

Научная статья

УДК 519.7

<https://doi.org/10.32446/0368-1025it.2022-2-3-7>

Нетрадиционная методика выбора коэффициентов размытости ядерных функций в непараметрической регрессии

Александр Васильевич Лапко^{1✉}, Василий Александрович Лапко²

^{1, 2} Институт вычислительного моделирования Сибирского отделения РАН, Красноярск, Россия

^{1, 2} Сибирский государственный университет науки и технологий имени академика М. Ф. Решетнёва, Красноярск, Россия

¹lapko@icm.krasn.ru ✉, <https://orcid.org/0000-0002-0664-3870>

²valapko@yandex.ru, <http://orcid.org/0000-0001-6938-9323>

Аннотация. Традиционная методика выбора коэффициентов размытости ядерных функций в непараметрической регрессии основана на минимизации средней квадратической ошибки аппроксимации искомой зависимости по исходным статистическим данным. С увеличением объёма обучающей выборки значений переменных восстанавливаемой зависимости вычислительные затраты при оптимизации непараметрической регрессии значительно увеличиваются. Предложена нетрадиционная методика выбора коэффициентов размытости непараметрической регрессии, оптимальных для ядерных плотностей вероятностей переменных восстанавливаемой зависимости. В качестве критерия оптимальности при выборе коэффициентов размытости ядерных плотностей вероятностей использованы статистические оценки средних квадратических отклонений совместной плотности вероятности переменных восстанавливаемой зависимости. Предложенная методика позволила избежать вычислений ошибки аппроксимации восстанавливаемой зависимости непараметрической регрессией, что подтверждено результатами вычислительных экспериментов. Полученные результаты позволяют использовать методику быстрой оптимизации ядерных оценок плотностей вероятностей при синтезе непараметрической регрессии.

Ключевые слова: непараметрическая регрессия, ядерные оценки плотности вероятности, коэффициенты размытости ядерных функций, быстрые алгоритмы оптимизации

Для цитирования: Лапко А. В., Лапко В. А. Нетрадиционная методика выбора коэффициентов размытости ядерных функций в непараметрической регрессии // Измерительная техника. 2022. № 2. С. 3–7. <https://doi.org/10.32446/0368-1025it.2022-2-3-7>

An unconventional method for selecting the blur coefficients of kernel functions in nonparametric regression

Aleksandr V. Lapko^{1✉}, Vasiliy A. Lapko²

^{1, 2} Institute of Computational Modelling, Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Krasnoyarsk, Russia

^{1, 2} Reshetnev Siberian State University of Science and Technology, Krasnoyarsk, Russia

¹lapko@icm.krasn.ru ✉, <https://orcid.org/0000-0002-0664-3870>

²valapko@yandex.ru, <http://orcid.org/0000-0001-6938-9323>

Abstract. The traditional method for selecting the blur coefficients of kernel functions in nonparametric regression is based on minimizing the root mean square error in the approximation of the desired dependence from the initial statistical data. With an increase in the volume of the training sample of the values of the variables of the restored dependence, the computational costs of optimizing nonparametric regression increase significantly. An unconventional method for selecting the nonparametric regression blurriness coefficients optimal for the kernel probability densities of the variables of the recovered dependence is proposed. Statistical estimates of the mean square deviations of the joint probability density of the variables of the restored dependence were used as an optimality criterion for selecting the blur coefficients of kernel probability densities. The proposed technique made it possible to avoid calculating the approximation error of the restored dependence by nonparametric regression, which is confirmed by the results of computational experiments. The results obtained make it possible to use the method of fast optimization of kernel estimates of probability densities in the synthesis of nonparametric regression.

Keywords: nonparametric regression, kernel probability density estimates, blur coefficients of kernel functions, fast optimization algorithms

Введение. Вычислительная эффективность непараметрических алгоритмов обработки информации, основанных

на ядерных оценках плотности вероятности типа Розенблатта-Парзена, во многом определяется объёмом статистических

данных и снижается по мере его увеличения. Поэтому в условиях выборок большого объема появляются трудности синтеза непараметрических моделей и алгоритмов принятия решений. Для исключения возникающих трудностей используются принципы декомпозиции исходных статистических данных и технология параллельных вычислений [1, 2].

