

Общие свойства динамических систем: от измерений к уравнению

О. Н. НОВОСЕЛОВ

Московский государственный университет леса, Москва, Россия, e-mail: onn@mgul.ac.ru

Установлены общие свойства динамических систем различной природы на основе их математического описания разностными уравнениями эволюции состояния, построенными и корректируемыми по результатам измерений.

Ключевые слова: динамическая система, информативный измеряемый параметр, разностное уравнение эволюции состояния, поле решений, аттрактор.

The common properties of dynamic systems of various nature are established on the base of its mathematical description by difference state evolution equations which are constructed and corrected according to measurement results.

Key words: dynamic system, informative measured parameter, difference state evolution equation, solution field, attractor.

Функционирование динамической системы как единого целого опирается на законы природы, общие для всех субстанций, образующих материальную среду: материи, энергии и поля. Фундаментальным математическим описанием динамической системы является уравнение эволюции состояния. Единственным объективным источником информации для его построения служат измерения. Следовательно, уравнение, построенное по результатам измерений, должно содержать коэффициенты, аккумулирующие эффекты взаимодействия объекта со средой: массообмен, энергообмен, взаимодействие полей. Идеально было бы установить коэффициенты, контролирующие конкретные взаимодействия. Тогда при помощи такого уравнения можно попытаться выделить определенные закономерности в поведении динамических систем.

Уравнение эволюции состояния системы. Выбираем класс разностных уравнений, поскольку они согласуются с дискретностью окружающего мира по пространству и времени на всех иерархических уровнях: от астрофизического до квантового. Кроме того, они сочетаются с современными цифровыми технологиями измерений и обработки информации.

Разностное уравнение является в общем случае векторным нелинейным:

$$x_k = a_0 + \sum_{q_1=1}^{\eta} a_{q_1} x_{k-q_1} + \sum_{q_1=1}^{\eta} \sum_{q_2=1}^{q_1} a_{q_1 q_2} x_{k-q_1} x_{k-q_2} + \dots + \sum_{q_1=1}^{\eta} \sum_{q_2=1}^{q_1} \dots \sum_{q_v=1}^{q_{v-1}} a_{q_1 \dots q_v} x_{k-q_1} x_{k-q_2} \dots x_{k-q_v}. \quad (1)$$

Здесь x_k — векторная или скалярная переменная; η , v — порядок и степень уравнения.

Размерность вектора равна количеству совместно измеряемых параметров, по которым синтезируется уравнение. Степень и порядок уравнения задают либо вычисляют вместе с коэффициентами $\{a_0, a_{q_1}, \dots\}$ по последовательности

результатов измерений через выборочные статистические оценки моментов распределения вероятностей по критерию

минимума дисперсии погрешности отклонения расчетной последовательности (1) от исходной [1, 2].

Сходимость функционального степенного ряда в (1) обеспечивает открытость этой математической модели к развитию по мере получения новой измерительной информации. Развитие заключается в повышении векторной размерности, порядка и степени уравнения. Для этого требуется повышение точности измерений. Открытость модели обеспечивает универсальность математического описания поведения динамических систем.

Вырожденное разностное уравнение нулевой степени. Это уравнение получим из (1), оставив только начальный член

$$x_k = a_0, k = 0, 1, 2, \dots \quad (2)$$

Оно характеризует состояние покоя при $a_0 = 0$ или динамического равновесия — «равномерного прямолинейного движения» при $a_0 = \text{const} \neq 0$, в одном из которых система должна пребывать согласно первому закону Ньютона при отсутствии или нулевом балансе внешних воздействий. Качественно поставлены потому, что динамическое равновесие относим не только к механическому движению, но и к более общему понятию движения в пространстве состояний системы.

При таком обобщении понятия «движение» воздействия по своей физической природе могут относиться к любой из возможных субстанций — материи, энергии и полю или их сочетанию. Коэффициенты, контролирующие энергообмен и взаимодействие полей, будут рассмотрены ниже, поэтому на долю a_0 остается баланс массообмена. Эту величину можно сделать безразмерной либо придать ей подходящую размерность, например массы, путем умножения a_0 в (2) на единичный множитель с такой нормирующей размерностью, чтобы размерность произведения совпадала с размерностью измеряемого параметра. Примером массопереноса служит взаимодействие восходящих потоков легких газов с твердой фазой в верхней мантии Земли, что связано с процессом образования очагов землетрясений [3]. Коэффициент a_0 может быть также истолкован как фиксированное внешнее воздействие на систему [4].

