

О формате представления неопределённостей при решении измерительных задач

Сергей Фёдорович Левин

Московский институт экспертизы и испытаний, Москва, Россия, miei-metrolog@yandex.ru

Аннотация. Рассмотрены два формата представления неопределённостей при решении измерительных задач: распределение вероятностей и параметр рассеяния распределения. Отмечена несогласованность определений ряда терминов ГОСТ Р ИСО 3534-1-2019 «Статистические методы. Словарь и условные обозначения. Часть 1. Общие статистические термины и термины, используемые в теории вероятностей» и отсутствие определений важных терминов – композиции, свёртки, вероятности согласия, смеси распределений. Показано, что наиболее полное представление вероятностных свойств неопределённости результатов в метрологии даёт свёртка распределений вероятностей.

Ключевые слова: метрология, измерительная задача, неопределённость, распределение вероятностей, параметр рассеяния, композиция, свёртка, вероятность согласия

Для цитирования: Левин С. Ф. О формате представления неопределённостей при решении измерительных задач // Измерительная техника. 2022. № 4. С. 14–22. <https://doi.org/10.32446/0368-1025it.2022-4-14-22>

On the format of the representation for uncertainties in solving measurement problems

Sergey F. Levin

Moscow Institute for expertise and tests, Moscow, Russia, miei-metrolog@yandex.ru

Abstract. Two formats for the representation of uncertainties in solving measurement problems are considered: the probability distribution and the scattering parameter of the distribution. Inconsistency of definitions of a number of terms GOST R ISO 3534-1-2019 “Statistical methods. Dictionary and symbols. Part 1. General statistical terms and terms used in probability theory” and the lack of definitions of important terms – composition, convolution, probability of agreement, mixture of distributions. It is shown that the convolution of probability distributions gives the most complete representation of the probabilistic properties of the uncertainty of results in metrology.

Keywords: uncertainty, probability distribution, scattering parameter, composition, convolution, probability of agreement

Введение. 1 января 2020 г. вместо ГОСТ Р 50779.10-2000 (ИСО 3534.1-93) «Статистические методы. Вероятность и основы статистики. Термины и определения» введён в действие ГОСТ Р ИСО 3534-1-2019 «Статистические методы. Словарь и условные обозначения. Часть 1. Общие статистические термины и термины, используемые в теории вероятностей». В примере к термину «2.11 распределение вероятностей» в ГОСТ Р ИСО 3534-1-2019 заявлено: «Вероятностное распределение полностью описывает вероятностные свойства *неопределённости* результата». И это, скорее, неожиданность, чем новость.

«Распределением вероятностей как наиболее полной характеристикой неопределённости» математических моделей объектов измерений и результатов решения измерительных задач уже оперируют Рекомендации по метрологии Р 50.2.004-2000 «ГСИ. Определение характеристик математических моделей зависимостей между физическими величинами при решении измерительных задач. Основные положения», РМ 1-03 «ГСИ. Методика обработки данных многократных

измерений в статистических измерительных задачах» и МИ 2916-2005 «ГСИ. Идентификация распределений вероятностей при решении измерительных задач». Международный словарь VIM-2007 [1] «предусматривает также представление результата измерений плотностью распределения вероятностей на множестве возможных значений измеряемой величины», а «функции распределения (плотности вероятности) систематической и случайной составляющих погрешности измерения» в качестве показателей точности предусматривал в свое время ГОСТ 8.011-72 «ГСИ. Показатели точности измерений и формы представления результатов измерений».

Напомним, «неопределённость измерения» как параметр рассеяния совокупности (распределения вероятностей), который можно приписать рассматриваемым в измерительных задачах величинам или результатам решения этих задач, определена в Рекомендациях РМГ 29-99 «ГСИ. Метрология. Основные термины и определения» заимствованием из словаря VIM-93 [2] и в Рекомендации МИ 2552-99 «ГСИ. Применение «Руководства по выражению неопределённости измерения»,

сопровождавшей перевод [3] международного руководства Guide to the expression of uncertainty of measurement (GUM) [4].

Однако здесь имеет место разночтение. В [3, 4] указано, что «идеальный метод для оценки и выражения неопределённости измерения должен предоставлять возможность указать такой интервал, в частности, интервал с вероятностью или уровнем доверия, который реально соответствует требуемому», а в ГОСТ Р 54500.3-2011/Руководство ИСО/МЭК 98.3:2008 «Неопределённость измерения. Часть 3. Руководство по выражению неопределённости измерения» и в одноимённом ГОСТ 34100.3-2017 – что «идеальный метод оценивания и выражения неопределённости измерения должен предоставлять возможность указать такой интервал, в частности, который был бы действительно близок к доверительному интервалу с заданным уровнем доверия».

Но в приложении С.3.2 перевода [3], ISO/IEC Guide 98-3 (GUM: 1995) “Uncertainty of measurement – Part 3: Guide to the expression of uncertainty in measurement”, ГОСТ Р 54500.3-2011 и ГОСТ 34100.3-2017 указано: «Надлежащей мерой неопределённости результата измерения является не дисперсия наблюдаемой величины, а дисперсия среднего арифметического по выборке наблюдений». А ведь в государственных поверочных схемах доверительные границы погрешности являются границами не доверительных, а толерантных интервалов. Эта нечёткость «интервал с вероятностью или уровнем доверия» или «интервал, в частности, который был бы действительно близок к доверительному интервалу с заданным уровнем доверия» была исправлена в последующих редакциях GUM. Но она стала для некоторых метрологов-теоретиков основанием некорректной критики границ толерантных интервалов как метрологических характеристик, закончившейся конфузом [5].

Заметим, уровень доверия фигурирует в ГОСТ Р ИСО 3534-1-2019 без определения, а с прежним определением – в ГОСТ Р ИСО 10576-1-2006 «Статистические методы. Руководство по оценке соответствия установленным требованиям. Часть 1. Общие принципы» с термином

3.9 доверительная вероятность, уровень доверия (confidence coefficient, confidence level): Величина $(1 - \alpha)$ – вероятность, связанная с доверительным интервалом или со статистически накрывающим интервалом.

