бета-распределением (5) с параметрами (8): $a=10,99$; $b=1088,01$. Применив формулы пересчёта (10), получим значения параметров апостериорного распределения θ : $\tilde{a}=18,99$; $\tilde{b}=1480,01$, а затем точечную байесовскую оценку $\hat{\theta}^{(БП)} = E(\theta | x_1, x_2, \dots, x_n) = \tilde{a} / (\tilde{a} + \tilde{b}) = 0,0128$. Тогда с вероятностью $P_0=0,90$ справедливо неравенство $\beta_{0,95}^{-1}(\tilde{a}, \tilde{b}) < \hat{\theta}^{(БП)} < \beta_{0,05}^{-1}(\tilde{a}, \tilde{b})$, где $\beta_{0,95}^{-1}(\tilde{a}, \tilde{b})$, $\beta_{0,05}^{-1}(\tilde{a}, \tilde{b})$ – 95 % и 5 % квантили бета-распределения. Следовательно, интервальная байесовская оценка $\hat{\theta}^{(БП)} \in (0,00832; 0,01776)$.

Решение, найденное с использованием ММП [8], с вероятностью $P_0=0,90$ приводит к точечной и интервальной ММП-оценкам соответственно:

$$\hat{\theta}^{(ММП)} = \frac{1}{nM} \sum_{i=1}^n x_i = 0,02;$$

$$\hat{\theta}^{(ММП)} \in (0,0085; 0,0315).$$

Таким образом, размах интервальной оценки, полученной с помощью ММП, в 2,4 раза превышает размах байесовской интервальной оценки при однократном использовании апостериорной информации.

На рис. 2 представлены точечные и интервальные оценки параметров БЗР, найденные с применением БП и ММП при многократном использовании апостериорной информации в предположении однородности априорной и апостериорной информации. С увеличением номера n шага результаты

БП и ММП сближаются. При этом оценка на основе БП достаточно медленно сходится к оценке ММП.

На рис. 3 приведены зависимости отношения размахов доверительных интервалов, построенных с помощью ММП и БП, от номера шага БП для разных условных объёмов V апостериорной информации. За единичный объём информации $V=1$ выбрана выборка объёмом $M=80$ ($V=2$ соответствует выборка объёмом $M=160$, $V=4$ – объёмом $M=320$). Из рис. 3 следует, что с увеличением объёма апостериорной информации отношение размахов доверительных интервалов, построенных с помощью ММП и БП, стремится к единице.

Результаты расчётов для ОБЗР. Для оценки вероятности θ того, что изделие не будет соответствовать заданным требованиям (будет бракованным), проведено испытание № 2: изделия контролировали до первого обнаружения несоответствия – до первого брака, $K=1$. Количество ξ_2 проверенных образцов изделий является случайной величиной, подчиняющейся геометрическому распределению – частному случаю ОБЗР при $K=1$. (Если для ОБЗР выбрать $K=2$ то проверка проводилась бы до обнаружения двух бракованных изделий, и т. д.). Результаты контроля представлены в табл. 1. Как и в случае БЗР, средняя доля брака принималась равной 0,01, СКО – 0,003.

Параметры сопряжённого бета-распределения: $a=10,99$; $b=1088,01$. С применением формул пересчёта (13) получим значения параметров апостериорного распределения θ : $\tilde{a}=15,99$; $\tilde{b}=1513,01$. Поэтому точечная оценка $\hat{\theta}^{(БП)}=0,01039$, и с вероятностью $P_0=0,90$ справедливо неравенство $\beta_{0,95}^{-1}(\tilde{a}, \tilde{b}) < \hat{\theta}^{(БП)} < \beta_{0,05}^{-1}(\tilde{a}, \tilde{b})$. Следовательно, интервальная оценка $\hat{\theta}^{(БП)} \in (0,00652; 0,01499)$.

Решение, основанное на ММП [7, 8], приводит к точечной и интервальной оценкам соответственно: $\hat{\theta}^{(ММП)}=0,0139$, $\hat{\theta}^{(ММП)} \in (0,00608; 0,02424)$. Таким образом, в рассмотренной задаче размах интервальной оценки, полученной на основе БП, в 2,1 раза меньше соответствующего размаха, полученного с помощью ММП, при однократном применении апостериорной информации.