Вырожденное уравнение описывает динамическую смерть системы. Для описания жизни необходимо вывести выражение собственной динамики состояний системы. Первым приближением является линейное уравнение.

Анализ уравнения первой степени. Параметры состояния. На основании (1) линейное уравнение имеет вид

$$x_{k+2} = a_0 + ax_{k+1} + bx_k. \quad (3)$$

Решение этого уравнения складывается из общего решения однородного уравнения, получаемого из (3) при $a_0 = 0$, и частного решения исходного неоднородного уравнения. Решения получены в результате строгого аналитического расчета и детально проанализированы в [2]. Анализ выявил некоторые общие свойства динамических систем. Все системы могут пребывать в трех состояниях: устойчивом, неустойчивом и катастрофическом (экстремальном). Поведение системы в каждом состоянии характеризуется типом решения. Решением уравнения при заданных коэффициентах и начальных (граничных) значениях является последовательность $\{x_k, k = 0, 1, 2, \dots\}$. Устойчивому состоянию соответствуют сходящиеся решения, неустойчивому — решения типа незатухающих колебаний, ограниченных по амплитуде, катастрофическому — расходящиеся решения.

Все множество решений геометрически отображается в пространстве решений (оно же — пространство состояний системы), в котором координатами являются коэффициенты a, b и начальные значения. Каждое решение в этом пространстве отображается точкой с конкретными числовыми значениями указанных координат. Точки всех однотипных решений образуют область (для наглядности каждая область «окрашивается» своим цветом).

Коэффициенты a, b при фиксированных начальных значениях и a_0 задают положение точки в одном из трех состояний системы и поэтому названы параметрами состояния динамической системы. Из (3) следует, что при любой размерности измеряемой величины x коэффициенты a, b оказываются безразмерными.

Динамическая система подчиняется первому закону Ньютона лишь в том случае, если она находится в устойчивом состоянии. Только в этом состоянии решения уравнений системы имеют устойчивое предельное значение — аттрактор. Для уравнения (3) аттрактор выражается формулой

$$X^0 = a_0 / [1 - (a + b)] \quad (4)$$

для всех точек с координатами (a, b) , лежащих строго внутри треугольника — области сходящихся решений (ОСР), образованного пересечениями граничных прямых: $a = 1 - b$; $a = b - 1$; $b = -1$. Выражение (4) объединяет множество предельных значений сходящихся решений. Из (4) следует, что каждой внутренней точке треугольника с координатами (a, b) соответствует не одно, а множество решений (последовательностей), получаемых при всех возможных размерах вектора (x_0, x_1) начальных значений и любых a_0 .

На рис. 1 показано поле решений уравнения (3) с коэффициентами $a_0 = 147,5284$; $a = 0,5268$; $b = 0,3139$ при начальных значениях $x_0 = 1035,72$; $x_1 = 1008,085$ для одной из реальных динамических систем. Вид поля решений является универсальным (общим) для любых динамических систем, описываемых линейным уравнением (3). Индивидуальность системы будет проявляться лишь в положении точки состояния (обведена кружком), имеющей координаты (a, b) . На рис. 1 серым выделена область сходящихся решений, черным —

области псевдощумовых (почти периодических) и циклических решений; белое (незакрашенное) поле — область расходящихся решений, в которой содержатся также решения, сходящиеся при некоторых точно заданных начальных значениях, но расходящиеся при малейшем их изменении [2].

Ввиду невозможности графического изображения пятимерного пространства (с координатами a_0, a, b, x_0, x_1), можно рассматривать рис. 1 как его двумерное отображение в координатах (a, b) , полученное «сплющиванием» пятимерного пространства по координатам a_0, x_0, x_1 . Для практического использования значения аттрактора в каждой внутренней точке треугольника рис. 1 рассчитывают по (4) или с помощью программы AnDynSys [5].

Нелинейные уравнения. Существует ряд объективных факторов, учет которых в рамках линейной модели (3) принципиально невозможен. К ним относятся энергетический обмен и взаимодействие полей, пороговые явления, удары и выбросы, хаотические процессы, квантовые переходы и др. Для их учета требуются нелинейные уравнения. В рамках открытой модели (1) это достигается уравнениями повышающейся степени.