Перспективным направлением повышения вычислительной эффективности непараметрических моделей и алгоритмов принятия решений является разработка быстрых методов выбора коэффициентов размытости ядерных функций. Впервые решение данной проблемы, основанное на результатах анализа формулы оптимального коэффициента размытости ядерных функций непараметрической оценки плотности вероятности, предложено в работе [3]. Основная составляющая указанной формулы зависит от нелинейного функционала плотности вероятности, который является константой для одномодальных и симметричных плотностей вероятностей и не зависит от их параметров. Разработаны процедуры быстрого выбора коэффициентов размытости ядерных оценок плотностей вероятностей для симметричных и несимметричных законов распределения случайных величин [4–10]. Получены зависимости нелинейного функционала восстанавливаемой плотности вероятности от оценок коэффициентов контрэксцесса и асимметрии анализируемых случайных величин [11]. Эти результаты обобщены при синтезе непараметрической оценки уравнения разделяющей поверхности в двухальтернативной задаче распознавания образов [12].

Созданы условия для развития методики быстрого выбора коэффициентов размытости ядерных функций при синтезе в непараметрической регрессии. Однако для её реализации необходимо обосновать возможность замены задачи выбора коэффициентов размытости ядерных функций из условия минимума ошибки аппроксимации восстанавливаемой зависимости на определение коэффициентов размытости по результатам оптимизации непараметрических оценок плотностей вероятностей анализируемых случайных величин.

Цель работы – обосновать возможность выбора коэффициентов размытости ядерных функций в непараметрической регрессии из условия минимума оценок средних квадратических ошибок аппроксимации плотностей вероятностей анализируемых случайных величин.

Непараметрическая оценка кривой регрессии. Пусть имеется выборка $V = (x^i, y^i, i = 1, n)$ статистически независимых наблюдений случайных величин (x, y) , распределённых с неизвестной плотностью вероятности $p(x, y)$. Необходимо построить непараметрическую оценку $\bar{y} = \bar{\varphi}(x)$ однозначной стохастической зависимости $y = \varphi(x)$.

Минимум байесовского удельного риска $r = \int W(y, \bar{y}) p(y/x) dy$ по $\bar{y}$ при квадратической функции потерь $W(y, \bar{y}) = (y - \bar{y})^2$ определяется условным математическим ожиданием

$$\bar{y} = \frac{1}{p(x)} \int y p(x, y) dy. \quad (1)$$

Здесь и далее бесконечные пределы интегрирования опускаются.

Плотности вероятностей $p(x, y)$, $p(x)$ в оптимальной решающей функции (1) восстановим с использованием непараметрических оценок Розенблатта-Парзена:

$$\bar{p}(x, y) = \frac{1}{nc_1c_2} \sum_{i=1}^n \Phi\left(\frac{x-x^i}{c_1}\right) \Phi\left(\frac{y-y^i}{c_2}\right); \quad (2)$$

$$\bar{p}(x) = \frac{1}{nc} \sum_{i=1}^n \Phi\left(\frac{x-x^i}{c}\right), \quad (3)$$

где c_1, c_2, c – коэффициенты размытости ядерных функций; n – объём выборки V .

Ядерные функции $\Phi(u)$ в непараметрических статистиках (2), (3) удовлетворяют условиям

$$\begin{cases} \Phi(u) = \Phi(-u); \\ 0 \leq \Phi(u) < \infty; \\ \int \Phi(u) du = 1; \\ \int u^m \Phi(u) du < \infty; \\ 0 \leq m < \infty, \end{cases}$$

где m – степень аргумента u ядерной функции $\Phi(u)$.

Подставляя в выражение (1) ядерные оценки плотностей вероятностей (2), (3) получим непараметрическую регрессию

$$\bar{y} = \bar{\varphi}(x) = \sum_{i=1}^n y^i \Phi\left(\frac{x-x^i}{c_1}\right) / \sum_{i=1}^n \Phi\left(\frac{x-x^i}{c}\right). \quad (4)$$

При выполнении данного преобразования учитывается следующее условие:

$$\frac{1}{c_2} \int y \Phi\left(\frac{y-y^i}{c_2}\right) dy = y^i,$$

где y^i – математическое ожидание y с плотностью вероятности ядерной функции $1/c_2 \Phi((y-y^i)/c_2)$.

