

Моделирование, восстановление и картирование геополей с учётом и без шумов измерений. Ч. 4.

Методы сплайнов, геостатистики и нечёткого регрессионного анализа

А. М. ПАШАЕВ, Р. А. САДЫХОВ, С. Б. ГАБИБУЛЛАЕВ

Национальная академия авиации Азербайджана,
Баку, Азербайджан, e-mail: sadixov@mail.ru

Рассмотрены гибридные трёхэтапные алгоритмы идентификации геополей, позволяющие достигнуть высоких квалификационных показателей. Для эффективного решения трудноформализуемых и многоэкстремальных задач восстановления геополей при значительных шумах измерений применены интегрируемые методы оценивания из Банка гибридных помехоустойчивых алгоритмов. Показано, что обучение нечётких регрессионных моделей превращается в многоэкстремальную невыпуклую задачу оптимизации. Приведён пример одноэкстремальной задачи нахождения нечёткой линейной регрессионной модели.

Ключевые слова: радиальная интерполяция, автокорреляция, трёхэтапная идентификация, нечёткий регрессионный анализ.

Hybrid three-stage algorithms of geofields identification which allows to achieve highly qualified indications. The integrable evaluation methods from the Bank of hybrid noise-eliminating algorithms has been applied for the effective solution of hardly-formed and multiextremal tasks of geofields recovery with significant measurement noise. The study of fuzzy regression models turns into a multi-extremal nonconvex optimization problem. An example of a one-extremal problem of finding a fuzzy linear regression model is given.

Key words: radial interpolation, autocorrelation, three-stage identification, fuzzy regression analysis.

В отличие от методов, в которых используется радиальная интерполяция (сплайны, геостатистика и т. д.), гибридные трёхэтапные алгоритмы идентификации геополей, такие как метод наименьших квадратов/генетические алгоритмы/фильтра Калмана (МНК/ГА/ФК) и моделирование отжига/генетические алгоритмы/градиентные методы (МО/ГА/ГМ) позволяют достигать высоких квалификационных показателей, точности и экспрессности. Поэтому при правильной интегрируемости методов оценивания из Банка гибридных помехоустойчивых алгоритмов можно эффективно решать трудноформализуемые и многоэкстремальные задачи восстановления геополей при значительных шумах измерений.

Для многих задач геодезии, геологии, геофизики, картографии и т. д. актуальна проблема моделирования поверхности геопоя [1, 2]. Если эту поверхность можно представить в виде функции двух переменных $h(x, y) \in \Omega \subset R^2$, принимающей значения $\hat{h}_i$ в точках наблюдений (x_i, y_i) , $i = \overline{1, n}$, то для удобства компьютерной обработки и хранения информации необходимо иметь цифровую модель геопоя, т. е. модель этой функции с погрешностью (с учётом шумов). Классические методы теории приближений в условиях исходных данных из-за недостаточности, значительных шумов, неравноточности сети наблюдений непригодны для непосредственного практического применения [1—7]. Восстановление (интерполяция) поверхности геопоя — это попытка восстановить общую картину по частному случаю. Точного и единственного решения такой задачи нет. Существует много способов интерполяции поверхности геополей: метод триангуляции; методы средневзвешенного [1]; веса, определяемые методом естественных соседей или методом инверсных расстояний;

методы радиальной интерполяции, среди которых можно выделить интерполянты как сплайны [1, 2]; методы геостатистики, а именно — метод кригинга и его модификации; мультиквадрики; нечёткие продукционные модели; методы нечёткого регрессионного анализа и др.

Сплайн-интерполяция. Достаточно точным видом интерполяции, требующим от функции существенно меньшего запаса гладкости, чем интерполяционный полином, является сплайн-интерполяция. Её достоинство — возможность использования функционалов разного рода для каждой конкретной задачи. Задача восстановления двумерной функции $h(x, y) \in \Omega \subset R^2$ со значениями $\hat{h}_i$ на нерегулярной сети узлов исходных данных (x_i, y_i) , $i = \overline{1, n}$ сводится к минимизации функционалов и их комбинации:

$$S_C[h(x, y)] = \int_{\Omega} [Ch(x, y)]^2 d\Omega = \int_{\Omega} [Ch(x, y)]^2 dx dy = \min; \quad w_2^2 \quad (1)$$

$$S_V = \int_{\Omega} [\nabla h(x, y)]^2 d\Omega = \int_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial h(x, y)}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial h(x, y)}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy = \min; \quad w_2^2 \quad (2)$$

$$S_{\Delta} = \int_{\Omega} [\Delta h(x, y)]^2 d\Omega = \int_{\Omega} \left[\frac{\partial^2 h(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h(x, y)}{\partial y^2} \right]^2 dx dy = \min; \quad w_2^2 \quad (3)$$

$$S_{\diamond} = \int_{\Omega} [\diamond h(x, y)]^2 d\Omega = \int_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial^2 h(x, y)}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 h(x, y)}{\partial y^2} \right)^2 \right] dx dy = \min; \quad w_2^2 \quad (4)$$

В зависимости от видов функционалов S_C различаются и построенные поверхности. Функционал S_{∇} называется гармоническим, S_{Δ} — бигармоническим, S_{ϕ} — модифицированным бигармоническим и т. д. Функции, доставляющие минимальные значения S_{∇} (1), S_{Δ} (2), являются решениями уравнений Лапласа и бигармонического, соответственно:

$$\Delta h(x, y) = \nabla^2 h(x, y) = \frac{\partial^2 h(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h(x, y)}{\partial y^2} = 0; \quad (5)$$

$$\Delta^2 h(x, y) = \Delta \Delta h(x, y) = \frac{\partial^4 h(x, y)}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 h(x, y)}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 h(x, y)}{\partial y^4} = 0. \quad (6)$$