Согласно анализу размахов доверительных интервалов для ОБЗР, построенных с помощью представленного в статье многошагового алгоритма и с помощью стандартного ММП, границы доверительных интервалов и СЗ имеют вид, аналогичный приведённому на рис. 2. Зависимости отношения размахов доверительных интервалов, построенных с помощью ММП и БП, от номера шага БП также аналогичны зависимостям, изображённым на рис. 3. На каждом шаге применения многошагового алгоритма предполагалась однородность априорных и апостериорных статистических данных.

Результаты построения оценок концентрации загрязняющих веществ. Пусть с периодом в один месяц было проведено три анализа ($q=1, 2, 3$). При каждом анализе были взяты n_q проб жидкости и зафиксировано m_q удовлетворительных результатов (значений, не превышающих предельно допустимую концентрацию загрязняющих веществ): $n_1=n_2=n_3=12$; $m_1=11$; $m_2=6$; $m_3=7$. Требуется построить байесовские точечную и интервальную (с уровнем доверия $P_0=0,90$) оценки

концентрации загрязняющего вещества в жидкости и сравнить их с соответствующими оценками ММП. При невозможности

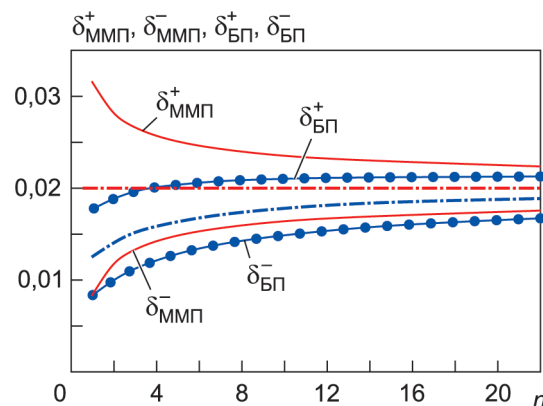


Рис. 2. Границы доверительных интервалов $\delta_{БП}^+$, $\delta_{БП}^-$ и $\delta_{ММП}^+$, $\delta_{ММП}^-$ соответственно для байесовского подхода и метода максимального правдоподобия в зависимости от номера n шага многошагового алгоритма

Fig. 2. Boundaries of confidence intervals and average values depending on the step number n of Bayesian approach and maximum likelihood method

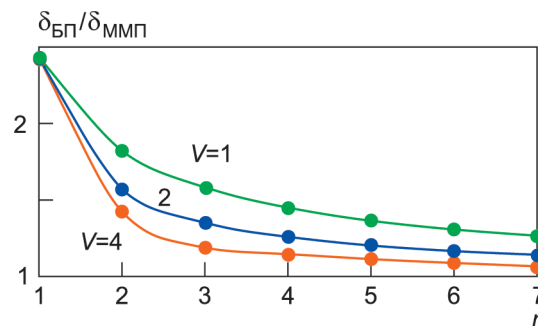


Рис. 3. Зависимость отношения размахов $\delta_{БП}/\delta_{ММП}$ доверительных интервалов байесовского подхода от номера n шага алгоритма для разных значений условного объёма V апостериорной информации

Fig. 3. Dependence of the ratio of the ranges of confidence intervals on the Bayesian approach step number for different values of the conditional amount of a posteriori information

Таблица 2

Оценки результатов количественных анализов концентрации при трёх подходах

n_a	$\hat{\theta}$	$P_{0,9}$
ММП		
1	0,9167	[0,7870; 0,9957]
2	0,5000	[0,2626; 0,7374]
3	0,5833	[0,3492; 0,8174]
БП		
1	Невозможна	Невозможен
2	То же	То же
3	0,5277	[0,4110; 0,6838]
Объединённая оценка		
1	0,5024	[0,3346; 0,6702]
2	0,5024	[0,3346; 0,6702]
3	0,5474	Не требуется

применения стандартного БП скорректировать априорную информацию и получить объединённые оценки на основе использования смеси распределений.