Для выполнения условия нормированности

$$\sum_{i=1}^n \Phi\left(\frac{x-x^i}{c_1}\right) / \sum_{i=1}^n \Phi\left(\frac{x-x^i}{c}\right) = 1$$

в непараметрической регрессии (4) необходимо принять равенство $c = c_1$. Тогда непараметрическую регрессию (4) запишем в традиционном виде [13, 14]:

$$\bar{y} = \bar{\varphi}(x) = \sum_{i=1}^n y^i \Phi\left(\frac{x-x^i}{c_1}\right) / \sum_{i=1}^n \Phi\left(\frac{x-x^i}{c_1}\right). \quad (5)$$

Коэффициенты размытости c_1 ядерной функции убывают с увеличением объёма n выборки V . Традиционный подход выбора коэффициента размытости c_1 ядерных функций в статистике (5) основан на минимизации средней квадратической ошибки аппроксимации $y = \varphi(x)$ её моделью (5):

$$\bar{W}(c_1) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n [y^j - \bar{\varphi}(x^j)]^2, \quad (6)$$

где $\bar{\varphi}(x^j)$ определяется выражением (5) при условии $i \neq j$.

Определим оптимальное значение коэффициента размытости $c_1 = c'_1$ ядерных функций в статистике (5), которое в паре с коэффициентом c_2 обеспечивает минимум среднего квадратического отклонения (СКО) $\bar{p}(x, y)$ от $p(x, y)$:

$$W_2(c'_1, c_2) = \iint [\bar{p}(x, y) - p(x, y)]^2 dx dy, \quad (7)$$

где c'_1 – коэффициент размытости ядерных функций для аргумента x в непараметрической оценке $\bar{p}(x, y)$.

В работах [15–18] обоснована возможность определения оптимальных значений c'_1, c_2 путём минимизации статистической оценки критерия (7):

$$\begin{aligned} \bar{W}_2(c'_1, c_2) = & \frac{1}{n^2(c'_1)^2 c_2^2} \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \int \Phi\left(\frac{x-x^j}{c'_1}\right) \Phi\left(\frac{x-x^i}{c'_1}\right) dx \times \\ & \times \int \Phi\left(\frac{y-y^j}{c_2}\right) \Phi\left(\frac{y-y^i}{c_2}\right) dy - \\ & - \frac{2}{n^2 c'_1 c_2} \sum_{j=1}^n \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n \Phi\left(\frac{x^j-x^i}{c'_1}\right) \Phi\left(\frac{y^j-y^i}{c_2}\right). \end{aligned} \quad (8)$$

Например, при ступенчатой ядерной функции

$$\frac{1}{c'_1} \Phi\left(\frac{x-x^i}{c'_1}\right) = \begin{cases} 0,5 c'_1, & \text{если } |x-x^i| < c'_1; \\ 0, & \text{если } |x-x^i| \geq c'_1, \end{cases}$$

значения составляющих критерия (8) определяются выражениями

$$\begin{aligned} \int \Phi\left(\frac{x-x^j}{c'_1}\right) \Phi\left(\frac{x-x^i}{c'_1}\right) dx &= \begin{cases} \frac{2c'_1 - |x^j - x^i|}{4}, & \text{если } |x^j - x^i| < 2c'_1; \\ 0, & \text{если } |x^j - x^i| \geq 2c'_1, \end{cases} \\ \Phi\left(\frac{x^j - x^i}{c'_1}\right) &= \begin{cases} 0,5, & \text{если } |x^j - x^i| < c'_1; \\ 0, & \text{если } |x^j - x^i| \geq c'_1. \end{cases} \end{aligned}$$

Обозначим через $\bar{c}'_1, \bar{c}_2$ оценки оптимальных коэффициентов размытости ядерных функций непараметрической статистики $\bar{p}(x, y)$, минимизирующих критерий (8).

Принятое предположение о возможности выбора коэффициента размытости ядерных функций непараметрической регрессии (5) из условия минимума критерия (8) имеет объективную основу. Действительно, если определены ядерные оценки плотностей вероятностей $\bar{p}(x, y)$, $\bar{p}(x)$ и их оптимальные коэффициенты размытости, то непараметрическая регрессия, как оценка решающей функции (1), не требует использования критерия (6) при оптимизации статистики (5).

