

Литература

1. **Новоселов О. Н.** Идентификация состояния динамических объектов по измеряемым параметрам: от теории к практике // Измерительная техника. 2010. № 2. С. 20—24; **Novoselov O. N.** Identification Of The State Of Dynamic Objects From Measured Parameters. From Theory To Application // Measurement Techniques. 2010. V. 53. N. 2. P. 142—148.
2. **Новоселов О. Н.** Идентификация и анализ динамических систем: монография. М.: Изд-во Моск. гос. ун-та леса, 2010.
3. **Гуфельд И. Л.** Возможен ли прогноз сильных коровых землетрясений? // Вестник РАН. 2013. Т. 83. № 3. С. 236—245.
4. **Новоселов О. Н.** Оценка внешних воздействий на состояние динамических объектов // Измерительная техника. 2013. № 2. С. 8—10; **Novoselov O. N.** Evaluation of external effects on the state of dynamic objects // Measurement Techniques. 2013. V. 56. N. 2. P. 121—124.

5. **Свид-во** об офиц. регистрации программы для ЭВМ № 2012614516 «AnDynSys» / А. В. Афанасьев, В. В. Афанасьев, О. Н. Новоселов (RU) // Программы для ЭВМ, базы данных, топологии интегральных микросхем. 2012. № 3(80). С. 341.

6. **Новоселов О. Н.** Формирующие динамические системы с дискретным временем // Измерительная техника. 2004. № 12. С. 3—8; **Novoselov O. N.** Discrete-time dynamic shaping systems // Measurement Techniques. 2004. V. 56. N. 12. P. 1135—1143.

7. **Гаврилов В. А., Морозова Ю. В., Сторчеус А. В.** Вариации уровня геоакустической эмиссии в глубокой скважине Г-1 (Камчатка) и их связь с сейсмической активностью // Вулканология и сейсмология. 2006. № 1. С. 52—67.

8. **Беляков А. С., Николаев А. В.** Сейсмоакустические приемники с магнитоупругим преобразованием // Физика Земли. 1993. № 7. С. 74—80.

9. **Беляков А. С.** Геоакустические исследования и прогноз землетрясений // Сейсмические приборы. Вып. 35. М.: ОИФЗ РАН. 2001. С. 3—18.

Дата принятия 19.11.2013 г.

ИЗМЕРЕНИЯ В ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЯХ

389.17

Инвариантные соотношения между средними из малых выборок

Л. А. МИРОНОВСКИЙ*, В. А. СЛАЕВ**

* С.-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения, С.-Петербург, Россия, e-mail: miron@aanet.ru

** Всероссийский научно-исследовательский институт метрологии им. Д. И. Менделеева, С.-Петербург, Россия, e-mail: v.a.slaev@vniim.ru

Сформулирована задача поиска инвариантных алгебраических соотношений, связывающих различные средние оценки измерений, полученные из малых выборок. В качестве исследуемых оценок выбраны классические средние: арифметическое, геометрическое, гармоническое, контрагармоническое и квадратическое. Найдены алгебраические инварианты, связывающие между собой эти средние для случаев двух и трех измерений.

Ключевые слова: обработка измерительных данных, классические средние, малые выборки, инвариантные алгебраические соотношения средних.

The problem of search of invariant algebraic relations connecting different mean estimates of measurements derived from small samples is formulated. The classical arithmetic, geometric, harmonic, quadratic, and contraharmonic means are chosen as the assessments. The algebraic invariants linking these means between each other are found for two and three measurement cases.

Key words: processing of measurement data, classical means, small samples, invariant algebraic relations of means.

Один из важных разделов метрологии связан с обработкой результатов многократных измерений неизвестной величины. В частности, речь может идти о выходных сигналах нескольких датчиков, измеряющих одну и ту же величину, например, температуру, давление или другие параметры. Выбор алгоритма обработки измерительных данных суще-

ственно зависит от объема полученной выборки. Во многих практически важных случаях эта выборка оказывается слишком малой, чтобы к ней можно было применить обработку с использованием методов математической статистики [1, 2]. В качестве примера можно привести сличения национальных измерительных эталонов с целью установления степени их

эквивалентности [3]. В них участвует сравнительно небольшое число лабораторий, причем для некоторых видов измерений число участников сличений ограничивается двумя-тремя.