Уравнению (6) соответствует сплайн-функция (сплайн Дюшона)

$$h(x, y) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \omega_i r^2 \ln r + \omega_{n+1} + \omega_{n+2} x + \omega_{n+3} y, \quad (7)$$

где $\sum_{i=1}^n \omega_i = 0$, $\sum_{i=1}^n \omega_i x_i = 0$, $\sum_{i=1}^n \omega_i y_i = 0$ — функции Грина бигармонического уравнения (6); $r = [(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2]^{1/2}$; ω_i , $i = \overline{1, n+3}$ —

коэффициенты, определяемые из решения системы линейных алгебраических уравнений (СПАУ), у которой все элементы главной диагонали $a_{ii} = 0$:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 1 & x_1 & y_1 & \omega_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 1 & x_2 & y_2 & \omega_2 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & 1 & x_n & y_n & \omega_n \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 & \omega_{n+1} \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n & 0 & 0 & 0 & \omega_{n+2} \\ y_1 & y_2 & \dots & y_n & 0 & 0 & 0 & \omega_{n+3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \hat{h}_1 \\ \hat{h}_2 \\ \vdots \\ \hat{h}_n \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}, \quad (8)$$

$$\text{где } a_{ij} = \frac{1}{2} \left[(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 \right] \ln \left[(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 \right],$$

$i, j = \overline{1, n}$; $h_i \in H(\Omega)$, $(i = \overline{1, n})$ — некоторая известная функция,

т. е. математическая модель геополя, содержащая информацию о свойствах параметров; $H(\Omega)$ — гильбертово пространство.

Выражение $r^2 \ln r$ можно рассматривать как вариограмму универсального кригинга с линейным дрейфом. Со стохастической точки зрения сплайн даёт максимально правдоподобную оценку данных из-за первоначального условия равенства нулю первой и второй производных во всех контрольных точках геополя, а полученные случайные погрешности оказываются белым шумом. Распределения параметра $h(x, y)$, удовлетворяющие уравнению (6), в соответствии с (3) будут минимально накапливать квадрат дивергенции градиента восстанавливаемого геополя. Поэтому уравнением (6) целесообразно пользоваться, когда необходимо минимизировать суммарный квадрат плотностей источников восстанавливаемого геополя. Распределение параметра $h(x, y)$, удовлетворяющее уравнению (5), в соответствии с (2) будет минимально накапливать средний квадрат максимальных

изменений параметра восстановленного геополя. Проведём аналогию с учётом $\Delta = \nabla^2$:

$$\min_{\Omega} \int [\Delta h(x, y)]^2 d\Omega \leftrightarrow \Delta^2 h(x, y) = 0;$$

$$\min_{\Omega} \int [\nabla h(x, y)]^2 d\Omega \leftrightarrow \nabla^2 h(x, y) = 0.$$

Минимизация функционала S_{Δ} (3) отражает гипотезу о минимальной средней кривизне моделируемой поверхности (теорема Холидея). Такая поверхность не имеет необоснованных усложнений формы между узлами наблюдений. Однако практика показала, что сплайн-поверхность, минимизирующая (3), не всегда имеет самую гладкую форму, которую можно было бы получить при данном наборе точек наблюдений. Существует две причины такого эффекта: не доказана теорема Холидея для случая нерегулярно расположенных точек наблюдений и интеграл (3) даёт лишь приближённое значение среднеквадратичной главной кривизны поверхности Ω . Функционалы (1)–(4) и их комбинации обеспечивают гладкость восстанавливаемых функций при наличии случайных ошибок. В этих случаях можно пользоваться сглаживающими сплайнами или фильтрами, например фильтром Винера.

Метод Харди. Попытки применения в топографии различных модификаций полиномиальных и тригонометрических рядов для построения поверхностей по данным нерегулярной сети оказались неудачными. Поэтому возник новый подход, при котором вместо кусочно-линейных аппроксиматоров используются разложения типа мультиквадратичная функция $H(x, y) = \sum_{i=1}^n \omega_i \phi_i(x, y, x_i, y_i, c)$ по мультиквадратам

различного вида, например мультиквадрики и мультиквадрики-бигармонические, соответственно:

$$\phi_i(x, y, x_i, y_i, c) = (r^{2n} + c^2)^{1/2}, \quad c > 0;$$

$$\phi_i(x, y, x_i, y_i, c) = (r^{2n} + c^2) \ln(r^2 + c^2)^{1/2}, \quad c > 0,$$

где $r = [(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2]^{1/2}$. При $c = 0$ можно получить соответствующие радиальные базисные функции: r^{2n} , $r^{2n} \ln r$, $n = 1, 2, 3, \dots$

Мультиквадрики, а следовательно, и функции типа H бесконечно дифференцируемы, что делает эффективной подгонку значений функций, производных и т. д. Обзор приложений данного подхода в геодезии, геофизике, картографии, фотограмметрии, географии, гидрологии и цифровых моделях рельефа представлен в [3]. Там же проведено сравнение 29 разных схем аппроксимации по разбросанным данным с результатами вычислений по методу Харди. Последний оказался более точным и простым в реализации. Идея применения алгоритмов на основе радиальных базисных функций для решения дифференциальных уравнений математической физики с мультиквадриками в качестве аппроксиматоров описана в [4].