В качестве альтернативы рассмотрим возможность выбора оптимального коэффициента размытости $\bar{c}$ в статистике (5) при минимизации оценки СКО $\bar{p}(x)$ от $p(x)$

$$\begin{aligned} \bar{W}_1(c) = & \frac{1}{n^2 c^2} \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \int \Phi\left(\frac{x-x^j}{c}\right) \Phi\left(\frac{x-x^i}{c}\right) dx - \\ & - \frac{2}{n^2 c} \sum_{j=1}^n \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n \Phi\left(\frac{x^j - x^i}{c}\right). \end{aligned} \quad (9)$$

Вычислительная эффективность выбора оптимальных коэффициентов размытости ядерных функций из условий минимума ошибки аппроксимации (6) и критериев (8), (9) соизмеримы. Однако предлагаемый подход позволяет использовать результаты быстрой оптимизации ядерных оценок плотностей вероятностей [9–12] в задаче синтеза непараметрической регрессии, что важно при обработке данных большого объёма.

Анализ результатов вычислительных экспериментов.

Для проверки возможности замены задачи оптимизации непараметрической регрессии по традиционной методике на выбор коэффициентов размытости ядерных функций из условия минимума СКО $\bar{p}(x, y)$ либо $\bar{p}(x)$ проведём серию вычислительных экспериментов.

При формировании выборки $V = (x^i, y^i, i = \overline{1, n})$ датчики случайных величин x и y определим как

$$\begin{cases} x = \varepsilon; \\ y = F(x) + \sigma \left(\sum_{j=1}^r \varepsilon_j^j - 0,5r \right) 6/\sqrt{3r}, \end{cases} \quad (10)$$

где $F(x) = 3 - x + \exp[-20(x-0,5)^2]$ – восстанавливаемая зависимость; $\varepsilon \in [0, 1]$, $\varepsilon_1 \in [0, 1]$ – значения случайных величин с равномерными законами распределения; σ – СКО помехи с гауссовской плотностью вероятности, накладываемой на $F(x)$; значение параметра $r = 12$.

Объём n исходных статистических данных выборки V при организации вычислительных экспериментов определим значениями 100, 300, 500. При синтезе непараметрической регрессии используем оптимальные ядерные функции В. А. Епанечникова [20]. При конкретном объёме V значения средних относительных ошибок аппроксимации стохастической зависимости $F(x)$ для традиционного и предложенных методов оптимизации непараметрической регрессии (5) вычислим 50 раз, результаты вычислений усредним.

Среднюю относительную ошибку аппроксимации нелинейного полинома $F(x)$ (10) непараметрической регрессией (5) при традиционном методе оптимизации обозначим как

$$\bar{W}(c_1) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N |\bar{p}(x^j) - F(x^j)| / F(x^j), \quad (11)$$

где $N = 10000$ – объём контрольных значений случайных величин (x, y) .

Пусть при синтезе непараметрической регрессии (5) используется коэффициент размытости $\bar{c}$, который минимизирует критерий (9). В этих условиях среднюю относительную ошибку аппроксимации $F(x)$ непараметрической регрессией типа (5) определим как $\bar{W}_1(\bar{c})$. По аналогии обозначим $\bar{W}_2(\bar{c}_1)$ – значения средней относительной ошибки аппроксимации полинома $F(x)$ статистикой (5) при значении $\bar{c}'_1$, который в паре с коэффициентом размытости $\bar{c}_2$ минимизирует критерий (8). Вычислительные эксперименты в условиях конкретных объёмов исходных данных n и СКО σ помех, накладываемых на функцию $F(x)$, проведём 50 раз. Соответствующие им значения критериев $\bar{W}(\bar{c}_1)$, $\bar{W}_1(\bar{c})$, $\bar{W}_2(\bar{c}'_1)$ типа (11) усредним.

Результаты сравнения традиционного и предложенного методов выбора коэффициентов размытости непараметрической регрессии

n	σ	Ошибки аппроксимации			Коэффициенты размытости		
		$\bar{W}(\bar{c}_1)$	$\bar{W}_1(\bar{c})$	$\bar{W}_2(\bar{c}_1)$	$\bar{c}_1$	$\bar{c}$	$\bar{c}_1$
100	0	0,0005	0,0179	0,0028	0,0100	0,08	0,0300
	0,1	0,0097	0,0183	0,0098	0,0350	0,08	0,0490
	0,2	0,0167	0,0203	0,0165	0,0472	0,08	0,0640
	0,3	0,0272	0,0260	0,0256	0,0522	0,08	0,0768
300	0	0,0003	0,0074	0,0003	0,0100	0,05	0,0100
	0,1	0,0061	0,0083	0,0057	0,0284	0,05	0,0300
	0,2	0,0107	0,0105	0,0101	0,0370	0,05	0,0402
	0,3	0,0158	0,0139	0,0141	0,0388	0,05	0,0508
500	0	0,0001	0,0048	0,0001	0,0010	0,04	0,0060
	0,1	0,0051	0,0058	0,0048	0,0248	0,04	0,0229
	0,2	0,0097	0,0085	0,0085	0,0302	0,04	0,0349
	0,3	0,0120	0,0107	0,0108	0,0358	0,04	0,0436