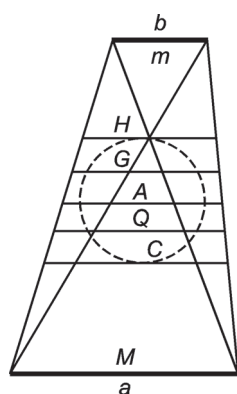
В подобных ситуациях приходится прибегать к нахождению средних оценок (арифметической, геометрической и других). В случае малых выборок эти средние оказываются связанными некоторыми алгебраическими соотношениями, не зависящими от значений измеряемых величин. Такие инвариантные соотношения можно использовать для контроля правильности вычислений, повышения точности получаемых оценок, оптимизации состава измерительных датчиков. В связи с этим возникает задача отыскания указанных инвариантных соотношений для различных совокупностей средних оценок.

Цель статьи — решение такой задачи для набора из пяти классических средних оценок — арифметической, геометрической, гармонической, контрагармонической и квадратической, когда число результатов измеряемых величин равно двум или трем.

Классические функции оценивания и постановка задачи. При обработке измерительной информации возникает задача математической обработки полученных результатов измерений $x_1, \dots, x_n$ и формирования оценки $y = f(x_1, \dots, x_n)$ неизвестной величины x . При этом функция оценивания должна удовлетворять некоторым математическим ограничениям общего характера. Одно из них (основное), сформулированное Коши [4], выражается следующим образом: средней величиной действительных чисел $x_1, x_2, \dots, x_n$ является любая функция $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ такая, что при всех возможных значениях аргументов значение этой функции не меньше минимального из этих чисел и не больше максимального из них, т. е.

$$\min(x_1, \dots, x_n) \leq f(x_1, \dots, x_n) \leq \max(x_1, \dots, x_n).$$

Функция такого вида называется средним по Коши. Заметим, что среднее от одинаковых чисел равно этому числу.



Трапеция средних для чисел a, b : гармонического, геометрического, арифметического, квадратического, контрагармонического, соответственно $H, G, A, Q, C; m, M$ — минимальное и максимальное из чисел a, b

Более жесткие требования к функции $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ предъявляются при определении средней величины по А. Н. Колмогорову [5]. Непрерывная действительная функция $f(x_1, \dots, x_n)$ от n неотрицательных переменных называется их средним, если для любых $x_1, \dots, x_n, \lambda \geq 0$ выполняются следующие условия:

Коши — $\min(x_1, \dots, x_n) \leq f(x_1, \dots, x_n) \leq \max(x_1, \dots, x_n)$;
возрастания — $x_1 \leq y_1, \dots, x_n \leq y_n \Rightarrow f(x_1, \dots, x_n) \leq f(y_1, \dots, y_n)$;
симметричности — при любой перестановке чисел $x_1, \dots, x_n$ значение функции f не меняется;
однородности — $f(\lambda x_1, \dots, \lambda x_n) = \lambda f(x_1, \dots, x_n)$.

В настоящее время известно много функций оценивания, удовлетворяющих перечисленным условиям [6, 7]. В некоторых случаях они оказываются

связанными алгебраическими соотношениями, не зависящими от значений переменных $x_1, \dots, x_n$. Задача нахождения подобных инвариантных соотношений ставится следующим образом. Пусть имеется совокупность m функций оценивания от n аргументов

$$y_i = f_i(x_1, \dots, x_n), \quad i = \overline{1, m}. \quad (1)$$

Требуется выяснить, существует ли хотя бы одно алгебраическое соотношение вида

$$g = (y_1, \dots, y_m) = 0, \quad (2)$$

справедливое при любых значениях аргументов $x_1, \dots, x_n$; предложить методику отыскания инвариантных соотношений вида (2); найти полный набор этих соотношений для заданных чисел m, n и конкретной совокупности функций (1).