Интерполяция мультиквадриками. Такая интерполяция является локальной и даёт положительные результаты при плотно расположенных опорных точках:

$$h(x, y) = \sum_{j=1}^n \|a_{ij}\|^{-1} \hat{h}_j \left[(x_j - x)^2 + (y_j - y)^2 + c^2 \right]^{1/2}, \quad c \geq 0,$$

где $a_{ij} = \left[(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 \right]^{1/2}$ — весовые коэффициенты, $1 \leq i, j \leq n$.

Сначала строят прямоугольник, охватывающий все опорные точки. Затем его разбивают на более мелкие квадраты так, чтобы в пределы каждого квадрата для точности аппроксимации поверхности входило достаточное количество точек. Точки, лежащие на границах двух смежных квадратов, участвуют в обработке два раза, а четырёх — четыре. В результате, связывая точки склеивают поверхности соприкасающихся квадратов в единую непрерывную поверхность. Исследования показывают, что точность расчётов можно повысить, если надлежащим образом выбрать экспериментальный параметр c . Если сплайн-функцию (7) представить в виде

$$h(x, y) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \omega_i (r^2 + c^2) \ln(r^2 + c^2) + \omega_{n+1} + \omega_{n+2}x + \omega_{n+3}y,$$

то коэффициенты матрицы (8) будут следующими:

$$a_{ij} = \frac{1}{2} \left[(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + c^2 \right] \ln \left[(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + c^2 \right],$$

где параметр c определяется на основе изменений кривизны поверхности, $0,01 \leq c \leq 0,1$.

К радиальной интерполяции обычно относят аналитические сплайны, D -сплайны и др.

Геостатистические методы кригинга. Эти методы реализуют в следующих модификациях: дискретный, универсальный, случайный и непрерывный.

Дискретный (точечный) кригинг имеет наиболее простой вид. Предполагается, что картируемый параметр статистически стационарен или свободен от дрефта. Значение оцениваемого параметра в произвольной точке p при выполнении условия несмещённости определяется следующим образом (модель изотропная):

$$\hat{h}_p = \sum_{i=1}^n \omega_i \hat{h}_i; \quad \sum_{i=1}^n \omega_i = 1.$$

Оценка дисперсии имеет вид

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^n \omega_i \hat{h}_i + \omega_{n+1},$$

где n — количество контрольных точек.

Оценку весовых коэффициентов $\omega_i, i = \overline{1, n+1}$ можно получить из решения СЛАУ

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 1 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \vdots \\ \omega_n \\ \omega_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{h}_1 \\ \hat{h}_2 \\ \vdots \\ \hat{h}_n \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (9)$$

где $a_{ij} = \text{cov}(r) = \exp(-r/c^2)$, $\text{cov}(r)$ — ковариационная функция, представленная радиальной функцией Гаусса [5]; $r = [(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2]^{1/2}$ — расстояние между точками $i, j, (i, j = \overline{1, n})$, $a_{ii} = 0, i = \overline{1, n}$; $c = \alpha r_v$ — радиус влияния, $1 \leq \alpha \leq 3$.

Точечный кригинг (9) используют для построения карт в изолиниях, так как в отличие от других методов оконтуривания он имеет статистически оптимальные свойства. Однако использование кригинга для этих целей приводит к трудоёмким процедурам и невозможности создания универсальной программы, поскольку картограф должен иметь специальный план кригинга каждого нового оцениваемого геополя. Метод схож с детерминистическим методом средневзвешенной интерполяции, но является геостатистическим [1, 2].

Универсальный кригинг с дрефтом представляет нестационарную часть поверхности. Предполагается, что в данных существует тенденция к доминированию определённых значений, и дрефт можно смоделировать с помощью полиномиальной функции 1, 2, ..., m степени. Если воспользоваться полиномом степени m , то оцениваемый параметр, включающий эффект от заданного дрефта в исследуемой точке p , и оценка дисперсии будут иметь вид

$$\hat{h}_p = \sum_{i=1}^n \omega_i \hat{h}_i;$$

$$\sum_{i=1}^n \omega_i = 1; \quad \sum_{i=1}^n \omega_i x_i = x_p; \quad \sum_{i=1}^n \omega_i y_i = y_p;$$

$$\sum_{i=1}^n \omega_i x_i y_i = x_p y_p; \quad \dots \quad \sum_{i=1}^n \omega_i y_i^m = y_p^m;$$

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^n \omega_i \hat{h}_i + \omega_{n+1} + \omega_{n+2}x_p + \omega_{n+3}y_p + \omega_{n+4}x_p y_p + \dots + \omega_{n+k} y_p^m.$$

Оценки весовых коэффициентов кригинга $\omega_i, i = \overline{1, n+k}$, $k = (m+1)(m+2)/2$ получают из решения СЛАУ вида

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 1 & x_1 & y_1 & x_1 y_1 & \dots & y_1^m \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 1 & x_2 & y_2 & x_2 y_2 & \dots & y_2^m \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & 1 & x_n & y_n & x_n y_n & \dots & y_n^m \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_1 & y_2 & \dots & y_n & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_1 y_1 & x_2 y_2 & \dots & x_n y_n & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_1^m & y_2^m & \dots & y_n^m & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \vdots \\ \omega_n \\ \omega_{n+1} \\ \vdots \\ \omega_{n+k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{h}_1 \\ \hat{h}_2 \\ \vdots \\ \hat{h}_n \\ 1 \\ x_p \\ y_p \\ x_p y_p \\ \vdots \\ y_p^m \end{pmatrix}, \quad (10)$$

где $a_{ij} = a [1 - \exp(-3(r/c)^2)]r$ — лаг; a — порог дисперсии; c — радиус корреляции [6].