Полученные усреднённые значения этих критериев обозначим $\bar{W}(\bar{c}_1)$, $\bar{W}_1(\bar{c})$, $\bar{W}_2(\bar{c}_1)$ (таблица). При анализе достоверности отличия значений $\bar{W}(\bar{c}_1)$ от $\bar{W}_1(\bar{c})$ и $\bar{W}_2(\bar{c}_1)$ используем методику сравнения двух средних произвольно распределённых генеральных совокупностей с уровнем значимости 0,05 [19].

Представленные в таблице средние значения коэффициентов размытости $\bar{c}_1$, $\bar{c}$, $\bar{c}_1$ определим по результатам вычислительных экспериментов. Тёмно-серым фоном в столбцах $\bar{W}_1(\bar{c})$, $\bar{W}_2(\bar{c}_1)$ выделены элементы, количественные характеристики которых достоверно не отличаются от соответствующих значений критерия $\bar{W}(\bar{c}_1)$. Светлым фоном отмечены элементы таблицы, в которых достоверно выполняются соотношения $\bar{W}_1(\bar{c}) < \bar{W}(\bar{c}_1)$ либо $\bar{W}_2(\bar{c}_1) < \bar{W}(\bar{c}_1)$. Например, при $n=100$ и $\sigma=0,1$ значения $\bar{W}(\bar{c}_1)=0,0097$, $\bar{W}_2(\bar{c}_1)=0,0098$ являются близкими и достоверно не отличаются, что отмечено в соответствующем элементе столбца $\bar{W}_2(\bar{c}_1)$ тёмно-серым фоном. При $n=100$ и $\sigma=0,3$ значения $\bar{W}(\bar{c}_1)=0,0272$, а $\bar{W}_2(\bar{c}_1)=0,0256$ достоверно отличаются (столбец $\bar{W}_2(\bar{c}_1)$, серый фон). В этих условиях наблюдается преимущество выбора коэффициента размытости ядерных функций непараметрической регрессии (5) из условия минимума критерия (8) по сравнению с традиционной методикой. Значения параметров в столбцах $\bar{W}_1(\bar{c})$, $\bar{W}_2(\bar{c}_1)$, не выделенные цветным фоном, указывают на преимущество традиционной методики оптимизации непараметрической регрессии (5) по сравнению с предложенной методикой.

Использование методики выбора коэффициента размытости ядерных функций непараметрической регрессии (5) путём минимизации критерия (8) обеспечивает близкие значения $\bar{W}(\bar{c}_1)$ и $\bar{W}_2(\bar{c}_1)$ при $n=100$, $\sigma \in [0,1; 0,2]$ и $n=300$, $\sigma=0$. Достоверное преимущество данной методики по сравнению

с традиционной наблюдается в условиях $n=100$ и $\sigma=0,3$, $n=300$ и $\sigma \geq 0,1$, а также при $n=500$ и $\sigma \geq 0$.

Методика выбора коэффициента размытости ядерных функций в непараметрической регрессии, основанной на минимизации критерия (9), является менее эффективной. Её преимущество отмечается при условиях $n \in [100; 300]$ и $\sigma \geq 0,3$, а также при $n=500$ и $\sigma \geq 0,2$.

Близким значениям $\bar{W}(\bar{c}_1)$, $\bar{W}_1(\bar{c})$ и $\bar{W}_2(\bar{c}_1)$ соответствуют близкие значения коэффициентов размытости ядерных функций в непараметрической регрессии $\bar{c}_1$, $\bar{c}$ и $\bar{c}_1$.

Полученные результаты обосновывают возможность выбора коэффициента размытости ядерной функции в непараметрической регрессии из условия минимума оценки СКО непараметрической статистики $\bar{p}(x, y)$. Данный вывод создаёт основу развития методики быстрого выбора коэффициентов размытости ядерных плотностей вероятностей [9–12] на решение задачи оптимизации непараметрической регрессии.