Инвариантные соотношения для классических средних. Очевидно, что ответ на первый из поставленных вопросов о существовании инвариантных соотношений вида (2) будет положительным, если число функций оценивания превышает число аргументов: $m > n$. Простейший случай получаем при $m = n + 1$:

$$y_i = f_i(x_1, \dots, x_n), \quad i = \overline{1, n+1}. \quad (3)$$

Тогда, исключив из (3) n переменных $x_1, \dots, x_n$, найдем одно инвариантное соотношение $g = (y_1, \dots, y_{n+1}) = 0$, не зависящее от результатов измерений $x_1, \dots, x_n$.

Если $m = n+2$, то, поочередно удаляя одно из уравнений из (1) и действуя описанным образом, получаем совокупность инвариантных соотношений $g_i(y_1, \dots, y_{n+2}) = 0, i = \overline{1, n+2}$. Аналогично для $m = n+3$ получаем C_m^2 инвариантных соотношений и т. д.

Заметим, что и при $m < n$ среди соотношений (1) могут оказаться функционально зависимые, являющиеся комбинациями других. Один из подходов к выявлению таких комбинаций основан на построении матрицы Якоби исследуемой системы функций и анализе ее ранга. Это касается решения двух первых из поставленных выше задач; для решения третьей надо конкретизировать набор рассматриваемых функций оценивания. Выберем в качестве указанных функций пять классических средних, широко применяемых при обработке измерительных данных. Дадим их краткое описание для n чисел $x_1, \dots, x_n$.

Среднее арифметическое $y = A(x_1, \dots, x_n) = (x_1 + x_2 + \dots + x_n)/n$ — самое известное и распространенное из всех средних — минимизирует сумму квадратов отклонений.

Среднее геометрическое $y = G(x_1, \dots, x_n) = \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}$, $x_1, \dots, x_n > 0$ минимизирует сумму квадратов логарифмических отклонений.

Среднее гармоническое $y = H(x_1, \dots, x_n) = n/(x_1^{-1} + x_2^{-1} + \dots + x_n^{-1})$ минимизирует сумму квадратов отклонений обратных величин.

Среднее контрагармоническое $y = C(x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)/(x_1 + x_2 + \dots + x_n)$, название которого связано

с тем, что в случае двух измерений это среднее больше среднего арифметического настолько же, насколько среднее арифметическое больше среднего гармонического: $C - A = A - H$.

$$\text{Среднее квадратическое } y = Q(x_1, \dots, x_n) = \sqrt{(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)/n}$$

находит применение во многих приложениях. В частности, через него определяются такие понятия теории вероятностей и математической статистики, как дисперсия и среднее квадратическое отклонение.

Рассмотрим задачу нахождения алгебраических комбинаций перечисленных пяти средних, инвариантных по отношению к результатам измерений. Например, средние арифметическое, квадратическое и контрагармоническое при любых x_i удовлетворяют соотношению

$$AC - Q^2 = 0.$$

Очевидно, что количество подобных соотношений зависит как от набора рассматриваемых средних, так и от числа измерений n . Чем меньше n , тем большего количества инвариантных соотношений можно ожидать. Остановимся подробнее на их выявлении для случаев двух и трех измерений.

Инвариантные соотношения в случае двух измерений.