Результаты q -го анализа примем как априорную информацию при $(q+1)$ -м анализе, $q=1,2$. Моделирование показало, что статистические данные первого и второго анализа являются неоднородными (согласно традиционному методу проверки однородности – критерию Стюдента). Поэтому используем смесь плотностей распределений [22] и отбросим часть априорной информации из первого анализа, как наиболее устаревшую из имеющейся информации. Таким образом, скорректируем априорную информацию и построим объединённую байесовскую оценку. Данные третьего анализа уже оказались однородными с соответствующей априорной информацией. В табл. 2 приведены результаты трёх количественных анализов – оценки $\hat{\theta}$; n_a – номер анализа; $P_{0,9}$ – 90 % доверительные интервалы ММП, БП и объединённой оценки. Из табл. 2 следует, что размах доверительного интервала, построенного по результатам анализов 2, 3 с помощью БП, соответственно в 1,41 и 1,72 раза меньше размаха доверительного интервала, построенного с применением ММП.

Обсуждение результатов. БП по сравнению с ММП даёт существенный выигрыш в точности построения статистических оценок при небольших и средних объёмах выборок. Указанное обстоятельство делает БП особенно эффективным в задачах измерительной практики в случае, когда многократное повторение испытаний нецелесообразно или трудоёмко. При увеличении объёма и количества выборок оба метода будут давать идентичные результаты. Отметим также достаточно медленную сходимость получаемых с помощью БП и ММП статистических оценок друг к другу.

Полученные результаты позволяют строить эффективные статистические оценки для широкого класса задач измерительной практики – при оценке соответствия изделий заданным требованиям, количественном и качественном физико-химическом анализе с целью выявления динамики концентрации загрязняющих веществ в различных средах, приёмо-сдаточных испытаниях измерительных систем, обработке результатов измерений. Обычно в процессе приёмо-сдаточных работ контролируют и проверяют набор показателей и параметров, определяемых нормативно-технической документацией. Разработанный в настоящей статье многошаговый алгоритм в совокупности с методами, изложенными в [17–21], можно использовать как методы контроля достаточно широкого набора технических требований к определённым показателям. Выбор конкретного метода контроля зависит от технических и технологических возможностей, затрат времени и ресурса на испытания.

Предложенный многошаговый алгоритм на основе БП, включающий проверку на однородность априорной и апостериорной информации, при использовании смеси распределений существенно расширяет область применения стандартного БП [7] и позволяет строить объединённые байесовские оценки, которые также оказываются эффективнее, чем оценки ММП. Данный алгоритм можно применять при разработке методик высокоточных измерений, для которых не играют ключевую роль времена измерительного процесса и обработки информации.

Заключение. Разработанный многошаговый алгоритм построения статистических оценок на основе байесовского подхода, имеющий функциональное наполнение в среде Matlab, позволяет сузить размах доверительных интервалов в 1,3–2,4 раза в случае однородности априорных и апостериорных статистических данных. Эффективность алгоритма продемонстрирована на трёх практических примерах. Моделирование показало медленную сходимость оценок, полученных двумя указанными выше подходами; в рассмотренных примерах практическая близость статистических оценок наблюдается после применения байесовского подхода 15–20 раз.

Список источников

1. Сычев Е. И. Оценка эффективности и параметрический синтез метрологического обеспечения радиоаппаратуры. М.: МО СССР, 1984. 386 с.
2. Сурду М. Н. Вариационный метод калибровки измерителей импеданса. Ч. 1. Основные положения // Метрология. 2019. № 2. С. 27–43. <https://doi.org/10.32446/0132-4713.2019-2-27-43>
3. Кузнецов В. А., Исаяев Л. К., Шайко И. А. Метрология. М.: Стандартиформ, 2005. 298 с.
4. Сычев Е. И., Храменков В. Н., Шкитин А. Д. Основы метрологии военной техники. М.: Военное издательство, 1993. 400 с.
5. Сюсина О. М., Черницын А. М., Тамаров В. А. Построение доверительных областей в задаче вероятностного исследования движения малых тел солнечной системы // Астрономический вестник. 2012. Т. 46. № 3. С. 209–222.
6. Вишняков Б. В., Егоров А. И. Построение доверительных областей для траекторий движения объектов в задачах машинного зрения // Известия РАН. Теория и системы управления. 2013. № 3. С. 124–132.
7. Айвазян С. А. Байесовский подход в эконометрическом анализе // Прикладная эконометрика. 2008. № 1 (9). С. 93–130.
8. Айвазян С. А., Мхитарян В. С. Прикладная статистика и основы эконометрики. Учебник для вузов: В 2-х томах. Т. 1. Теория вероятностей и прикладная статистика. Изд. 2-е, испр. М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2001. 656 с.
9. Lancaster A., *An Introduction to Modern Bayesian Econometrics*, Blackwell Pub., 2004.
10. Ghosh S. K., Hajra S., Paek A., Jayaram M., *Annual Review of Biochemistry*, 2006, vol. 75, pp. 211–241. <https://doi.org/10.1146/annurev.biochem.75.101304.124037>
11. Tipping M., Sparse Bayesian Learning and the relevance vector machine, *Journal of Machine Learning Research*, 2001, no. 1, pp. 211–244.
12. Kropotov D., Vetrov D., Optimal Bayesian Classifier with Arbitrary Gaussian Regularizer, *Proc. of 7th Open German-Russian Workshop on Pattern Recognition and Image Understanding (OGRW-7-2007)*, Ettlingen, Germany, 20–25 Aug. 2007.
13. Kropotov D., Vetrov D., Machine Learning, *Proceedings of the Twenty-Fourth International Conference (ICML 2007)*, Corvallis, Oregon, USA, June 20–24, 2007. <https://doi.org/10.1145/1273496.1273554>
14. Vapnik V. N., Bounds on the Rate of Convergence of Learning Processes, In book: *The Nature of Statistical Learning Theory*.