Примечание – Величину $(1 - \alpha)$ часто выражают в процентах. [ИСО 3534.1–93, пункт 2.59]

Там же фигурирует термин

3.7 интервал неопределённости: Интервал, получаемый на основе измерений параметра и оценки его неопределённости, накрывающий область возможных значений, которые обоснованно могут быть приписаны измеряемому параметру.

Примечания ... 2 В случае, когда неопределённость получают путём оценки типа А для компонентов неопределённости, интервалом неопределённости может быть доверительный интервал для параметра.

Этот термин применяется в двух- и одноэтапной процедурах оценивания соответствия путём сравнения интервалов неопределённости с предельными значениями для контролируемых параметров. Причём отмечено, что для двухэтапной процедуры оценивания характерна «несколько более высокая вероятность решения о соответствии объекта с недопустимыми значениями контролируемого параметра, близкими к предельному значению».

Но интервалы неопределённости и доверительные интервалы характеризуют точность доверительного оценивания для параметров распределений, а интервалы охвата и толерантные интервалы, – для долей распределений!

Еще одной неожиданностью ГОСТ Р ИСО 3534-1-2019 стало исчезновение терминов ГОСТ Р 50779.10-2000:

2.69 свободный от распределения критерий (distribution-free test) – Критерий, в котором функция распределения статистики, лежащей в основе критерия, не зависит от функции распределения наблюдений.

3.25 неопределённость (результата проверки) (en uncertainty) – Оценка, относящаяся к результату проверки, которая характеризует область значений, внутри которой лежит истинное значение.

И уж совсем неожиданным оказалось то, что в ГОСТ Р ИСО 3534-1-2019 так и не были упомянуты важнейшие с точки зрения формата представления неопределённостей термины, отсутствовавшие в ГОСТ Р 50779.10-2000:

СВЁРТКА функций $f(x)$ и $g(x)$, принадлежащих $L(-\infty, \infty)$, – функция $h(x)$, определяемая равенством

$$h(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)dy = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x-y)dy$$

и обозначаемая символом $(f * g)(x)$. В. И. Соболев [6, стб. 1075].

КОМПОЗИЦИЯ – бинарная алгебраическая операция. Напр., К. (или суперпозицией) двух функций $f(x)$ и $g(x)$ наз. функция $h(x) = f[g(x)]$. См. *Свёртка*. [7, стб. 1013].

3.2.2 вероятность согласия распределений вероятностей: *площадь пересечения графиков плотностей распределений вероятностей $f_1(x)$ и $f_2(x)$:*

$$\alpha_{1,2} \equiv 1 - \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |f_1(x) - f_2(x)| dx.$$

Примечание – При единственной точке пересечения графиков плотностей распределений вероятность согласия связана с расстоянием (статистикой) Колмогорова D_N тождеством

$$\alpha_* \equiv 1 - D_N. \quad [\text{МИ 2916-2005}].$$

6.2. При необходимости объединения неравноточных данных в статистический ряд для его описания используют **смеси распределений**

$$f_{\Sigma}(\xi) = \sum_{k=1}^K p_k f_{*k}(\theta_{*k1}, \theta_{*k2}; \xi), \quad \sum_{k=1}^K p_k = 1,$$

где весовые коэффициенты p_k пропорциональны объемам выборок статистически однородных данных. [РМ 1-03].

Так в международной метрологии сформировалась проблема неадекватности, обозначенная единственным термином [1]

2.27 дефинициальная неопределённость (англ. definitional uncertainty, фр. incertitude definitionnelle) – составляющая неопределённости измерений, являющаяся результатом ограниченной детализации в определении измеряемой величины.

ПРИМЕЧАНИЕ 1 Дефинициальная неопределённость есть практический минимум неопределённости измерений при любом измерении данной величины.

ПРИМЕЧАНИЕ 2 Любое изменение детализации в определении величины ведет к другой дефинициальной неопределённости.

ПРИМЕЧАНИЕ 3 В ISO/IEC Guide 98-3:2008, D.3.4 и в IEC 60359 для понятия «дефинициальная неопределённость» используется термин «собственная неопределённость» (“intrinsic uncertainty”).

с предварительным уточнением: «в GUM дефинициальная неопределённость рассматривается как пренебрежимо малая по сравнению с другими составляющими неопределённости измерений» [1, с. 10], что есть неизбежное следствие отсутствия математического решения проблемы [8].

Терминологические потери и несоответствия. Да, «синонимия» *доверительной вероятности и уровня доверия* (п. 3.9 ГОСТ Р ИСО 10576-1-2006) не соответствует определению [9, с. 174]:

Доверительный интервал – интервал приближенных значений неизвестного скалярного параметра вероятностного распределения, построенный по результатам наблюдений. Пусть X – случайный элемент, принимающий значения в выборочном пространстве (X, B, P_θ) , $\theta \in \Theta \subset R^1$. Пусть $\theta^- = \theta^-(X)$ и $\theta^+ = \theta^+(X)$ такие две оценки параметра θ , что интервал $(\theta^-, \theta^+) \in \Theta$ и, кроме того, для любого $\theta \in \Theta$ определена вероятность $P_\theta\{\theta^- < \theta < \theta^+\} = p(\theta)$. Интервал (θ^-, θ^+) называется доверительным интервалом для параметра θ ; $p(\theta)$ называется доверительной вероятностью, или вероятностью накрытия, Д. и. (θ^-, θ^+) ; θ^- и θ^+ – нижняя и верхняя доверительные границы соответственно. Если доверительная вероятность $p(\theta)$ не зависит от θ , то в этом случае говорят, что Д. и. (θ^-, θ^+) подобен пространству выборок. Число $P = \inf_{\theta \in \Theta} p(\theta)$ называется коэффициентом доверия, или доверительным уровнем интервальной оценки.