Предположим, что имеется два независимых результата измерений a , b неизвестной скалярной величины x и требуется найти ее оценку. Например, речь может идти о двухкратном взвешивании одного и того же груза, об оценке времени по показаниям двух хронометров и т. д. Для получения оценки будем использовать пять классических средних, которые в случае двух измерений описываются формулами

$$A = \frac{a+b}{2}; G = \sqrt{ab}; H = \frac{2ab}{a+b}; C = \frac{a^2+b^2}{a+b}; Q = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}. \quad (4)$$

Геометрическая интерпретация этих средних как некоторых отрезков в трапеции с основаниями a и b приведена

на рисунке. Все отрезки H , G , A , Q , C параллельны основаниям трапеции. Отрезок H , длина которого равна среднему гармоническому, проходит через точку пересечения диагоналей трапеции. Отрезок G , соответствующий среднему геометрическому, делит трапецию на две подобные части. Отрезок A — средняя линия трапеции, ее длина равна полусумме оснований, т. е. их среднему арифметическому. Отрезок Q , длина которого равна среднему квадратическому, делит трапецию на две равновеликие (по площади) части. Отрезок C , соответствующий среднему контрагармоническому, находится на таком же расстоянии от средней линии A , как и отрезок H ; центр пунктирной окружности лежит на отрезке A . Наконец, основания, равные максимальному M и минимальному m из чисел a , b , представляют крайние случаи средних значений.

Из рисунка следует, что средние значения удовлетворяют мажорантной цепочке неравенств

$$m \leq H \leq G \leq A \leq Q \leq C \leq M,$$

которая остается справедливой при любом числе измерений.

Для отыскания алгебраических соотношений, связывающих средние в (4), воспользуемся методом исключения параметров a , b из различных троек средних. Всего имеется десять вариантов таких троек, получаемых вычеркиванием из формул (4) следующих $C_5^2 = 10$ пар средних:

$$A, Q; G, Q; H, Q; C, Q; G, C; H, C; A, C; A, H; G, H; A, G. \quad (5)$$

Выполняя соответствующие выкладки, получаем $C_5^3 = 10$ алгебраических соотношений, связывающих различные тройки средних (табл. 1).

В каждой строке таблицы приведены инвариантные комбинации данной тройки средних, не зависящие от аргументов (чисел a , b), формула связи этих средних и соответствующее функциональное уравнение. Все инвариантные соотношения однородные, причем одно из них линейное, семь квадратичных и два соотношения (седьмое и восьмое) четвертого порядка. Для единообразия линейное уравнение во второй строке можно превратить в квадратичное, умножив его на A :

$$2A^2 - AC - AH = 0.$$

Поскольку число уравнений вдвое больше числа аргументов, то полученные соотношения должны быть функциональ-

Т а б л и ц а 1

Инвариантные комбинации средних при $n = 2$

№	Средние	Инвариантное соотношение	Формула связи трех средних	Функциональное уравнение
1	G, H, C	$H^2 + CH - 2G^2 = 0$	$H + (C + H) = 2G^2$	$G(A, C, H) + H = G$
2	A, H, C	$2A - C - H = 0$	$C + H = 2A$	$A(C, H) = A$
3	A, G, C	$2A^2 - AC - G^2 = 0$	$AC + G^2 = 2A^2$	$A(AC, G^2) = A^2$
4	A, G, H	$AH - G^2 = 0$	$AH = G^2$	$G(A, H) = G$
5	A, H, Q	$2A^2 - AH - Q^2 = 0$	$AH + Q^2 = 2A^2$	$A(AH, Q^2) = A^2$
6	A, G, Q	$G^2 + Q^2 - 2A^2 = 0$	$G^2 + Q^2 = 2A^2$	$Q(G, Q) = A$
7	G, H, Q	$-G^2H^2 - H^2Q^2 + 2G^4 = 0$	$H^2(G^2 + Q^2) = 2G^4$	$G(H, Q(G, Q)) = G$
8	G, C, Q	$C^2G^2 + C^2Q^2 - 2Q^4 = 0$	$C^2(G^2 + Q^2) = 2Q^4$	$G(C, Q(G, Q)) = Q$
9	A, C, Q	$AC - Q^2 = 0$	$AC = Q^2$	$G(A, C) = Q$
10	A, C, Q	$C^2 + CH - 2Q^2 = 0$	$C(C + H) = 2Q^2$	$G(A(C, H)), C = Q$