Квадратичное уравнение: учет энергообмена. Уравнение имеет вид

$$x_{k+2} = a_0 + ax_{k+1} + bx_k + cx_{k+1}^2 + dx_k^2. \quad (5)$$

Квадраты переменной x имеют смысл энергии (или пропорциональны ей), коэффициенты при них являются параметрами масштаба выходного сигнала системы [2] и отражают баланс энергообмена с внешней средой, поскольку измерения проводятся в процессе функционирования объекта в его естественной среде.

Система, описываемая уравнением (5), как и линейная, может пребывать в трех состояниях (устойчивом, неустойчивом и катастрофическом), которым соответствуют сходящиеся, несходящиеся и расходящиеся решения. В этом случае еще одним видом несходящихся решений являются хаотические последовательности — явление, характерное только для нелинейных систем.

Другое отличие от линейной системы состоит в том, что система, описываемая квадратичным уравнением (5), имеет два аттрактора в области сходящихся решений. Поэтому ОСР состоит из двух частей: в каждой из них свой аттрактор, математически описывающий множество предельных значений сходящихся последовательностей при заданных коэффициентах и начальных значениях. Строгий аналитический расчет аттракторов и границ обеих частей ОСР пока удалось сделать лишь для квадратичного уравнения первого порядка [6]. Для рассматриваемого квадратичного уравнения второго порядка ограничимся численным расчетом и графическим построением с использованием программы AnDynSys.

Каждому из двух аттракторов соответствует определенная часть ОСР. Обе части могут быть смежными (односвязная ОСР). При $a_0 < 0$ они становятся разобщенными (двухсвязная ОСР) и порождают эффект биустойчивости системы

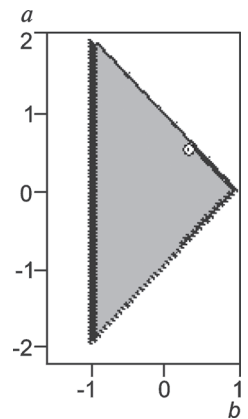


Рис. 1. Универсальный вид поля решений уравнения (3) для любых динамических систем

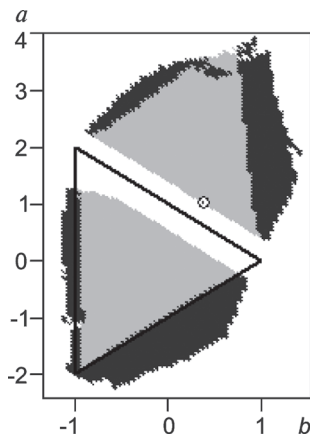


Рис. 2. Иллюстрация эффекта биустойчивости динамической системы. Поле решений квадратного уравнения (5) при $a_0 < 0$

ки из одной части ОСР в другую, минуя состояние катастрофичности. Отсюда и предлагаемое название — эффект биустойчивости.

Поле решений для рис. 2 рассчитано при $a_0 = -194,7545$; $a = 1,0279$; $b = 0,3976$; $c = -1,7736 \cdot 10^{-4}$; $d = -4,9548 \cdot 10^{-5}$; $x_0 = 1035,72$; $x_1 = 1008,085$.

Кубическое уравнение: учет воздействия физических полей. Уравнение принимает вид

$$x_{k+2} = a_0 + ax_{k+1} + bx_k + cx_k^2 + dx_k^2 + gx_{k+1}^3 + hx_k^3 \quad (6)$$

и содержит решения тех же типов, что и квадратичное, но с тем отличием, что имеет три аттрактора и ОСР, состоящую из трех частей. Все они могут быть разобщенными (рис. 3). Разобшение происходит при $a_0 < 0$ в сочетании с определенными начальными значениями. На рис. 3 верхняя и нижняя части ОСР разделены белым промежутком расходящихся решений; верхняя часть разделена черной полосой ограниченных решений колебательного типа. Следовательно, в системе, описываемой кубическим уравнением (6), существуют три области устойчивости и возможны скачкообразные переходы между ними.

Поле решений для рис. 3 получено при $a_0 = -152,2858$; $a = 2,3824$; $b = -1,8130$; $c = -1,0069 \cdot 10^{-3}$; $d = 1,4346 \cdot 10^{-3}$; $g = 1,5544 \cdot 10^{-7}$; $h = -3,0408 \cdot 10^{-7}$; $x_0 = 1035,72$; $x_1 = 1008,085$.