М. С. Никулин.

И ранее было известно [7, стб. 366]: «**ДОВЕРИТЕЛЬНОЕ ОЦЕНИВАНИЕ** – ... $P_C(\theta)$ зависит от неизвестного θ , и поэтому в практич. работе принято характеризовать качество интервальной оценки коэффициентом доверия $P_C = \inf_{\theta \in \Theta} P_C(\theta)$, где нижняя грань вычисляется на множестве Θ (иногда коэффициент доверия наз. доверительным уровнем)... Ю. В. Линник, Н. М. Халфина».

Но в ГОСТ Р ИСО 10576-1-2006 для термина «3.9 **доверительная вероятность, уровень доверия**» англоязычные

эквиваленты указаны правильно – confidence coefficient, confidence level. Однако *уровень доверия* из ГОСТ Р ИСО 3534-1-2019 указывает на еще одну неупомянутую гипотезу [9, с. 725]:

ТОЛЕРАНТНЫЙ ИНТЕРВАЛ – интервал со случайными границами, построенный по выборке таким образом, что он с заранее выбранной вероятностью содержит не менее заданной доли вероятностной массы непрерывного распределения, к-рому подчиняются элементы выборки. Пусть $X = (X_1, \dots, X_n)$ – выборка, элементы к-рой суть независимые одинаково непрерывно распределённые случайные величины, функция распределения к-рых $F(x) = P\{X < x\}$ неизвестна. Далее, пусть $T_1 = T_1(X)$ и $T_2 = T_2(X)$ – такие статистики, что для заданной вероятности p ($0 < p < 1$) событие $\{F(T_2) - F(T_1) \geq p\}$ имеет заранее выбранную вероятность γ . В этом случае случайный интервал (T_1, T_2) называется γ -толерантным интервалом для функции распределения $F(x)$. Статистики T_1 и T_2 называются толерантными границами.

М. С. Никулин.

Важность этой гипотезы подтверждает и энциклопедия [10, стб. 358]:

ТОЛЕРАНТНЫЙ ИНТЕРВАЛ – случайный интервал, построенный по независимым одинаково распределённым величинам, функция распределения $F(x)$ к-рых неизвестна, и содержащий с заданной вероятностью γ , по крайней мере, долю p ($0 < p < 1$) вероятностной меры dF .

Пусть $X_1, X_2, \dots, X_n$ – независимые случайные величины, подчиняющиеся одному и тому же вероятностному закону, функция распределения которого $F(x)$ неизвестна, и пусть $T_1 = T_1(X_1, X_2, \dots, X_n)$ и $T_2 = T_2(X_1, X_2, \dots, X_n)$ – такие статистики, что для заранее фиксированного числа p ($0 < p < 1$) событие $\{F(T_2) - F(T_1) > p\}$ имеет заданную вероятность γ , т. е.

$$P\left\{\int_{T_1}^{T_2} dF(x) \geq p\right\} = \gamma. \quad (1)$$

В таком случае, случайный интервал (T_1, T_2) наз. γ -толерантным интервалом для функции распределения $F(x)$, его границы T_1 и T_2 – толерантными пределами, а вероятность γ – коэффициентом доверия. Из (1) следует, что односторонние толерантные пределы T_1 и T_2 представляют собой не что иное, как обычные односторонние доверительные пределы с коэффициентом доверия γ для квантилей $x_{1-p} = F^{-1}(1-p)$ и $x_p = F^{-1}(p)$ соответственно, т. е. $P\{x_{1-p}[T_1, +\infty)\} = \gamma, P\{x_p[-\infty, T_2]\} = \gamma$.

М. С. Никулин.

Получается, что *доверительный уровень и уровень доверия* – не одно и то же. Но «независимые одинаково непрерывно распределённые случайные величины, функция распределения которых $F(x) = P\{X < x\}$ неизвестна» – гипотеза, связанная со «свободным от распределения критерием».

И как теперь понимать Рекомендации по стандартизации Р 50.1.037-2002 «Прикладная статистика. Правила проверки

согласия опытного распределения с теоретическим. Часть II. Непараметрические критерии»:

2.3.1 При проверке сложных гипотез, когда по той же самой выборке оценивают параметры наблюдаемого закона распределения вероятностей, непараметрические критерии согласия Колмогорова, Смирнова, ω^2 и Ω^2 Мизеса теряют свойство «свободы от распределения». В этом случае распределения статистик этих критериев будут зависеть от закона, которому подчинена наблюдаемая выборка. ...

2.3.9 **Выводы** ...Некорректно использование оценок по методу моментов (за исключением тех ситуаций, когда оценки по методу моментов совпадают с ОМП¹), использование различных оценок по наблюдениям, сгруппированным в интервалы. Некорректно вычисление значений статистик непараметрических критериев согласия по группированным наблюдениям.

Исключение же термина «3.25 неопределённость» в ГОСТ Р ИСО 3534-1-2019 никак не объясняется.

Проблемы формата представления неопределённостей. *Толерантный интервал* связан с форматом представления неопределённостей.

Согласно РМ 1-03: «4.1.5 ... Толерантную оценку точности получают как такой наименьший интервал, который с принятой доверительной вероятностью содержит не менее чем заданную долю теоретического распределения». В ГОСТ Р ИСО 16269-6-2005 «Статистические методы. Статистическое представление данных. Определение статистических толерантных интервалов» указано

3.1.1 **толелантный интервал:** Интервал, определяемый по случайной выборке таким способом, что можно утверждать с указанным уровнем доверия, этот интервал содержит не менее чем заданную долю совокупности.

Примечание – Уровень доверия в этом случае – предел доли интервалов, определённых указанным способом, которые будут включать в себя не менее чем заданную долю совокупности, при бесконечном увеличении повторений метода.