но зависимыми. Выпишем матрицу Якоби для левых частей инвариантных соотношений:

$$J = \begin{bmatrix} 0 & -4G & 2A + C & H & 0 \\ -C + 4A - H & 0 & -A & -A & 0 \\ -C + 4A & -2G & 0 & -A & 0 \\ H & -2G & a & 0 & 0 \\ 4A - H & 0 & -A & 0 & 0 \\ 4A & -2G & 0 & 0 & -2Q \\ 0 & -2GH^2 + 8G^3 & -2G^2H - 2HQ^2 & 0 & -2H^2Q \\ 0 & 2C^2G & 0 & 2G^2C + 2Q^2C & 2QC^2 - 8Q^3 \\ -C & 0 & 0 & -A & 2Q \\ 0 & 0 & C & H + 2C & -4Q \end{bmatrix}.$$

Анализ матрицы позволяет выявить следующие линейные зависимости между строками S_i этой матрицы:

$$S_2 + S_4 = S_3; S_4 + S_5 = S_6; S_5 + S_9 = S_2.$$

Аналогичные зависимости существуют и между соответствующими инвариантными соотношениями, приведенными в табл. 1: например, складывая четвертое и пятое, получаем шестое и т. д.

Инвариантные соотношения в случае трех измерений. Рассмотрим те же пять средних, при $n = 3$ формулы для них имеют вид

$$A = \frac{a+b+c}{3}; G = \sqrt[3]{abc}; H = \frac{3}{a^{-1}+b^{-1}+c^{-1}};$$

$$C = \frac{a^2+b^2+c^2}{a+b+c}; Q = \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}. \quad (6)$$

Алгебраические соотношения, связывающие между собой эти средние, найдем путем исключения параметров a, b, c из различных четверок средних (6). Всего имеем пять таких четверок

$$A, G, H, Q; A, G, H, C; G, H, C, Q; A, G, C, Q; A, H, C, Q.$$

Выполняя соответствующие выкладки, получаем четыре инвариантных соотношения, связывающие разные группы средних (табл. 2).

Таблица 2

Инвариантные комбинации средних при $n = 3$

№	Четыре средних	Инвариантное соотношение	Формула связи четырех средних
1	A, G, H, Q	$3A^2H - HQ^2 - 2G^2 = 0$	$2G^3 + HQ^2 = 3A^2H$
2	A, G, H, C	$3A^2H - HQ^2 - 2G^2 = 0$	$2G^3 + ACH = 3A^2H$
3	G, H, C, Q	$C^2HQ^2 + 2G^3C^2 - 3HQ^4 = 0$	$C^2(HQ^2 + 2G^3) = 3HQ^4$
4	$A, G, C, Q;$ A, H, C, Q	$AC - Q^2 = 0$	$AC = Q^2$

Эти соотношения не являются независимыми. Например, подстановка $Q^2 = AC$ в третье соотношение дает второе.

Для анализа функциональной зависимости инвариантных соотношений построим матрицу Якоби для четырех функций

$$f_1 = 3A^2H - HQ^2 - 2G^2;$$

$$f_2 = 3A^2H - AHC - 2G^3;$$

$$f_3 = C^2HQ^2 + 2G^3C^2 - 3HQ^4; f_4 = H(AC - Q^2)$$

от пяти аргументов (A, G, H, C, Q) :

$$J = \begin{bmatrix} 6AH & -6G^2 & -Q^2 + 3A^2 & 0 & -2QH \\ -HC + 6AH & -6G^2 & -CA + 3A^2 & -AH & 0 \\ 0 & 6G^2C^2 & G^2C^2 - 3Q^4 & 2CHQ^2 + 4G^3C & -2C^2HQ - 12HQ \\ HC & 0 & CA - Q^2 & AH & -2QH \end{bmatrix}.$$

Ранг матрицы равен трем, что свидетельствует о линейной зависимости ее строк: первая строка равна сумме второй и четвертой. Этому соответствует аналогичная зависимость функций $f_1 = f_2 + f_4$.