Полиномом 1-го порядка является наклонная плоскость, 2-го порядка — эллиптическая поверхность и т. д. Процесс восстановления геополя методом кригинга состоит из определения методом вариографии входных параметров — лага,

ранга, порога, остаточный некоррелируемого шума и т. д. На основе кросс-валидации тестируют результаты восстановления геопоя. Весь процесс восстановления повторяется до достижения требуемой точности. Полученные оценки оказываются несмещёнными и имеют минимальную оценку дисперсии. При подготовке входных параметров у исследователя должен быть определённый опыт, а оптимальность процедуры интерполирования осложнена тем, что при выборе вариограммы требуются расширенные знания. Существует аналогия кригинга и сплайнов. Системы уравнений для определения весовых коэффициентов универсального кригинга (10) с линейным дрейфом $m = 1$ и коэффициентами функции Грина бигармонического уравнения интерполяционного сплайна (8) схожи. Однако сплайн-интерполяция относится к вариационным методам, а универсальный кригинг — к геостатистическим.

Случайный кригинг используется для оценки параметров с преобладающими значениями эффекта самородка, таких как остаточный, или пространственно некоррелированный шум. Случайный кригинг отражает сильную изменчивость параметра и может интерпретироваться как проявление неоднородности геопоя. При этом он из интерполяционного метода превращается в экстраполяционный. Также этот вид кригинга применяется для оценки статистических свойств исходных данных, а именно изменчивости, репрезентативности, глобальных трендов, т. е. для проведения исследовательского анализа данных.

Непрерывный кригинг (метод Матерона) применяется для оценки месторождения, вскрытого и опробованного (окруженного) по периферии горными выработками. Его решение методом граничных интегральных уравнений (ИУ) сводится к решению внутренней задачи Дирихле при нестандартно заданных граничных условиях:

$$\int_{\gamma} f(s) \ln(\xi, s) ds = \ln R(\xi) + \lambda; \quad (11)$$

$$\int_{\gamma} f(s) ds = 1, \quad (12)$$

где $\gamma = \bigcup_{j=1}^n \gamma_j$ — компоненты связности границы, причём положительно ориентированные замкнутые гладкие кривые, не имеющие общих точек; $f(s) = \sum_{j=1}^n f_j(s_j)$ — плотность логарифмического потенциала простого слоя, непрерывно нанесённого на кривую γ ; $s = \bigcup_{j=1}^n s_j$, $R(\xi, s) = [(x(\xi) - x(s))^2 + (y(\xi) - y(s))^2]^{1/2}$, $R(\xi) = [(x - x(\xi))^2 + (y - y(\xi))^2]^{1/2}$, $\xi = \bigcup_{j=1}^n \xi_j$ — дуговые координаты кривой γ ; λ — множитель Лагранжа.

Выражение (12) является обобщением условия несмещённости оценок. Значение оцениваемого параметра определяется квадратурой

$$h(x, y) = \int_{\gamma} f(s) \hat{h}(s) ds,$$

где $\hat{h}(s)$ — содержания на границе γ ; n — количество контуров γ_j , т. е. количество характерных областей, выработок и периферия.

Для приближенного решения ИУ Фредгольма 1-го рода с оператором логарифмического потенциала простого слоя (11) можно воспользоваться регуляризующим методом Тихонова и приближением оператора логарифмического потенциала простого слоя квадратурной формулой для многосвязных областей из [7]. Другой подход имеет вид:

$$\sum_{i=1}^n \int_{\gamma_i} f_i(s_i) \ln R(\xi_j, s_i) ds_i = \ln R(\xi_j) + \lambda_j, \quad j = \overline{1, n}; \quad (13)$$

$$\int_{\gamma_i} f_i(s_i) ds_i = 1, \quad i = \overline{1, n},$$

где в системе ИУ (см. (13) только в j строке i интеграл будет сингулярным, а остальные $n - 1$ интегралов — регулярные и вычисляются по обычным квадратурным формулам. Рассмотрим ИУ Фредгольма 1-го рода из (13):

$$Ap[z(s)] = \int_0^l \rho[z(\tau)] \ln \frac{1}{|z(\tau) - z(s)|} d\tau = \varphi[z(s)], \quad (14)$$

где $z = z(s)$ — уравнение кривой γ в дуговых координатах, $s \in [0, l]$; $l = \int_{\gamma} ds$ — длина кривой γ .

Свойства оператора Ap в пространствах непрерывных функций изучены хорошо. Как оператор в пространстве C_{γ} он вполне непрерывен, поэтому решение (14) является некорректной задачей. За основное пространство выберем $L_2([0, l])$, правая его часть определена с погрешностями δ , φ_{δ} , а решение (точное) $\rho[z(s)]$ непрерывно и почти всюду имеет производную, суммируемую с квадратом, т. е. $\rho \in W_2^1([0, l])$.