И в условии для доли, накрываемой интервалом с границами в виде крайних членов вариационного ряда выборки, в ГОСТ Р ИСО 16269-6-2005 была допущена грубая ошибка: $np^n - 1 - (n-1)p^n \leq \alpha$, т. е. $p^n - 1 \leq \alpha$. Отметив путанность терминологии, ошибку поправил одноимённый ГОСТ Р 50779.29-2017 спустя 12 лет.

Это условие было получено по порядковым статистикам для упомянутой выше гипотезы [11, 12]: генеральная совокупность содержит независимые случайные величины, подчиняющиеся неизвестному непрерывному распределению $F(x)$. Аналогичный результат для дискретного распределения

получен в работе [13]. Правда, нечёткость в отношении *уровня доверия* в ГОСТ Р ИСО 3534-1-2019 и в ГОСТ Р 50779.29-2017 осталась, не говоря уже о «потерянной» *генеральной совокупности*.

Заметим, при $P=\gamma=\{0,90;0,95;0,99\}$ согласно ГОСТ Р 50779.29-2017 объёмы выборок для неизвестного непрерывного распределения $N=\{38,93,662\}$, а для симметричного – $N_v=\{11,29,228\}$, что неприемлемо для практики, но указывает на необходимость получения более подробных сведений о неизвестном распределении генеральной совокупности.

И тут проявляется первая проблема, с которой сталкивается математическая статистика при выборочном исследовании неизвестных генеральных совокупностей: без принятия гипотез о непрерывности, независимости и однородности данных выборочного исследования соответствующая задача идентификации функции распределения практически решена быть не может.

За этой проблемой следует проблема неидентичности или нестационарности условий измерений, что влечёт за собой бессмысленность предельных теорем в качестве источника так называемых нормальных распределений вероятностей. Возникающая при этом задача обнаружения и идентификации тренда в ряду измерений возвращает метрологов к проблеме неадекватности, которую не то опрометчиво, не то поверхностно затронули и не решили работчики GUM.

Историю планового внедрения в ГСИ понятия «неопределённость» в рамках моментного подхода к оцениванию точности результатов решения измерительных задач можно рассматривать как череду возникающих одна за другой проблем практического применения GUM [14–16]. На эти проблемы не всегда обращают внимание, но они проявляются в практике поверки и калибровки средств измерений (СИ) казусами, а поверители СИ до сих пор не воспринимают «Руководство по выражению неопределённости измерения».

Если расхождение названий «неопределённость измерения» и «неопределённость результата решения измерительной задачи» связано соответственно с косвенным и прямым смыслом слова «измерение», то формат представления «неопределённости» в виде распределения вероятностей или параметра его рассеяния определили противоречивые требования строгости и простоты.

Подходы к оцениванию точности результатов на композиционный и моментный разделились в XIX в. Тогда К. Якоби обобщил решение задачи о композиции $h(x)=f[g(x)]$ двух функций плотностей распределений вероятностей $f(x)$ и $g(x)$ на многомерный случай введением якобиана функционального преобразования [17]. И тогда же стали известны проблемы формата «неопределённости результата решения измерительной задачи».

Во-первых, построение композиции, вырождающейся в свёртку для функционального преобразования в виде линейной комбинации случайных величин, представляет собой ещё более сложную математическую задачу и часто не даёт аналитических решений. Но построение композиции численными методами в отличие от линеаризации нелинейных

¹ ОМП – оценка максимального правдоподобия.

«уравнений измерения» [3, 4] позволяет эффективно использовать метод Монте-Карло.

Во-вторых, метод характеристических функций, позволивший определить условия сходимости сумм независимых случайных величин к нормальному распределению, сводит задачу построения свёртки к преобразованию Фурье-Стилтьеса для произведения соответствующих характеристических функций. Однако лёгкость получения характеристических функций для типовых распределений вероятностей контрастирует со сложностью нахождения преобразований Фурье-Стилтьеса для произведения характеристических функций. В этом смысле метод композиции Якоби и метод характеристических функций Ляпунова при оценивании точности решений измерительных задач можно рассматривать как трудности одного порядка.

Методы оценивания точности по моментам распределений традиционно считались более простыми. И в 1929 г. Х. П. Робертсон показал, что соотношение неопределённостей В. Гейзенберга (исходный пункт концепции неопределённости измерения по названию) можно выразить через средние квадратические отклонения при измерениях координат квантовых объектов и что равенство в соотношении неопределённостей достигается только для квантовых состояний, описываемых так называемыми гауссовыми волновыми пакетами [18]. Среди физических толкований соотношения неопределённостей выделим два:

ограничение на экспериментально достижимую точность измерения характеристик квантовых объектов, обусловленное неадекватностью классических приборов целям квантовых измерений;

внутренне присущие свойства квантовых объектов независимо от несовершенства экспериментальных установок для измерения этих свойств.

Учитывая то, что СИ создаются на основе математических моделей физических явлений и эффектов, следует признать в качестве источника неопределённостей неадекватность этих математических моделей [8]. Эта причина и указана в [3, 4] вместе с основной проблемой формата «неопределённости измерения» в рамках моментного подхода.

6.3.2 В идеале хотелось бы иметь возможность выбрать конкретное значение коэффициента охвата k , которое обеспечивало бы интервал $Y = y \pm U = y \pm k u_c(y)$, соответствующий выбранному уровню доверия, такому как 95 или 99 процентов; равным образом, для заданного значения k хотелось бы иметь возможность чётко указать уровень доверия, связанный с этим интервалом. Однако это нелегко осуществить на практике, поскольку это требует полного знания распределения вероятностей, характеризваемого результатом измерения y и его суммарной неопределённостью $u_c(y)$. Хотя эти параметры обладают большой значимостью, сами по себе они недостаточны для того, чтобы установить интервалы, имеющие точно известные уровни доверия.

Да и согласно теореме А. А. Маркова [19] по $2v+1$ первым моментам можно найти ступенчатую функцию распределения лишь с v точками роста.