Таким образом, рассмотренные пять средних при $n = 2$ оказались связанными десятью инвариантными соотношениями, а при $n = 3$ — четырьмя. При $n = 4$ и выше для них остается только одно соотношение: $AC = Q^2$. Число соотношений, связывающих средние, можно увеличить, если допустить включение в них самих усредняемых величин. Примером могут служить соотношения

$$Q^2 = A^2 + q^2; C = A + q^2/A,$$

где q — среднее квадратическое централизованных измере-

$$\text{ний; } q^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - A)^2.$$

Кроме того, иногда рассматривают приближенные соотношения между средними. Так, достаточно популярно приближенное равенство $N \approx A - 3(A - M)$ между модой N , средним арифметическим A и медианой M .

Дополнительные инвариантные соотношения. Инвариантные соотношения, приведенные в табл. 1 и 2, справедливы при любых значениях аргументов и априори не требуют никакой информации об измеряемых величинах. Наличие такой информации может привести к появлению дополнительных инвариантных соотношений, связывающих средние. В частности, подобные соотношения возникают, если известно, что измеряемые величины зависимы, например, связаны некоторой пропорцией либо другой функциональной зависимостью. Такие дополнительные соотношения, основанные на имеющейся априорной информации об измеряемых величинах, будем называть *условными инвариантными соотношениями*. Задача их выявления отличается от рассмотренных выше добавлением к совокупности функций (1) уравнений вида

$$h_j(x_1, \dots, x_n) = 0, j = \overline{1, k}. \quad (7)$$

Нахождение условных инвариантных соотношений по-прежнему может проводиться исключением аргументов из системы (1), дополненной уравнениями (7). Проиллюстрируем соответствующую процедуру для $n = 3$ и классических средних (6), если дополнительно известно, что измеряемые величины a, b, c являются членами арифметической или геометрической прогрессии.

Случай 1. Пусть априори известно, что a, b, c являются соседними членами некоторой арифметической прогрессии. Это означает, что они связаны соотношениями

$$b = a + q; \quad c = a + 2q, \quad (8)$$

где q — разность арифметической прогрессии — заранее неизвестна.

После подстановки выражений (8) в (6) получим пять уравнений:

$$A = a + q; \quad G^3 = a(a + q)(a + 2q);$$

$$H((a + q)(a + 2q) + a(a + 2q) + (a + q)) = 3a(a + q)(a + 2q);$$

$$3C(a + q) = 3a^2 + 6aq + 5q^2;$$

$$3Q^2 = 3a^2 + 6aq + 5q^2.$$

Для отыскания инвариантных соотношений, связывающих между собой средние, будем исключать параметры a, q из различных троек средних. Всего имеем десять вариантов таких троек. Выполняя соответствующие выкладки, получаем десять алгебраических соотношений (условных инвариантов), связывающих различные тройки средних (табл. 3). В каждой строке таблицы приведены инвариантное соотношение для данной тройки средних, не зависящее от аргументов (чисел a, q), и формула связи этих средних.

Случай 2. Пусть известно, что a, b, c являются соседними членами некоторой геометрической прогрессии. Это означает, что они связаны соотношениями $b = aq, c = aq^2$, где q — знаменатель геометрической прогрессии — неизвестен.

Тогда формулы для средних принимают вид

$$3A = a(1 + q + q^2); \quad G = aq;$$

$$H = (1 + q + q^2) = 3aq^2;$$

$$C(1 + q + q^2) = a(1 + q^2 + q^4);$$

$$3Q^2 = a^2(1 + q^2 + q^4).$$

Для определения алгебраических соотношений, связывающих между собой средние A, G, H, C, Q , вновь воспользуемся методом исключения параметров a, q из различных троек средних. Всего имеем десять

вариантов. Выполняя соответствующие выкладки, получаем десять алгебраических соотношений (условных инвариантов), связывающих различные тройки средних (табл. 4). В каждой строке таблицы приведены инвариантные комбинации для данной тройки средних, не зависящие от чисел a, q , и формула связи этих средних. Заметим, что знание инвариантных соотношений может оказаться полезным для экономии вычислительных операций при нахождении совокупности средних, для контроля вычислений и при обработке косвенных измерений [8].