Запишем следующую квадратурную формулу типа трапеции:

$$L_{\tau, \varepsilon} \rho(z) = \sum_{Z \in \tau_{\varepsilon}(z)} \frac{\rho(z_{j+1}) + \rho(z_j)}{2} \ln \frac{1}{|z_{j+1} - z_j|}. \quad (15)$$

Методами из [7] можно доказать оценку:

$$\begin{aligned} & |L_{\tau, \varepsilon} \rho(z) - Ap(z)| \leq \\ & \leq C (\omega_{\rho}(\|\tau\|) + \|\rho\| C_{\gamma} \varepsilon \ln \frac{2d}{\varepsilon} + \|\tau\| \ln \frac{2d}{\varepsilon} + \|\rho\| C_{\gamma} \omega_{z^1}(\|\tau\|)), \end{aligned} \quad (16)$$

где $C = \text{const}$ зависит от диаметра кривой d ; $\|\tau\|$ — мелкость разбиения кривой γ ; $\omega_{\rho}(\|\tau\|)$ — модуль непрерывности ρ .

Для приближенного решения (14) воспользуемся квадратурной формулой (15) и определим приближающий оператор A_{ε} в виде

$$A_{\varepsilon} \rho(z) = L_{\tau, 2\|\tau\|} \rho(z).$$

Тогда из оценки (16) следует, что при $\varepsilon \rightarrow 0, \|\tau\| \rightarrow 0$

$$\|L_{\tau, 2\|\tau\|} p(z) - Ap(z)\| \rightarrow 0.$$

Выбрав надлежащим образом $\alpha(\delta, \varepsilon) \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow 0, \varepsilon \rightarrow 0, (\delta + \varepsilon)^2 / \alpha(\delta, \varepsilon) \rightarrow 0$ из теоремы вложения Соболева получим

$$\max_{s \in [0, 1]} \left| \rho_{\delta, \varepsilon}^{\alpha(\delta, \varepsilon)} [z(s)] - p[z(s)] \right| \rightarrow 0.$$

При этом параметр регуляризации согласован с погрешностями входных данных δ, ε . Если $\text{Ker } A \neq \{0\}$, то $p[z(s)]$ — нормальное решение уравнения (14) с минимальной нормой. Для нахождения $\rho_{\delta, \varepsilon}^{\alpha(\delta, \varepsilon)}$ рассмотрим сглаживающий функционал Тихонова

$$\begin{aligned} & \|L_{\tau, 2\|\tau\|} p(z) - \varphi_\delta\|_{L_2}^2 + \alpha \|p(z)\|_{W_2^1}^2 = \\ & = \int_0^1 \left(\sum_{z_j \in \tau_2 \|\tau\|} \frac{\rho[z(s_{j+1})] + \rho[z(s_j)]}{2} \ln \frac{1}{|z(s_{j+1}) - z(s_j)|} \times \right. \\ & \quad \times |z(s_{j+1}) - z(s_j) - \varphi_\delta[z(s)]|^2 \Bigg) ds + \\ & \quad + \alpha \int_0^1 (\rho[z(s)]^2 + \rho'[z(s)]^2) ds. \end{aligned} \quad (17)$$

Найденное таким образом решение обладает оптимальным сглаживающим эффектом, обеспечивая минимум дисперсии погрешностей интерполяции. Оптимальное регуляризованное решение ИУ 1-го рода (17) непрерывного кригинга совпадает с результатом применения фильтра Колмогорова—Винера. Непрерывный кригинг представляет собой более гибкий и мощный инструмент, чем дискретный и универсальный. Он позволяет точнее решить задачу оценки богатого месторождения по его периферии, расширить класс кривых, описывающих границы характерных областей, выработку и периферии.

Нейро-нечёткие продукционные сети. Основу таких сетей составляют нечёткие продукционные модели Мамдани, Такаги—Сугено (ТС) и др. Сети обладают универсальными аппроксимационными способностями, т. е. могут аппроксимировать любую непрерывную функцию на компакте X с произвольной точностью, если действует набор правил $n \rightarrow \infty$ системы типа ТС. Доказано, что нечёткая модель ТС способна аппроксимировать любую полиномиальную функцию, которой можно аппроксимировать любую непрерывную функцию (использованы теоремы Вейерштрасса и Стоуна). Однако модели ТС могут создаваться только адаптивными методами на основе измеренных данных о входах и выходах системы. Системы ТС с линейными функциями в суждениях базы правил R_i = если x_1 есть A_{i1} и ... и x_j есть A_{ij} и ... и x_m есть A_{im} , то

$$y = c_{i0} + \sum_{j=1}^m c_{ij} x_j, \quad i = \overline{1, n}. \quad (18)$$

Для настройки модели (18), т. е. оптимизации её параметров, применяют в основном методы нейро-нечётких сетей (ННС) и ГА [8, 9]. При построении ННС используются гауссовские функции принадлежности. Предполагается, что суждения каждого правила объединены с помощью t -нормы — нечёткое произведение, а метод дефазификации — средний центр, тогда выходную переменную $\bar{y}$ можно представить в виде

$$\bar{y} = \sum_{i=1}^n \bar{w}_i \left(c_{i0} + \sum_{j=1}^m c_{ij} x_j \right);$$

$$\bar{w}_i = \prod_{j=1}^m \exp \left[- \left(\frac{\bar{x}_j - a_{ij}}{b_{ij}} \right)^2 \right] / \sum_{i=1}^n \prod_{j=1}^m \exp \left[- \left(\frac{\bar{x}_j - a_{ij}}{b_{ij}} \right)^2 \right], \quad i = \overline{1, n}.$$