Более подробные пояснения дает Приложение G [3, 4]:

G.1.3. Чтобы получить значение коэффициента охвата k_p , образующего интервал с заданным уровнем доверия p , необходимо иметь подробные сведения о законе распределения, характеризующем результатом измерения и его суммарной стандартной неопределённостью.

G.1.4. Если известны распределения вероятностей входных величин $X_1, X_2, \dots, X_N$, [их математические ожидания, дисперсии, а также если эти величины не являются нормальными, моменты высших порядков], от которых зависит измеряемая величина Y , и если Y является линейной функцией входных величин $c_1 X_1 + c_2 X_2 + \dots + c_N X_N$, то распределение вероятностей Y может быть получено свёрткой распределений вероятностей входных величин.

Таким образом, значения k_p , образующие интервалы с заданным уровнем доверия p , могут быть рассчитаны по этой свёртке.

G.1.5. Если функциональная зависимость между Y и входными величинами нелинейна, и ограничение членами первого порядка разложения в ряд Тейлора этой зависимости не может рассматриваться в качестве допустимого приближения, то распределение вероятностей не является свёрткой распределений входных величин. В таких случаях необходимо использовать другие аналитические или численные методы расчёта.

G.1.6. На практике процедура свёртки при расчёте интервалов с заданными уровнями доверия – не используется или используется крайне редко по следующим причинам: параметры распределения входной величины обычно не известны точно, а являются лишь оценками; трудно ожидать, что уровень доверия для данного интервала может быть известен с высокой точностью; реализация этой процедуры сложна с математической точки зрения.

Вместо этого применяют приближения, основанные на центральной предельной теореме.

Центральную предельную теорему, обобщив работы П. Л. Чебышёва и А. А. Маркова, методом характеристических функций доказал в 1901 г. А. М. Ляпунов. Однако центральная предельная теорема связана не со стандартной неопределённостью совокупности, а со стандартной неопределённостью оценки её параметра положения, и теряет состоятельность в нестационарных условиях измерений. Кроме того, статистическая проверка гипотез, в том числе гипотезы «нормальности», в [3, 4] не предусмотрена, но даже при наличии такой проверки неопределённой остаётся дефинитная («дефинициальная» [1]) неопределённость функции распределения, принятой для искомой в измерительной задаче величины [8].

Особую актуальность проблема формата представления неопределённостей приобрела в связи с введением ГОСТ ISO/IEC 17025-2019 «Общие требования к компетентности

испытательных и калибровочных лабораторий», в котором глагольная форма «должна» означает требование:

7.8.6.1 Если по результатам испытания или калибровки делается заключение о соответствии спецификации или стандарту, лаборатория должна документировать правило принятия решения, принимая во внимание уровень риска (например, ложноположительное или ложноотрицательное решение, статистические предположения), связанный с применяемым правилом принятия решения, и применить данное правило.

7.8.6.2 Лаборатория должна представить заключение о соответствии, в котором четко определено: а) к каким результатам применяется данное заключение; б) каким спецификациям, стандартам или их частям соответствует или не соответствует объект; с) правило принятия решения, которое было использовано (если оно не содержится в соответствующих спецификации или стандарте).

Примечание – Для получения дополнительной информации см. ISO/IEC Guide 98-4 Uncertainty of measurement – Part 4: Role of measurement uncertainty in conformity assessment (Неопределенность измерений. Часть 4. Роль неопределенности измерения в оценке соответствия).

Однако дополнительная информация из указанного источника представляет собой пространное обсуждение использования расширенной неопределенности измерения в правилах принятия решения, известных в теории контроля. В итоге обсуждение пришло к определению достоверности результата через долю распределения вероятностей контролируемого свойства в пределах поля допуска, как это указано в МИ 187-86 «Методические указания ГСИ. Средства измерений. Критерии достоверности и параметры методик поверки» и МИ 188-86 «Методические указания ГСИ. Средства измерений. Установление значений параметров методик поверки» для оперативной характеристики.

В Guide 98-4 отмечено, что байесовская теория вероятностей и «результаты применения этой теории приведены без детального вывода или доказательства» ввиду ссылок на «достаточное количество литературы» и указано следующее.

В.1.1 Во многих случаях оценки соответствия знания об измеряемой величине Y , известные перед проведением измерений, не рассматриваются явно при принятии решений о приёмке/браковке. В таких случаях, которые типичны для измерений, анализируемых в соответствии с принципами, описанными в GUM, существует неявное предположение, что априорное знание об Y настолько ограничено, что оно оказывает весьма незначительное влияние на конечный результат принятия решения.

Это утверждение, а не только субъективность выбора вида априорного распределения вероятностей, определённая в ISO/IEC 31010:2009 “Risk management – Risk assessment techniques” и ГОСТ Р ИСО/МЭК 31010-2011 «Менеджмент риска. Методы оценки риска» в качестве основного фактора

неприменимости подхода Байеса, делает этот подход ещё и бессмысленным.

Тем не менее, несмотря на то, что в ГОСТ Р 58771-2019 «Менеджмент риска. Технологии оценки риска» радикальные оценки ISO/IEC 31010:2009 “Risk management – Risk assessment techniques” и ГОСТ Р ИСО/МЭК 31010-2011 «Менеджмент риска. Методы оценки риска» о неприменимости подхода Байеса и метода Монте-Карло были удалены, а недостатки были переименованы ISO 31010:2019 “Risk management – Risk assessment techniques” в ограничения, в рамках моментного подхода решение проблемы формата представления неопределённостей является, мягко говоря, весьма приближённым.

О приближённых оценках вероятностных распределений. Один из принципов доверительного оценивания заключается в использовании неравенств в тех случаях, когда строгое решение задачи невозможно или излишне сложно. Такая оценка распределения вероятностей в измерительных задачах, решаемых различными методами в сочетании с методом многократных измерений, дана в Рекомендации по метрологии МИ 2916-2005 «ГСИ. Идентификация распределений вероятностей при решении измерительных задач» на основе контурных оценок [20, 21] и формулы обращения [22].