Пример. Имеется параллелепипед с соотношением сторон $a:b:c = 4:2:1$ (стандартная пропорция для кирпича). В результате геометрических измерений были найдены его объем $V = 8$, площадь поверхности $S = 28$ и суммарная

Таблица 3

Условные инварианты в случае арифметической прогрессии

№	Три средних	Инвариантное соотношение	Формула связи трех средних
1	A, G, H	$-2HA^3 - HG^3 + 3AG^3 = 0$	$3AG^3 = 2H(A^3 + G^3)$
2	A, G, Q	$-2G^3 + 5A^3 - 3AQ^2 = 0$	$2G^3 + 3AQ^2 = 5A^3$
3	A, G, C	$5A^3 - 3A^2C - 2G^2 = 0$	$3CA^2 + 2G^3 = 5A^3$
4	A, H, Q	$15A^3 - 9A^2H - 9AQ^2 + 3HQ^2 = 0$	$15A^3 + 3HQ^2 = 9A(AH + Q^2)$
5	A, H, C	$5A^2 - 3AC - 3AH + HC = 0$	$5A^2 + HC = 3A(H + C)$
6	A, C, Q	$AC - Q^2 = 0$ для любого n	$AC = Q^2$
7	G, H, Q	$50G^9 - 12H^2Q^4G^3 + 4H^3Q^6 - 15HQ^2G^6 - 27H^3G^6 = 0$	$4H^3G^6 + 50G^9 - 12Q^4H^2G^3 = 15Q^2HG^6 + 27H^3G^6$
8	G, H, C	$50G^6 - 9H^2G^3C - 2H^3C^3 - 12HC^2G^3 - 27H^3G^3 = 0$	$9H^2G^3C + 27H^3G^3 + 12G^3HC^2 + 2H^3C^3 = 5$
9	G, C, Q	$2G^3C^3 + 3C^2Q^4 - 5Q^6 = 0$	$C^2(2G^3C + 3Q^4) = 5Q^6$
10	H, C, Q	$-3C^2Q^2 + 5Q^4 + C^3H - 3CQ^2H = 0$	$5Q^4 + HC^3 = 3CQ^2(C + H)$

Таблица 4

Условные инварианты в случае геометрической прогрессии

№	Три средних	Инвариантное соотношение	Формула связи трех средних
1	A, G, H	$AH - G^2 = 0$	$AH = G^2$
2	A, G, Q	$3A^2 - 2GA - Q^2 = 0$	$3A^2 = 2GA + Q^2$
3	A, G, C	$3A - C - 2Q = 0$	$3A = C + 2Q$
4	A, H, Q	$9A^4 - 4A^3H - 6A^2Q^2 + Q^4 = 0$	$9A^4 + Q^4 = 2A^2(2AH + 3Q^2)$
5	A, H, C	$-4HA + C^2 + 9A^2 - 6AC = 0$	$C^2 + 9A^2 = 2A(2H + 3C)$
6	A, C, Q	$AC - Q^2 = 0$ для любого n	$AC = Q^2$
7	G, H, Q	$-Q^2H^2 - 2HG^3 + 3G^4 = 0$	$3G^4 = Q^2H^2 + 2HG^3$
8	G, H, C	$-3G^2 + 2HG + HC = 0$	$H(2G + C) = 3G^2$
9	G, C, Q	$C^2 + 2CG - 3Q^2 = 0$	$3Q^2 = C(C + 2G)$
10	H, C, Q	$C^4 - 6C^2Q^2 - 4CHQ^2 + 9Q^4 = 0$	$C^4 + 9Q^4 = 2CQ^2(2H + 3C)$

длина всех его ребер $L = 28$. Требуется проверить правильность измерений.