Statistics for Engineering and Information Science, Springer, New York, 2000, pp. 69–91. https://doi.org/10.1007/978-1-4757-3264-1_4

15. Maxwell Chickering D., Heckerman D., Meek C., *A Bayesian approach to learning Bayesian networks with local structure*. <https://doi.org/10.48550/arXiv.1302.1528>

16. Бидюк П. И., Терентьев А. Н. Построение и методы обучения Байесовских сетей // Таврический вестник информатики и математики. 2004. № 2. С. 1–3.

17. Хайруллин Р. З. Применение байесовского подхода в задачах построения статистических оценок при обработке результатов испытаний измерительной техники // Вестник метролога. 2020. № 1. С. 9–15.

18. Хайруллин Р. З., Волчков А. А., Исаев Ю. А., Леонова К. С., Фуфаева О. В. Применение Байесовского подхода для построения эффективных оценок точности измерений // Вестник метролога. 2020. № 3. С. 9–12.

19. Хайруллин Р. З., Закутин А. А. Применение байесовского подхода к построению статистических оценок параметров распределения случайных величин // Измерительная техника. 2020. № 11. С. 14–21. <https://doi.org/10.32446/0368-1025it.2020-11-14-21>

20. Khayrullin R. Z., Khaimuldinova A. K., Taimanova G. K., Sarsembayeva T. E., Volkov V. S., Shamina S. V., Lyalin E. A., Kabanov O. V., *Nexo Revista Cientifica*, 2021, vol. 34, no. 4, pp. 1301–1321. <https://doi.org/10.5377/nexo.v34i04.12666>

21. Хайруллин Р. З. Построение доверительных интервалов и областей для модели множественной линейной регрессии с использованием байесовского подхода // Альманах современной метрологии. 2021. № 4. С. 301–321.

22. Розенталь О. М., Александровская Л. Н., Кириллин А. В. Байесовский подход к повышению достоверности контроля качества вод // Аналитика и контроль. 2018. Т. 22, № 3. С. 334–340. <http://dx.doi.org/10.15826/analitika.2018.22.3.001>

References

1. Sychev E. I., *Evaluation of the effectiveness and parametric synthesis of metrological support for radio equipment*, Moscow, MO SSSR Publ., 1984. 386 p. (In Russ.)

2. Surdu M. N., *Measurement Techniques*, 2019, vol. 62, no. 6, pp. 562–569. <https://doi.org/10.1007/s11018-019-01661-7>

3. Kuznetsov V. A., Isaev L. K., Shaiko I. A., *Metrology*, Moscow, Standartinform, 2005, 298 p. (In Russ.)

4. Sychev E. I., Khramenkov V. N., Shkitin A. D., *Fundamentals of metrology of military equipment*, Moscow, Voennoe izdatel'stvo Publ., 1993, 400 p. (In Russ.)