Для этого данные о величинах в измерительных задачах были разделены на наблюдаемые, измеряемые в ходе решения, и ненаблюдаемые, получаемые из сторонних источников (их можно суммировать по тем же правилам, что и неисключённые систематические погрешности (НСП)). В задачах поверки и калибровки СИ, а также их испытаний в целях утверждения типа к наблюдаемым величинам относятся протоколируемые данные основных и вспомогательных измерений, а также разности показаний СИ и эталона как случайная составляющая погрешности.

В МИ 1317-2004 «ГСИ. Результаты и характеристики погрешности измерений. Формы представления. Способы использования при испытаниях образцов продукции и контроле их параметров» указано следующее.

1.4 В качестве функции плотности распределения вероятностей погрешности измерений принимают закон, близкий к нормальному усечённому, если имеются основания предполагать, что реальная функция плотности распределения – функция симметричная, одномодальная, отличная от нуля на конечном интервале значений аргумента, и другая информация о плотности распределения отсутствует.

1.4.1 Если имеется информация о том, что хотя бы одно из указанных в 1.4 условий не выполнено, принимают другую аппроксимацию плотности распределения вероятностей погрешности измерений, более соответствующую решаемой измерительной задаче.

1.4.2 В качестве функции плотности распределения вероятностей составляющих погрешности измерений, для которых известны только пределы допускаемых значений, т. е. границы интервала, в пределах которых находится соответствующая составляющая погрешности

измерений с вероятностью 1, при расчётах характеристик погрешности измерений принимают закон равномерной плотности, если отсутствует информация об ином виде распределения.

На практике решение о приёмке/браковке СИ определяют крайние члены вариационного ряда случайной составляющей основной погрешности СИ, по которым можно определить параметры положения $\hat{\theta}_{R1}$ и рассеяния $\hat{\theta}_{R2}$ эквивалентного равномерного распределения:

$$\hat{\theta}_{R1} = 0,5(\hat{\xi}_{(N)} + \hat{\xi}_{(1)});$$

$$\hat{\theta}_{R2} = 0,5(N+1)/(N-1)(\hat{\xi}_{(N)} - \hat{\xi}_{(1)}).$$

МИ 83-76 «Методика определения параметров поверочных схем» для вероятностей ошибок 1-го и 2-го рода указывает, что при равномерном распределении погрешностей образцовых СИ (между установленными для них допусками) значения вероятностей этих ошибок получаются «большими, чем при других формах распределений погрешностей. ... С этой точки зрения это распределение будет наилучшим».

Согласно ГОСТ Р 8.736-2011 «Измерения прямые многократные. Методы обработки результатов измерений. Основные положения»

8.2 Границы НСП Θ_{Σ} оценки измеряемой величины при наличии менее трёх ($m < 3$) НСП, каждая из которых представлена границами Θ_j , оценивают по формуле

$$\Theta_{\Sigma} = \pm \sum_{j=1}^m |\Theta_j|.$$

8.3 При наличии трёх и более составляющих НСП распределение внутри границ этих составляющих (погрешности средств измерений каждого типа, погрешности поправок и т. д.) рассматривают как распределение случайных величин. При отсутствии данных о виде распределения случайных величин их распределения принимают равномерными.

8.4 При числе составляющих НСП более или равном трём ($m \geq 3$) доверительные границы НСП $\Theta_{\Sigma}(P)$ оценки измеряемой величины вычисляют путём построения композиции НСП. При равномерном распределении НСП доверительные границы $\Theta_{\Sigma}(P)$ допускается вычислять по формуле

$$\Theta_{\Sigma}(P) = \pm k \sqrt{\sum_{j=1}^m \Theta_j^2},$$

где Θ_j – граница j -й НСП; k – коэффициент, определяемый принятой доверительной вероятностью, числом составляющих НСП и их соотношением между собой. Для доверительной вероятности $P=0,95$ коэффициент k пренебрежимо мало зависит от числа составляющих НСП и их соотношения, поэтому при указанной доверительной вероятности коэффициент k принимают равным 1,1.

Для доверительной вероятности $P=0,99$ при $m > 4$ коэффициент k принимают равным 1,4, если же $m \leq 4$, то k определяют по графику в стандарте.

Вместе с тем формулу обращения [22] можно представить свёрткой [21]:

$$f_X(x) * f_R(x) = \frac{F_X(x-a) - F_X(x-b)}{b-a}, \quad (1)$$

где $F_X(x)$ – функция распределения вероятностей наблюдаемой составляющей искомой величины, которой соответствует плотность $f_X(x)$; $f_R(x)$ – плотность равномерного распределения вероятностей на интервале $[a, b]$. Физический смысл свёртки (1) – распределение суммы независимых случайных величин: величины « X » с функцией распределения вероятностей $F_X(x)$ и величины « R » с плотностью распределения вероятностей $f_R(x) = (b-a)^{-1} [1(x-a) - 1(x-b)]$, где $1(x-a) = \{0, x < a; 1, x \geq a\}$; $1(x-b) = \{0, x < b; 1, x \geq b\}$.

В свёртке (1) можно использовать усечение распределения $F_X(x)$:

$$F_{[X]}(x) = \left\{ F_X(x) - F_X(a) + \frac{x-a}{b-a} [1 - F_X(b) + F_X(a)] \right\} \times \\ \times [1(x-a) - 1(x-b)]. \quad (2)$$

Данные статистического ряда измерений можно рассматривать как решётчатую функцию, и метод максимального правдоподобия будет всегда давать оценки функции (2) в пределах крайних членов вариационного ряда.

Принцип доверительности не будет нарушен, если наблюдаемые составляющие искомой в измерительной задаче величины будут представлены эквивалентными равномерными распределениями, а их композиция – формулой для границ $\Theta_{\Sigma}(P)$. Тогда построение свёртки принципиально упрощается. А для гипотезы о равномерном распределении наблюдаемой составляющей задача вообще очень просто решается графически на основе построения контурной оценки погрешности неадекватности [8, 23].