При K обучающих примерах $(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_m^{(k)}, y^{(k)})$,

$k = \overline{1, K}$ и замене значений выходных сигналов сети $\bar{y}^{(k)}$ эталонными $y^{(k)}$ все параметры ННС подвергаются обучению методом обратного распространения ошибки (ОРО): параметры a_{ij}, b_{ij} каждой гауссовой функции принадлежности и параметры c_{ij} линейной функции. Однако согласно градиентному методу фронтального типа уточнение всех параметров ННС производится параллельно и одновременно. Уточнение параметров происходит в два этапа. Сначала при фиксированных значениях a_{ij}, b_{ij} находят параметры c_{ij} из решения СЛАУ

$$Wc = y, \quad (19)$$

где $y = \|y^{(1)}, y^{(2)}, \dots, y^{(K)}\|^T$ — выходные эталонные сигналы; $c =$

$= \|c_{10}, \dots, c_{1m}, \dots, c_{n0}, \dots, c_{nm}\|^T$ искомые параметры; $W = \{\bar{w}_i^{(k)}\}$ — матрица размерности $K \times (m+1)n$.

При этом количество выборок (строк) $K \gg (m+1)n$ — количества настраиваемых параметров (столбцов), где $w_i^{(k)}$ — уровень активации (вес) i правила при предъявлении k -го входного вектора $(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_m^{(k)})$. Уравнение (19) не имеет точного решения. Решение можно найти, используя псевдоинверсию матрицы W :

$$c = W^+ y = (W^T W)^{-1} W^T y. \quad (20)$$

Псевдоинверсия матрицы заключается в решении задачи минимизации: $\min \|W^+ W - I\|$; где I — единичная матрица. Проблемы решения (20) связаны с возможной сингулярностью матрицы $(W^T W)$. Вектор c можно вычислить МНК или с помощью ФК [2]. Найденные линейные параметры c_{ij} фиксируются, рассчитываются фактические выходные сигналы

$\bar{y} = \|\bar{y}^{(1)}, \bar{y}^{(2)}, \dots, \bar{y}^{(K)}\|^T$, $\bar{y} = Wc$, вектор ошибки $e = \bar{y} - y$, градиент целевой функции относительно функции принадлежности $E(q)$ и по алгоритму обратного распространения ошибки, использующему метод наискорейшего спуска, вычисляются

$$\begin{aligned} a_{ij}^{(k)}(q+1) &= a_{ij}^{(k)}(q) - \gamma \frac{\delta E^{(k)}(q)}{\delta a_{ij}^{(k)}}; \\ b_{ij}^{(k)}(q+1) &= b_{ij}^{(k)}(q) - \gamma \frac{\delta E^{(k)}(q)}{\delta b_{ij}^{(k)}}, \end{aligned} \quad (21)$$

где q — номер итерации.

После уточнения нелинейных параметров процесс адаптации линейных (первый этап) и нелинейных параметров (второй этап) запускается вновь вплоть до стабилизации всех параметров процесса, т. е. происходит двухэтапная идентификация параметров (ДИП). Классические методы оптимизации, основанные на производных (МНК, ГМ, ФК) относятся к одному и тому же классу H^∞ — оптимальных фильтров. Они обладают высокой скоростью сходимости, но сходятся к локальным оптимумам. Поэтому обращаются к метаэвристическим алгоритмам: муравьиной колонии, роящихся частиц, моделировании отжига, ГА и пр. [10].

При трёхэтапной идентификации параметров (ТИП) на первом этапе применяется МНК или ФК для нахождения линейных параметров, затем, на втором этапе — ГА для нахождения решений, близких к глобальному оптимуму, которые на третьем этапе используются начальной точкой для алгоритмов обратного распространения ошибки (21): МНК или ФК/ГА/ГМ или ФК. При таком подходе настройка сети значительно упрощается. В [11] предложен другой алгоритм ТИП, толерантный к малой выборке обучающих данных. Сначала многократным запуском алгоритма МО генерируется множество решений задачи, из которых формируется начальная популяция в ГА. После ГА производится настройка ГМ или ФК, т. е. МО/ГА/ГМ или ФК. Рассмотренные гибридные алгоритмы ТИП нечётких моделей позволяют уменьшить ошибку вывода в несколько раз по сравнению с использованием методов по отдельности.

Нечёткий регрессионный анализ. Данный анализ основан на критерии минимизации нечёткости, комбинировании с МНК и регрессии интервала. Идентификация нечётких коэффициентов регрессионной модели сведена к задаче линейного программирования, так как минимизируется размазанность нечётких коэффициентов. Недостаток — высокая чувствительность коэффициентов регрессии к выбросам данных.

Другой подход исходит из условия минимизации расстояния между нечёткими наблюдениями и их оценками. Для её решения кроме ГМ используют ГА [12]. Метод наименьших квадратов при регрессии с нечёткими данными и отказе от использования ФП показывает ощутимые преимущества [13]. Однако при большой размерности модели возникают проблемы вычислительного характера. Для построения регрессионной модели в интервальном подходе применяются методы математического программирования либо другие специально разработанные методы [14]. Недостатком является быстрый рост «ширины результата», что соответствует принципу возрастания неопределённости (энтропии). Различные постановки задач нечёткого регрессионного анализа приведены в [15]. Методами ННС идентифицируется нечёткая модель регрессии 1-го порядка

$$\tilde{y} = \tilde{c}_0 \oplus \sum_{j=1}^n \tilde{c}_j \otimes \tilde{x}_{ij}, \quad i = \overline{1, m}, \quad (22)$$

$\tilde{y} = \|\tilde{y}_1, \tilde{y}_2, \dots, \tilde{y}_m\|^T$ — нечёткий выходной параметр.