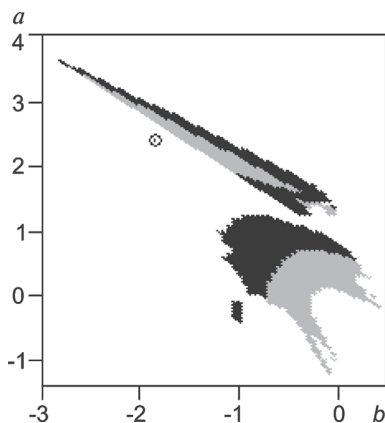


Рис. 3. Поле решений кубического уравнения (6) с тремя разобщенными частями области сходящихся решений

(рис. 2). Он состоит в том, что при плавном изменении координат (a, b) точка состояния может перейти из одной части ОСР в другую через промежуточную (белую) полосу катастрофических состояний (расходящихся решений). При этом состояние претерпевает две бифуркации: от устойчивого к катастрофическому при пересечении первой границы (с белой полосой) и от катастрофического к устойчивому при пересечении второй границы.

Заметим, что при определенном изменении координат (a, b) и начальных значений не исключен скачок точки

Влияние кубических членов значительно слабее эффектов массопереноса и энергообмена, поскольку коэффициенты при кубических членах по модулю на несколько порядков меньше коэффициентов c, d (на четыре порядка для примера на рис. 3).

О каком физическом приложении может идти речь? Прежде всего это влияние физических полей:

электромагнитного, гравитационного, ядерного и др. Тогда естественно назвать g, h коэффициентами баланса влияния физических полей на систему (гипотеза требует экспериментальной проверки). Можно разделить эффекты влияния различных полей путем ввода в уравнение слагаемых все более высоких степеней для учета все более слабых полей (коэффициенты по модулю будут убывать). Уравнение, отображающее влияние всех физических явлений, будет носить универсальный характер для объектов любой природы (универсальная модель). Индивидуальность объекта будет отражаться значениями коэффициентов.

Чувствительность детектора и степень уравнения. Регистрируемыми параметрами при построении уравнений и множеств их решений на рис. 1—3 являлись результаты измерений уровня геоакустической эмиссии в третьоктавной полосе частот с центральной частотой 160 Гц. Измерения проводили геофоном МАГ-3С, установленным на глубине 1035 м в скважине Г-1 в окрестности Петропавловска-Камчатского [7]. Чувствительный элемент геофона, воспринимающий упругую волну деформации геосреды, — намагниченный ферромагнитный стержень. Чувствительность (минимальная амплитуда измеряемой деформации) составляла 10^{-10} м. По мнению специалистов [7, 8], такая чувствительность лежит в интервале значений, обеспечивающем регистрацию фоновых геодинамических процессов, приливных воздействий (скважина находится в 15 км от береговой черты Авачинского залива) и землетрясений с магнитудой $M \geq 5,5$ в радиусе до 550 км от пункта наблюдения. О событиях свидетельствует возрастающая по сравнению с фоном интенсивность геоакустических колебаний [9].

По мере повышения чувствительности детектора можно будет ставить вопрос об индивидуальной идентификации реакции среды на различные воздействия. Математически это будет выражаться в закреплении отдельных членов уравнения эволюции состояния системы за реакцией на конкретные воздействия. Члены уравнения со все более высокими степенями будут контролировать все более слабые воздействия, что математически согласуется с убыванием модулей этих коэффициентов в сходящемся степенном ряду. Сообразно убыванию модулей необходимо повышать точность измерений, чувствительность и частотную избирательность измерительных устройств. В противном случае информативная составляющая измеряемого сигнала будет маскироваться паразитной помехой.

Для надежного обнаружения экстремального события используют несколько информативных измеряемых параметров системы. Если эти параметры независимы, то вероятность обнаружения будет наибольшей. Однако в этом случае нет смысла строить и решать векторное уравнение состояния, так как при отсутствии взаимной корреляции измеряемых параметров оценки коэффициентов не улучшатся. Проще по каждому измеряемому параметру строить свое уравнение, а решение принимать на основе совместной экспертизы построенных скалярных уравнений.