К рассмотренному в статье [8] примеру построения свёртки распределений по данным [6, п. Н3] на основе гипотезы о равномерном распределении наблюдаемой составляющей функции поправок термометра остаётся добавить, что тождественный результат может быть получен графическим методом. Достоинством графических методов является возможность получения решения в тех случаях, когда аналитические методы оказываются невозможными или неприемлемыми. Кроме того, для графических методов есть ряд признаков, помогающих сразу заметить грубые ошибки: асимметрия плотности распределения свёртки, нарушение условий нормирования и т. п. Расчёты графическим методом возможны по двум схемам, когда в поверочных точках эталонам приписывают максимальное значение нормализованной границы погрешности (схема равноточных измерений) или нормализованные значения (схема неравноточных измерений). Как показывает практика, графический метод расчёта характеристик погрешности (полноформатной неопределённости) осваивается поверителями и специалистами по калибровке СИ без особых трудностей.

Заключение. Признание в ГОСТ Р ИСО 3534-1-2019 распределения вероятностей в качестве наиболее полного представления неопределённостей в измерительных задачах могло бы показаться неожиданным, если бы не череда казусов и нерешённых проблем, сопровождающих GUM с момента его появления в отечественной метрологии [14–16, 24]. А требование учёта рисков статистических предположений, ложноположительных и ложноотрицательных решений согласно ГОСТ ISO/IEC 17025-2019 в деятельности калибровочных и испытательных лабораторий привело концепцию неопределённости в тупик, выход из которого пока просматривается только в полноформатном представлении неопределённостей распределениями вероятностей [25].

Список источников

1. Международный словарь по метрологии: основные и общие понятия и соответствующие термины: пер. с англ. и фр. / Всерос. науч.-исслед. ин-т метрологии им. Д. И. Менделеева, Белорус. гос. ин-т метрологии. Изд. 2-е испр. СПб.: НПО Профессионал, 2010. 82 с.
2. International Vocabulary of Metrology – Basic and General Concepts and Associated Terms, VIM, 2nd ed., 1993.
3. Руководство по выражению неопределённости измерения: Пер. с англ. / Науч. ред. проф. В. А. Слаев. СПб.: ВНИИМ им. Д. И. Менделеева, 1999. 134 с.
4. Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement (GUM), First ed., ISO, Switzerland, 1993, 101 p.
5. Левин С. Ф. Чего на самом деле должны опасаться ведущие специалисты по внедрению неопределённости в отечественные измерения // Измерительная техника. 2008. № 12. С. 61–64.
6. Математическая энциклопедия. В 5 томах / Гл. ред. И. М. Виноградов. Т. 4. Ок–Сло. М.: Советская энциклопедия, 1984. 1216 стб.
7. Математическая энциклопедия. В 5 томах / Гл. ред. И. М. Виноградов. Т. 2. Д–Коо. М.: «Советская энциклопедия», 1979. 1104 стб.
8. Левин С. Ф. Дефинициальная неопределённость и погрешность неадекватности // Измерительная техника. 2019. № 11. С. 7–17. <https://doi.org/10.32446/0368-1025it.2019-11-7-17>
9. Вероятность и математическая статистика: Энциклопедия / Гл. ред. Ю. В. Прохоров. М.: Большая Российская энциклопедия, 1999. 910 с.
10. Математическая энциклопедия. В 5 томах / Гл. ред. И. М. Виноградов. Т. 5. Служ–Я–М. М.: Советская энциклопедия, 1984. 1246 стб.
11. Wilks S. S., Statistical prediction with special reference to the problem of tolerance limits, *Annals of Mathematical Statistics*, 1942, vol. 13, pp. 400–409.
12. Robbins H., On distribution-free tolerance limits in random sampling, *Annals of Mathematical Statistics*, 1944, vol. 15, pp. 214–216.
13. Scheffé H., Tukey J. W., Nonparametric estimation. I. Validation of order statistics, *Annals of Mathematical Statistics*, 1945, vol. 16, pp. 187–192.

14. Левин С. Ф. Руководство по выражению неопределённости измерения: проблемы, нереализованные возможности и ревизия. Часть 1. Терминологические проблемы // Измерительная техника. 2018. № 2. С. 3–8.

<https://doi.org/10.32446/0368-1025it.2018-2-3-8>

15. Левин С. Ф. Руководство по выражению неопределённости измерения: проблемы, нереализованные возможности и ревизия. Часть 2. Вероятностно-статистические проблемы // Измерительная техника. 2018. № 4. С. 7–12.

<https://doi.org/10.32446/0368-1025it.2018-4-7-12>

16. Левин С. Ф. Руководство по выражению неопределённости измерения: проблемы, нереализованные возможности и ревизия. Часть 3. Приведение к общему терминологическому знаменателю // Измерительная техника. 2019. № 7. С. 14–22. <https://doi.org/10.32446/0368-1025it.2019-7-14-22>

17. Jacobi C. G. J., De Determinantibus functionalibus, *Journal für reine und angewandte Mathematik*, 1841, Bd. 22, s. 319–359. (In Lat.)

18. Физическая энциклопедия. В 5 томах / Гл. ред. А. М. Прохоров. Т. 3 Магнитоплазменный – Пойнтинга теорема. М.: Большая Российская энциклопедия, 1992. 672 с.

19. Марков А. А. Избранные труды по теории непрерывных дробей и теории функций, наименее уклоняющихся от нуля. М.–Л.: Гостехиздат, 1948. С. 292–375.

20. Левин С. Ф. Идентификация распределений вероятностей // Измерительная техника. 2005. № 2. С. 3–9.

21. Левин С. Ф. Обеспечение единства измерений при поверке средств измерений // Измерительная техника. 2005. № 8. С. 14–18.