Рассмотрим одноэкстремальную задачу нахождения нечёткой линейной регрессионной модели вида (22), где коэффициенты модели c_j , $(j = \overline{0, n})$ — некоторые действительные числа. В качестве критерия аппроксимации выберем минимум суммы квадратов отклонений расчётных параметров выходной переменной по регрессионной модели от их фактических значений. С применением α -среза сумма квадратов разностей нечётких треугольных чисел типа LR при $\alpha = 1$, $\alpha = 0$ имеет вид

$$\begin{aligned} E = & \left[\sum_{i=1}^m \left(y_{i1} - c_0 - \sum_{j=1}^n c_j x_{ij1} \right) \right]^2 + \left[\sum_{i=1}^m \left(y_{i1} - c_0 - \sum_{j=1}^n c_j x_{ij1} \right) \right]^2 + \\ & + \left[\sum_{i=1}^m \left(y_{i2} - c_0 - \sum_{j=1}^n c_j x_{ij2} \right) \right]^2, \end{aligned} \quad (23)$$

где $\tilde{Y} = [y_{i1}(\alpha), y_{i2}(\alpha)]$, $\tilde{x}_{ij}(\alpha) = [x_{ij1}(\alpha), x_{ij2}(\alpha)]$; y_{i1} , x_{ij1} и y_{i2} , x_{ij2} — значения левой и правой частей нечётких выходных и входных параметров.

Функции принадлежности нечётких чисел LR-типа вычисляются по формуле

$$\mu(x) = \begin{cases} 1 - (\bar{x} - x)/\alpha, & \text{если } \bar{x} - \alpha < x < \bar{x}, \alpha > 0; \\ 1 - (x - \bar{x})/\beta, & \text{если } \bar{x} < x < \bar{x} + \beta, \beta > 0; \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Необходимым и достаточным условием достижения минимального значения критерия E является система линейных уравнений $(n + 1)$ порядка

$$\partial E / \partial c_j = 0, \quad j = \overline{0, n}.$$

Вычислив частные производные по каждому из оптимизируемых параметров, получим СЛАУ $(n + 1)$ порядка с $(n + 1)$ неизвестными c_j , $(j = \overline{0, n})$.

Пример. Используется модель, описываемая нечётким уравнением регрессии (22). Искомые коэффициенты $c_1, c_2, \dots, c_{11}$ определяются из (23) МНК. При проведении компьютерного моделирования в результате эксперимента были собраны нечёткие статистические данные [16]. В итоге $c_1 = 0,004678$; $c_2 = 59,07161$; $c_3 = -0,72079$; $c_4 = 0,0607109$; $c_5 = 1,20295$; $c_6 = 12,063872$; $c_7 = 1,251431$; $c_8 = 0,024709$; $c_9 = 4,212343$; $c_{10} = 1,611606$; $c_{11} = 122,1877$.

Многоэкстремальная задача. Это задача нахождения нечёткой линейной регрессионной модели вида (22). На основе представительной выборки $\|x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{in}, y_i\|$, $i = \overline{0, m}$ необходимо найти значения действительных переменных c_{j1}, c_j, c_{j2} , $(j = \overline{0, n})$, т. е. нечёткие треугольные числа типа LR, обеспечивающие максимальный критерий оптимальности:

$$F = \max_{1 \leq i \leq m} \sum_{j=1}^m w_i \mu_{\tilde{y}}(y_i); \quad (24)$$

$$\min_{1 \leq i \leq m} \mu_{\tilde{y}}(y_i) \geq \eta, \quad (25)$$

где $0 \leq w_i \leq 1$, $(i = \overline{1, m})$ — весовые коэффициенты; $0 < \eta < 1$ — некоторая пороговая величина.

Трудность решения задач (24), (25) заключается в необходимости m раз вычислять (22), и подставлять вычисленные значения в неявно зависящие функции цели (24) и ограничения (25). В качестве наиболее эффективных методов решения этой задачи используют метаэвристические алгоритмы [10] глобального случайного поиска или их гибридизации. Недостатком являются проблемы вычислительного характера и отсутствие целевой функции как схожести желаемого и действительного поведения модели. В настоящее время разработаны ГА глобальной оптимизации многоэкстремальных функций, в которых проблемы размерности задачи решаются с помощью стохастических алгоритмов оптимизации: МО, ГА, управляемого случайного поиска и др. Основным недостатком, ограничивающим применение стохастических алгоритмов, является ненадёжность и высокая вычислительная стоимость получаемых решений, так как критериальные функции могут быть зашумлёнными и не всюду дифференцируемыми.