Заключение. Предложенная методика выбора коэффициентов размытости ядерных функций непараметрической регрессии из условия минимума критерия (8)

менее чувствительна к высокому уровню помех, накладываемых на значения восстанавливаемой функции, по сравнению с традиционным подходом. Вычислительная эффективность рассматриваемых методик оптимизации непараметрической регрессии сопоставима. Однако предложенная методика позволяет использовать известные быстрые процедуры выбора коэффициентов размытости в ядерной оценке совместной плотности вероятности переменных восстанавливаемой зависимости при оптимизации непараметрической регрессии.

Полученные выводы подтверждены результатами вычислительных экспериментов в принятых условиях их организации при восстановлении нелинейной зависимости. Созданы условия разработки быстрых процедур выбора коэффициентов размытости ядерных функций непараметрической регрессии.

Список литературы

1. Зеньков И. В., Лапко А. В., Лапко В. А., Им С. Т., Тубольцев В. П., Авдеев В. Л. Непараметрический алгоритм автоматической классификации многомерных статистических данных большого объёма и его применение // Компьютерная оптика. 2021. Т. 45. № 2. С. 253–260. <https://doi.org/10.18287/2412-6179-CO-801>
2. Лапко А. В., Лапко В. А. Разработка и исследование двухуровневых непараметрических систем классификации // Автометрия. 2010. Т. 46. № 1. С. 70–78.
3. Варжапетян А. Г., Михайлова Е. Ю. Методы выбора определяющих характеристик непараметрических алгоритмов идентификации моделей надёжности сложных систем по эксплуатационным данным / Вопросы кибернетики. Вып. 094. Статистические методы в теории обеспечения эксплуатации. Сборник. Под ред. С. Ф. Левина. М.: АН СССР. Научный совет по комплексной проблеме «Кибернетика». 1982. С. 77–87.
4. Silverman B. W., *Density estimation for statistics and data analysis*, London, Chapman and Hall, 1986, 175 p.