22. Лукач Е. Характеристические функции: Пер. с англ. В. М. Золотарева. М.: Наука, 1979. 424 с.

23. Левин С. Ф. Измерительная задача калибровки средства измерений для заданных условий // Измерительная техника. 2021. № 4. С. 9–15.

<https://doi.org/10.32446/0368-1025it.2021-4-9-15>

24. Левин С. Ф. Метрология. Математическая статистика. Легенды и мифы 20-го века: Легенда о неопределённости // Партнёры и конкуренты. 2001. № 1. С. 13–25.

25. Левин С. Ф. Неадекватность математических моделей объектов измерений и расчёты риска согласно ГОСТ ISO/IEC 17025-2019 // Измерительная техника. 2020. № 7. С. 13–21. <https://doi.org/10.32446/0368-1025it.2020-7-13-21>

References

1. JCGM 200:2008. International Vocabulary of Metrology – Basic and General Concepts and Associated Terms, VIM, 3rd ed., 2007.
2. International Vocabulary of Metrology – Basic and General Concepts and Associated Terms, VIM, 2nd ed., 1993.
3. *Rukovodstvo po vyrazheniyu neopredelyonnosti izmereniya*, Ed. prof. V. A. Slaev, S. Petersburg, D. I. Mendelev VNIIM Publ., 1999, 134 p. (In Russ.)
4. Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement (GUM), First ed., ISO, Switzerland, 1993, 101 p.
5. Levin S. F., Chego na samom dele dolzhny opasat'sya vedushchie specialisty po vnedreniyu neopredelennosti v otechest-

vennye izmereniya, *Izmeritel'naya tekhnika*, 2008, no. 12, pp. 61–64. (In Russ.)

6. *Matematicheskaya enciklopediya*, in 5 vols, vol. 4, ed. I. M. Vinogradov, Moscow, Sovetskaya enciklopediya Publ., 1984, 1216 co. (In Russ.)

7. *Matematicheskaya enciklopediya*, in 5 vols, vol. 2, ed. I. M. Vinogradov, Moscow, Sovetskaya enciklopediya Publ., 1979, 1104 co. (In Russ.)

8. Levin S. F., *Measurement Techniques*, 2019, vol. 62, no. 11, pp. 933–944. <https://doi.org/10.1007/s11018-020-01716-0>

9. *Veroyatnost' i matematicheskaya statistika: Enciklopediya*, ed. Yu. V. Prohorov, Moscow, Bol'shaya Rossijskaya enciklopediya Publ., 1999, 910 p. (In Russ.)

10. *Matematicheskaya enciklopediya*, in 5 vols, vol. 5, ed. I. M. Vinogradov, Moscow, Sovetskaya enciklopediya Publ., 1984, 1248 co. (In Russ.)

11. Wilks S. S., Statistical prediction with special reference to the problem of tolerance limits, *Annals of Mathematical Statistics*, 1942, vol. 13, pp. 400–409.

12. Robbins H., On distribution-free tolerance limits in random sampling, *Annals of Mathematical Statistics*, 1944, vol. 15, pp. 214–216.

13. Scheffé H., Tukey J. W., Nonparametric estimation. I. Validation of order statistics, *Annals of Mathematical Statistics*, 1945, vol. 16, pp. 187–192.

14. Levin S. F., *Measurement Techniques*, 2018, vol. 61, no. 2, pp. 91–97. <https://doi.org/10.1007/s11018-018-1393-6>

15. Levin S. F., *Measurement Techniques*, 2018, vol. 61, no. 4, pp. 327–334. <https://doi.org/10.1007/s11018-018-1429-y>

16. Levin S. F., *Rukovodstvo po vyrazheniyu neopredelennosti izmereniya: problemy, nerealizovannye vozmozhnosti i reviziya. Chast' 3. Privedenie k obshchemu terminologicheskomu znacheniyu*, *Izmeritel'naya tekhnika*, 2019, no. 7, pp. 14–22. (In Russ.) <https://doi.org/10.32446/0368-1025it.2019-7-14-22>

17. Jacobi C. G. J., De Determinantibus functionalibus, *Journal für reine und angewandte Mathematik*, 1841, Bd. 22, s. 319–359. (In Lat.)

18. *Fizicheskaya enciklopediya*, in 5 vols, vol. 3, ed. A. M. Prohorov, Moscow, Bol'shaya Rossijskaya enciklopediya Publ., 1992, 672 p. (In Russ.)

19. Markov A. A. *Izbrannye trudy po teorii nepreryvnyh drobez i teorii funkciy nai-meney uklonyayushchihsya ot nulya*, Moscow–Leningrad, Gostekhizdat Publ., 1948, pp. 292–375. (In Russ.)

20. Levin S. F., *Measurement Techniques*, 2005, vol. 48, no. 2, pp. 101–111. <https://doi.org/10.1007/s11018-005-0106-0>

21. Levin S. F., *Measurement Techniques*, 2005, vol. 48, no. 8, pp. 754–759. <https://doi.org/10.1007/s11018-005-0216-8>

22. Lukacs E., *Characteristics functions*, 2nd ed., revised & enlarged, London, Griffin, 1970, 350 p.

23. Levin S. F., *Measurement Techniques*, 2021, vol. 64, no. 4, pp. 273–281.

<https://doi.org/10.1007/s11018-021-01929-x>

24. Levin S. F., *Metrologiya. Matematicheskaya statistika. Legendy i mify 20-go veka: Legenda o neopredelennosti, Partnery i konkurenty*, 2001, no. 1, pp. 13–25. (In Russ.)

25. Levin S. F., *Measurement Techniques*, 2020, vol. 63, no. 7, pp. 1–10. <https://doi.org/10.1007/s11018-020-01819-8>

Статья поступила в редакцию 14.02.2022; одобрена после рецензирования 27.02.2022; принята к публикации 28.02.2022.
The article was submitted 14.02.2022; approved after reviewing 27.02.2022; accepted for publication 28.02.2022.