В данном случае среднее арифметическое длин ребер

$A = L/12 = 7/3$, их среднее геометрическое $G = \sqrt[3]{V} = 2$. Среднее гармоническое длин ребер найдем, поделив утроенный объем параллелепипеда на половину площади его поверхности:

$$H = 6V/S = 3abc / (ab + ac + bc) = 12/7.$$

Поскольку по условию длины сторон параллелепипеда образуют геометрическую прогрессию, указанная тройка средних A, G, H должна удовлетворять инвариантному соотношению $AN - G^2 = 0$, приведенному в первой строке табл. 4. Подставляя в него численные значения $A = 7/3, G = 2, H = 12/7$, убеждаемся, что оно выполняется, т. е. измерения проведены верно.

Выводы. Рассмотрена задача поиска инвариантных соотношений для различных средних, полученных из малых выборок. В качестве исследуемых оценок выбраны пять классических средних: арифметическое, геометрическое, гармоническое, квадратическое и контрагармоническое. Найдены алгебраические инварианты, связывающие между собой эти средние для случаев двух и трех результатов измерений. Получены условные алгебраические инварианты, учитывающие априорную информацию об измеряемых величинах.

Найденные алгебраические инварианты можно использовать для повышения точности измерений, контроля вычислений, оптимизации состава измерительных датчиков.

Л и т е р а т у р а

1. Гаскаров Д. В., Шаповалов В. И. Малая выборка. М.: Статистика, 1978.
2. Мироновский Л. А., Слаев В. А. Оценивание результатов измерений по малым выборкам // Информационно-управляющие системы. 2011. № 1. С. 69—78.
3. Mathematics, statistics and computation to support measurement quality: Proc. Int. Seminar. St. Petersburg: VNIIM, 2012.
4. Орлов А. И. Прикладная статистика. М.: Экзамен, 2006.
5. Колмогоров А. Н. Избранные труды. Математика и механика. М.: Наука, 1985. С. 136—138.
6. Мироновский Л. А., Слаев В. А. Алгоритмы оценивания результата трех измерений. СПб.: Профessional, 2010.
7. Toader S., Toader G. Greek means // Automat. Comput. Appl. Math. 2002. V. 11. N. 1. P. 159—165.
8. Мироновский Л. А., Слаев В. А. Инварианты в метрологии и технической диагностике // Измерительная техника. 1996. № 6. С. 3—14; Mironovsky L. A., Slaev V. A. Invariants in metrology and technical diagnostics. Measurement Techniques. 1996. V. 39. N. 6. P. 577—593.

Дата принятия 02.12.2013 г.

53.088.6:53.089.6:6250:629.052.7

Метод структурно-параметрической идентификации лагранжевых динамических систем в задачах обработки измерительной информации

А. А. КОСТОГЛОТОВ, А. И. КОСТОГЛОТОВ, С. В. ЛАЗАРЕНКО, Б. М. ЦЕННЫХ

Ростовский технический университет, Ростов-на-Дону, Россия, e-mail: rh3311@mail.ru

На основе применения аппарата негладкого анализа условия минимума функционала невязки в совокупности с приемом расширения пространства состояний разработан новый метод решения обратной измерительной задачи. Уменьшение вычислительных затрат подтверждено результатами математического моделирования решения обратной задачи в условиях параметрической неопределенности для измерительного преобразователя температуры.

Ключевые слова: обратная измерительная задача, расширение пространства состояний, структурно-параметрическая идентификация, негладкий анализ.

Through the application of uneven analysis of discrepancy functional combined with the space of state expansion the new method of inverse measurement task solution is developed. The reduction of computational cost is confirmed by results of mathematical modelling of the inverse task solution in the conditions of parametric uncertainty for temperature measuring transducer.

Key words: inverse measurement task, expansion of space of states, structural-parametric identification, uneven analysis.

Задача коррекции динамической погрешности возникает при измерении быстро меняющихся или импульсных сигналов, а также в случае значительной инерционности датчи-

ков при относительно высокой динамике протекающих процессов. Например, такая ситуация может возникнуть при тепловых измерениях [1, 2]. Точность измерений входного