5. Sheather S., Jones M., *Journal of Royal Statistical Society Series B*, 1991, vol. 53, no. 3, pp. 683–690.
<https://doi.org/10.1111/j.2517-6161.1991.tb01857.x>
6. Sheather S. J., *Statistical Science*, 2004, vol. 19, no. 4, pp. 588–597. <https://doi.org/10.1214/088342304000000297>
7. Terrell G. R., Scott D. W., *Journal of the American Statistical Association*, 1985, vol. 80, pp. 209–214.
<https://doi.org/10.2307/2288074>
8. Jones M. C., Marron J. S., Sheather S. J., *Journal of the American Statistical Association*, 1996, vol. 91, pp. 401–407.
<https://doi.org/10.2307/2291420>
9. Scott D. W. *Multivariate Density Estimation: Theory, Practice, and Visualization*, New York, Wiley, 2015, 384 p.
10. Лапко А. В., Лапко В. А. Модифицированный алгоритм быстрого выбора коэффициентов размытости ядерных оценок многомерных плотностей вероятностей // Измерительная техника. 2020. № 11. С. 9–13.
<https://doi.org/10.32446/0368-1025it.2020-11-9-13>
11. Лапко А. В., Лапко В. А. Оценивание нелинейного функционала от плотности вероятности при оптимизации непараметрических решающих функций // Измерительная техника. 2021. № 1. С. 14–20. <https://doi.org/10.32446/0368-1025it.2021-1-14-20>
12. Лапко А. В., Лапко В. А. Быстрый выбор коэффициентов размытости в многомерном непараметрическом алгоритме распознавания образов // Измерительная техника. 2019. № 8. С. 8–13. <https://doi.org/10.32446/0368-1025it.2019-8-8-13>
13. Härdle W., *Applied Nonparametric Regression*, Cambridge University Press, 1990, 434 p.
14. Нада́рая Э. А. Непараметрические оценки кривой регрессии // Труды ВЦ АН СССР. 1965. Вып. 5. С. 56–68.
15. Rudemo M., Empirical Choice of Histograms and Kernel Density Estimators, *Scandinavian Journal of Statistics*, 1982, vol. 9, no. 2, pp. 65–78.
16. Bowman A. W., *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 1985, vol. 21, pp. 313–327.
<https://doi.org/10.1080/00949658508810822>
17. Hall P., *Annals of Statistics*, 1983, vol. 11, no. 4, pp. 1156–1174. <https://doi.org/10.1214/aos/1176346329>
18. Лапко А. В., Лапко В. А. Анализ методов оптимизации непараметрической оценки плотности вероятности по коэффициенту размытости ядерных функций // Измерительная техника. 2017. № 6. С. 3–8.
19. Гмурман В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика. М.: Высш. шк., 1999. 479 с.
20. Епанечников В. А. Непараметрическая оценка многомерной плотности вероятности // Теория вероятности и ее применения. 1969. Т. 14. № 1. С. 156–161.
2. Lapko A. V., Lapko V. A., *Optoelectronics, Instrumentation and Data Processing*, 2010, vol. 46, no. 1, pp. 56–63.
<https://doi.org/10.3103/S8756699010010073>
3. Varzhapetyan A. G., Mikhailova E. Yu., Metody vybora opredelyayushchikh kharakteristik neparametricheskikh algoritmov identifikatsii modelei nadezhnosti slozhnykh sistem po ekspluatatsionnym dannym, *Voprosy kibernetiki*, vol. 094, *Statisticheskie metody v teorii obespecheniya ekspluatatsii*, ed. S. F. Levin., Moscow, AN SSSR, Nauchnyi sovets po kompleksnoi probleme Kibernetika, 1982, pp. 77–87. (In Russ.)
4. Silverman B. W., *Density estimation for statistics and data analysis*, London, Chapman and Hall, 1986, 175 p.
5. Sheather S., Jones M., *Journal of Royal Statistical Society Series B*, 1991, vol. 53, no. 3, pp. 683–690.
<https://doi.org/10.1111/j.2517-6161.1991.tb01857.x>
6. Sheather S. J., *Statistical Science*, 2004, vol. 19, no. 4, pp. 588–597. <https://doi.org/10.1214/088342304000000297>
7. Terrell G. R., Scott D. W., *Journal of the American Statistical Association*, 1985, vol. 80, pp. 209–214.
<https://doi.org/10.2307/2288074>
8. Jones M. C., Marron J. S., Sheather S. J., *Journal of the American Statistical Association*, 1996, vol. 91, pp. 401–407.
<https://doi.org/10.2307/2291420>
9. Scott D. W. *Multivariate Density Estimation: Theory, Practice, and Visualization*, New York, Wiley, 1992, 317 p.
10. Lapko A. V., Lapko V. A., *Measurement Techniques*, 2021, vol. 63, no. 11, pp. 856–861.
<https://doi.org/10.1007/s11018-021-01873-w>
11. Lapko A. V., Lapko V. A., *Measurement Techniques*, 2021, vol. 64, no. 1, pp. 13–20. <https://doi.org/10.1007/s11018-021-01889-2>
12. Lapko A. V., Lapko V. A., *Measurement Techniques*, 2019, vol. 62, no. 8, pp. 665–672.
<https://doi.org/10.1007/s11018-019-01676-0>
13. Härdle W., *Applied Nonparametric Regression*, Cambridge University Press, 1990, 434 p.
14. Nadaraya E. A., Neparametricheskie otsenki krivoi regressii, *Proceedings of the Computer Center of the USSR Academy of Sciences*, 1965, issue 5, pp. 56–68. (In Russ.)
15. Rudemo M., Empirical Choice of Histograms and Kernel Density Estimators, *Scandinavian Journal of Statistics*, 1982, no. 9, pp. 65–78.
16. Bowman A. W., *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 1985, vol. 21, pp. 313–327.
<https://doi.org/10.1080/00949658508810822>
17. Hall P., *Annals of Statistics*, 1983, vol. 11, no. 4, pp. 1156–1174. <https://doi.org/10.1214/aos/1176346329>
18. Lapko A. V., Lapko V. A., *Measurement Techniques*, 2017, vol. 60, no. 6, pp. 515–522. <https://doi.org/10.1007/s11018-017-1228-x>
19. Gmurman V. E., *Probability theory and mathematical statistics*, Moscow, Vysshaya shkola Publisher, 1999, 479 p. (In Russ.)
20. Epanechnikov V. A., *Theory of Probability & Its Applications*, 1969, vol. 14, no. 1, pp. 153–158.
<https://doi.org/10.1137/1114019>

References

Статья поступила в редакцию 20.10.2021; одобрена после рецензирования 30.11.2021; принята к публикации 11.01.2022.
The article was submitted 20.10.2021; approved after reviewing 30.11.2021; accepted for publication 11.01.2022.