Выбор порядка разностного уравнения диктуется компромиссом между полнотой и простотой анализа. Для полноты необходимо, чтобы множество решений построенного уравнения содержало все возможные типы решений. Для простоты желательно, чтобы порядок был минимальным. Такой компромиссный порядок равен двум. При меньшем порядке ($\eta = 1$) из решений уравнения выпадают периодические и почти периодические решения [2].

Литература

1. **Новоселов О. Н.** Идентификация состояния динамических объектов по измеряемым параметрам: от теории к практике // Измерительная техника. 2010. № 2. С. 20—24; **Novoselov O. N.** Identification Of The State Of Dynamic Objects From Measured Parameters. From Theory To Application // Measurement Techniques. 2010. V. 53. N. 2. P. 142—148.
2. **Новоселов О. Н.** Идентификация и анализ динамических систем: монография. М.: Изд-во Моск. гос. ун-та леса, 2010.
3. **Гуфельд И. Л.** Возможен ли прогноз сильных коровых землетрясений? // Вестник РАН. 2013. Т. 83. № 3. С. 236—245.
4. **Новоселов О. Н.** Оценка внешних воздействий на состояние динамических объектов // Измерительная техника. 2013. № 2. С. 8—10; **Novoselov O. N.** Evaluation of external effects on the state of dynamic objects // Measurement Techniques. 2013. V. 56. N. 2. P. 121—124.

5. **Свид-во** об офиц. регистрации программы для ЭВМ № 2012614516 «AnDynSys» / А. В. Афанасьев, В. В. Афанасьев, О. Н. Новоселов (RU) // Программы для ЭВМ, базы данных, топологии интегральных микросхем. 2012. № 3(80). С. 341.

6. **Новоселов О. Н.** Формирующие динамические системы с дискретным временем // Измерительная техника. 2004. № 12. С. 3—8; **Novoselov O. N.** Discrete-time dynamic shaping systems // Measurement Techniques. 2004. V. 56. N. 12. P. 1135—1143.

7. **Гаврилов В. А., Морозова Ю. В., Сторчеус А. В.** Вариации уровня геоакустической эмиссии в глубокой скважине Г-1 (Камчатка) и их связь с сейсмической активностью // Вулканология и сейсмология. 2006. № 1. С. 52—67.

8. **Беляков А. С., Николаев А. В.** Сейсмоакустические приемники с магнитоупругим преобразованием // Физика Земли. 1993. № 7. С. 74—80.

9. **Беляков А. С.** Геоакустические исследования и прогноз землетрясений // Сейсмические приборы. Вып. 35. М.: ОИФЗ РАН. 2001. С. 3—18.

Дата принятия 19.11.2013 г.

ИЗМЕРЕНИЯ В ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЯХ

389.17

Инвариантные соотношения между средними из малых выборок

Л. А. МИРОНОВСКИЙ*, В. А. СЛАЕВ**

* С.-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения, С.-Петербург, Россия, e-mail: miron@aanet.ru

** Всероссийский научно-исследовательский институт метрологии им. Д. И. Менделеева, С.-Петербург, Россия, e-mail: v.a.slaev@vniim.ru

Сформулирована задача поиска инвариантных алгебраических соотношений, связывающих различные средние оценки измерений, полученные из малых выборок. В качестве исследуемых оценок выбраны классические средние: арифметическое, геометрическое, гармоническое, контрагармоническое и квадратическое. Найдены алгебраические инварианты, связывающие между собой эти средние для случаев двух и трех измерений.

Ключевые слова: обработка измерительных данных, классические средние, малые выборки, инвариантные алгебраические соотношения средних.

The problem of search of invariant algebraic relations connecting different mean estimates of measurements derived from small samples is formulated. The classical arithmetic, geometric, harmonic, quadratic, and contraharmonic means are chosen as the assessments. The algebraic invariants linking these means between each other are found for two and three measurement cases.

Key words: processing of measurement data, classical means, small samples, invariant algebraic relations of means.

Один из важных разделов метрологии связан с обработкой результатов многократных измерений неизвестной величины. В частности, речь может идти о выходных сигналах нескольких датчиков, измеряющих одну и ту же величину, например, температуру, давление или другие параметры. Выбор алгоритма обработки измерительных данных суще-

ственно зависит от объема полученной выборки. Во многих практически важных случаях эта выборка оказывается слишком малой, чтобы к ней можно было применить обработку с использованием методов математической статистики [1, 2]. В качестве примера можно привести сличения национальных измерительных эталонов с целью установления степени их