В дальнейшем авторы предлагают рассмотреть математические методы и, в частности, новый метод получения множества Парето-решений, основанный на фундаментальной теореме Пуанкаре «О возвращаемости» [7] и сведённый к решению системы дифференциальных уравнений с начальными условиями $(x^0, \lambda^0, u^0, \omega^0, \alpha^0, w^0)$ и заданными R, τ, ε :

$$\frac{dx_i}{dt} = u_i; \quad \frac{du_i}{dt} = -\frac{\partial F(x, \lambda, \alpha, R, \tau, \varepsilon)}{\partial x_i}, \quad i = \overline{1, n}; \quad \frac{d\lambda_i}{dt} = \omega_i;$$

$$\frac{d\omega_i}{dt} = -\frac{\partial F(x, \lambda, \alpha, R, \tau, \varepsilon)}{\partial x_i}, \quad i = \overline{1, l}; \quad \frac{d\alpha_i}{dt} = w_i;$$

$$\frac{dw_i}{dt} = -\frac{\partial F(x, \lambda, \alpha, R, \tau, \varepsilon)}{\partial \alpha_i}, \quad i = \overline{1, k}.$$

При отсутствии ограничений-равенств

$$F(x, \lambda, \alpha, R, \tau, \varepsilon) = \sum_{i=1}^l \frac{\tau}{\lambda_i + \varepsilon} + R \left(\sum_{i=1}^l \lambda_i - 1 \right)^2 + \\ + \sum_{i=1}^m \frac{1}{g_i(x) + \varepsilon} + R \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^k \lambda_i \frac{\partial f_j}{\partial x_j}$$

для определённого класса задач это оказывается проще и экономичнее по временным затратам, чем решение оптимизационной задачи нелинейного программирования для нахождения каждого Парето-решения.

Заключение. В рамках восстановления геополей широкое распространение получили методы радиальной интерполяции. С точки зрения теории приближения радиальную интерполяцию можно рассматривать как вариант кригинга. Однако при небольшом количестве опорных точек радиальная интерполяция удобнее, так как получаемую систему уравнений, в отличие от кригинга, приходится решать только один раз. Если степень известности поверхности велика, то следует применить автокорреляцию. При отсутствии точек перегиба и резких перепадов следует использоваться сплайны. Для проведения экспрессной идентификации параметров системы ТС можно применить алгоритм ДИП: МНК/ГМ, а для повышения точности — алгоритм ТИП: МНК/ГА/ФК. При низкой экспрессности но высокой точности — алгоритм ТИП: МО/ГА/ГМ. Обучение нечётких регрессионных моделей превращается в многоэкстремальную невыпуклую задачу оптимизации.

Для нахождения глобального экстремума этой задачи требуются стохастические алгоритмы глобального поиска, метаэвристические методы или их гибридизация. Правильная интегрируемость методов оценивания из банка гибридных помехоустойчивых алгоритмов позволит эффективно решить трудноформализуемые и многоэкстремальные задачи идентификации и восстановления геополей при зашумлённых данных.

Литература

1. Пашаев А. М., Садыхов Р. А., Илдый Ф. Т., Караборк Х. Т. Восстановление параметров геополей // Измерительная техника. 2005. № 12. С. 3—9.
2. Пашаев А. М., Садыхов Р. А., Рамазанов Ф. Г., Назирли Ф. С. Восстановление параметров геополей с учётом шумов измерений. Ч. 2. Методы идентификации, регуляризации и мягких вычислений (softcomputing) // Измерительная техника. 2010. № 10. С. 6—14.
3. Hardy R. L. Theory and Applications of the multiquadric-biharmonic method // Computers and Mathematics with Applications. 1990. V. 19 (8/9). P. 163—208.
4. Kansa E. J. Multiquadrics — a scattered data approximation scheme with applications to computational fluid dynamics II: Solutions to parabolic, hyperbolic and elliptic partial differential equations // Computers and Mathematics with Applications. 1990. V. 19(8/9). P. 147—162.
5. Gu Y. T. A mesless local Kriging method for large deformation analyses // Computational Methods in Applied Mechanical Engineering. 2007. V. 196. P. 1673—1684.
6. Liu G. R. Point Interpolation Method Based on Local Residual Formulation Using Radial Basis Functions // Structural Engineering and Mechanics. 2009. V. 14. No. 6. P. 713—732.
7. Садыхов Р. А. Математические модели и эффективные алгоритмы решения оптимальных задач АСУТП добыча нефти // Автореф. дис. на соиск. учён. степ. докт. техн. наук. Баку, 1995.
8. Перат А. Нечёткое моделирование и управления. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2009.
9. Борисов В. В., Круглов В. В., Федулов А. С. Нечёткие модели и сети. М.: Горячая линия — Телеком, 2012.
10. Dreio I. Metaheuristics for hard optimization methods and case studies. Berlin: Springer, 2006.
11. Лавыгина А. В. Алгоритмы программные средства идентификации нечетких моделей на основе гибридных методов // Автореф. дис. на соиск. учён. степ. канд. техн. наук. Томск, 2010.
12. Aliyev R. Genetic algorithms-based fuzzy regression analysis // Soft Computing. 2002. T. 6. No. 6. P. 470—475.
13. Шведов А. С. О нечётко-случайных величинах. Препринт WP2/2013/02. М.: НИУ ВШЭ, 2013.
14. Воцинин А. П. Интервальный анализ: развитие и перспективы // Заводская лаборатория. Диагностика материалов. 2002. Т. 68. № 1. С. 118—126.
15. Зак Ю. А. Принятие решений в условиях нечётких и размытых данных. Технологии. М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2013.
16. Pashayev A., Askerov D., Ardil C., Sadiqov R. and Abdullayev P. Identification of Aircraft Gas Turbine Engines Temperature Condition // Int. J. computer information and systems science and engineering. 2007. V. 1. No. 1. P. 10—18.

Дата принятия: 08.09.2016.