5. Syusina O. M., Chernitsov A. M., Tamarov V. A., *Solar System Research*, 2012, vol. 46, no. 3, pp. 195–207. <https://doi.org/10.1134/S0038094612020104>

6. Vishnyakov B. V., Egorov A. I., Construction of confidence regions for object motion trajectories in machine vision problems, *Proceedings of the Russian Academy of Sciences. Theory and control systems*, 2013, no. 3, pp. 124–132. (In Russ.)

7. Ayvazyan S. A., Bayesian approach in econometric analysis, *Applied Econometrics*, 2008, no. 1 (9). pp. 93–130. (In Russ.)

8. Ayvazyan S. A., Mkhitarayan V. S., *Prikladnaya statistika i osnovy ekonometriki*, in 2 vols, vol. 1, 2nd edition, corrected, Moscow, Uniti-Dana Publ., 2001, 656 p. (In Russ.)

9. Lancaster A., *An Introduction to Modern Bayesian Econometrics*, Blackwell Pub., 2004.

10. Ghosh S. K., Hajra S., Paek A., Jayaram M., *Annual Review of Biochemistry*, 2006, vol. 75, pp. 211–241. <https://doi.org/10.1146/annurev.biochem.75.101304.124037>

11. Tipping M., Sparse Bayesian Learning and the relevance vector machine, *Journal of Machine Learning Research*, 2001, no. 1, pp. 211–244.

12. Kropotov D., Vetrov D., Optimal Bayesian Classifier with Arbitrary Gaussian Regularizer, *Proc. of 7th Open German-Russian Workshop on Pattern Recognition and Image Understanding (OGRW-7-2007)*, Ettlingen, Germany, 20–25 Aug. 2007.

13. Kropotov D., Vetrov D., *Machine Learning, Proceedings of the Twenty-Fourth International Conference (ICML 2007)*, Corvallis, Oregon, USA, June 20–24, 2007.

<https://doi.org/10.1145/1273496.1273554>

14. Vapnik V. N., Bounds on the Rate of Convergence of Learning Processes, In book: *The Nature of Statistical Learning Theory. Statistics for Engineering and Information Science*, Springer, New York, 2000, pp. 69–91. https://doi.org/10.1007/978-1-4757-3264-1_4

15. Maxwell Chickering D., Heckerman D., Meek C., *A Bayesian approach to learning Bayesian networks with local structure*. <https://doi.org/10.48550/arXiv.1302.1528>

16. Bidyuk P. I., Terentiev A. N., Construction and learning methods for Bayesian networks, *Taurian Bulletin of Informatics and Mathematics*, 2004, no. 2, pp. 1–3. (In Russ.)

17. Khayrullin R. Z., Application of the Bayesian approach in the problems of constructing statistical estimates when processing the results of testing measuring equipment, *Vestnik metrologa*, 2020, no. 1, pp. 9–15. (In Russ.)

18. Khayrullin R. Z., Volchokov A. A., Isaev Yu. A., Leonova K. S., Fufaeva O. V., Application of the Bayesian approach to construct effective estimates of measurement accuracy, *Vestnik metrologa*, 2020, no. 3, pp. 9–12. (In Russ.)

19. Khayrullin R. Z., Zakutin A. A., *Measurement Techniques*, 2021, vol. 63 no. 11, pp. 862–869. <https://doi.org/10.1007/s11018-021-01872-x>

20. Khayrullin R. Z., Khaimuldinova A. K., Taimanova G. K., Sarsembayeva T. E., Volkov V. S., Shamina S. V., Lyalin E. A., Kabanov O. V., *Nexo Revista Cientifica*, 2021, vol. 34, no. 4, pp. 1301–1321. <https://doi.org/10.5377/nexo.v34i04.12666>

21. Khayrullin R. Z., Constructing the confidence intervals and regions for a multiple linear regression model using the Bayesian approach, *Al'manakh of modern metrology*, 2021, no. 4, pp. 301–321. (In Russ.)

22. Rozental O. M., Alexandrovskaya L. N., Kirillin A. V., Bayesian approach to improving the reliability of water quality control, *Analytics and control*, 2018, vol. 22, no. 3, pp. 334–340. (In Russ.) <http://dx.doi.org/10.15826/analitika.2018.22.3.001>

Статья поступила в редакцию 09.02.2022; одобрена после рецензирования 09.03.2022; принята к публикации 10.03.2022.
The article was submitted 09.02.2022; approved after reviewing 09.03.2022; accepted for publication 10.03.2022.