

Формфактор полого цилиндрического образца при сдвиговой деформации

В. М. КУЛИК¹, А. В. БОЙКО²

¹ Институт теплофизики СО РАН, Новосибирск, Россия, e-mail: vkulik@itp.nsc.ru

² Институт теоретической и прикладной механики СО РАН, Новосибирск, Россия, e-mail: boiko@itam.nsc.ru

Представлены результаты расчета формфактора полого цилиндрического образца при сдвиговой деформации, учитывающего влияние размеров образца и коэффициента Пуассона на реально измеряемый модуль сдвига.

Ключевые слова: модуль сдвига, коэффициент Пуассона, полый цилиндрический образец, формфактор.

The results of computing the hollow cylinder sample form-factor at shear deformation are presented. This form-factor takes into account an influence of the sample dimensions and Poisson's ratio on measurements of shear modulus.

Key words: shear modulus, Poisson ratio, hollow cylinder sample, form factor.

Модуль сдвига резин определяют по методу, согласно которому требуется вулканизация четырех параллелепипедов стандартных размеров из сырой резины для изготовления «сэндвича», помещаемого в испытательную машину [1]. Для большого класса синтетических резин, не требующих вулканизации, а полимеризующихся при комнатной температуре от катализатора, такой метод избыточно сложен. Логично образец для испытаний изготавливать простым образом — заливкой приготовленной смеси в зазор между коаксиальными цилиндрами. Осевая симметричность образца обеспечивает его малую чувствительность к радиальным деформациям, которые могут стать причиной погрешности измерений.

Коаксиальный слой испытываемого материала имеет внутренний и внешний радиусы R_1 , R_2 и высоту H . Очевидно, что результаты сдвиговых измерений, проведенные на образцах разных размеров, будут различаться. Для учета влияния размеров и формы образца используется формфактор α , так что

$$G_0 = \alpha G,$$

где G_0 — истинный модуль сдвига материала, не зависящий от формы и размеров образца, который требуется определить; G — измеренный модуль сдвига.

На практике $\alpha \approx 1$ при использовании образца с большим отношением высоты к поперечному размеру и узкому зазору между цилиндрами, что соответствует реализации условий, близких к плоскому сдвигу.

В [2, 3] предложен метод измерений вязкоупругих свойств материала, не использующий формфактор, и который основан на решении задачи деформирования цилиндрического образца с использованием двумерных уравнений Навье:

$$\Delta \xi + \nabla(\nabla \xi)/(1 - 2\mu) = 0,$$

где ξ — вектор деформации с осевой $\zeta(z, r)$ и радиальной $\eta(z, r)$ составляющими; μ — коэффициент Пуассона.

Отличие этого решения от одномерных подходов состоит в задании трех граничных условий на всей поверхности образца.

1. Отсутствие радиальных смещений на приклеенных поверхностях

$$\eta = 0 \text{ при } r = R_1 \text{ и } R_2.$$

2. Задание осевого смещения внутреннего и внешнего цилиндров в предположении, что сила сдвига F приложена к внешней цилиндрической поверхности образца, а внутрен-

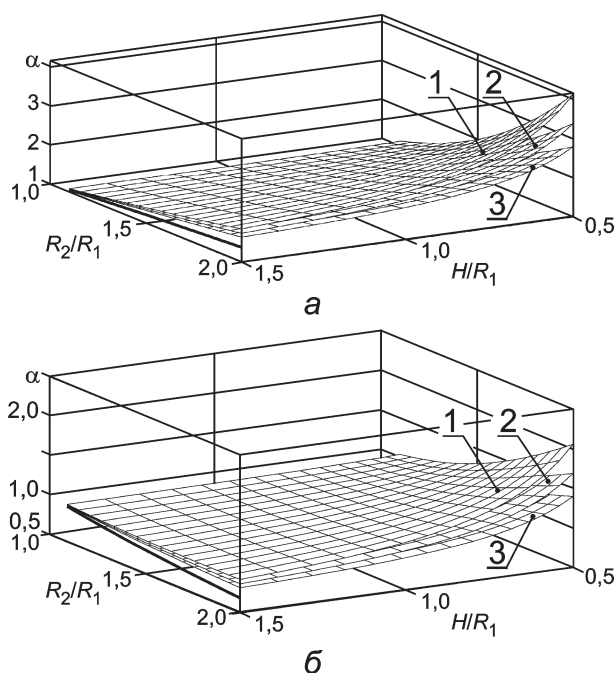


Рис. 1. Формфактор полого цилиндрического образца, определенный (а) для внешнего R_1 (3) и (б) внутреннего R_2 (4) радиусов; $\mu = 0,475; 0,3; 0,05$ соответственно для поверхностей 1—3

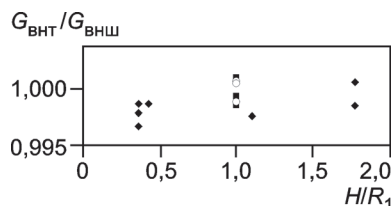


Рис. 2. Зависимость отношения сдвиговых модулей изготовленных образцов, измеренных для внутренней и внешней нагрузок с учетом рассчитанных формфакторов:

▲, ■, ○ соответствуют $R_2/R_1 = 1,36; 1,41; 1,50$

ний цилиндр закреплен на неподвижном основании: $\zeta = 0$ при $r = R_1$;

$$\zeta = F(R_2 - R_1)/2\pi R_2 H G_{\text{внш}} \text{ при } r = R_2 \text{ (по закону Гука).} \quad (1)$$

3. Отсутствие напряжений на торцевых поверхностях

$$\sigma_{rz} = 0, \sigma_{zz} = 0 \text{ при } z = \pm H/2.$$

Для решения используется условие равенства внутренних напряжений на внешнем радиусе образца и сдвигового напряжения от приложенной силы

$$F = - \int_{-H/2}^{H/2} 2\pi R_2 \sigma_{rz}(z, R_2) dz.$$

В цилиндрических координатах напряжение на торцевых поверхностях имеет следующий вид [4]:

$$\sigma_{rz} = G_0 \mu (\partial \eta / \partial z + \partial \zeta / \partial r). \quad (2)$$

Таким образом, получим связь между измеренным в эксперименте модулем сдвига $G_{\text{внш}}$ (1) и универсальным G_0 (2). Запишем окончательное уравнение для формфактора

$$\alpha_{\text{внш}} = - \frac{H \zeta}{2\mu (R_2 - R_1)} \left[\int \frac{\partial \zeta}{\partial r}(z, R_2) dz \right]^{-1}. \quad (3)$$

Процедура решения задачи деформирования цилиндрического образца подробно описана в [2, 3].

Если F приложена к внутренней (а не внешней) цилиндрической поверхности образца, то закон Гука принимает вид

$$F = 2\pi R_1 H G_{\text{внт}} / (R_2 - R_1).$$

В этом случае $G_0 = \alpha_{\text{внт}} G_{\text{внт}}$, где

$$\alpha_{\text{внт}} = - \frac{H \zeta}{2\mu (R_2 - R_1)} \left[\int \frac{\partial \zeta}{\partial r}(z, R_1) dz \right]^{-1}, \quad (4)$$

т. е. интегрирование проводится по внутренней цилиндрической поверхности образца.

Если образец имеет высоту $H > 5R_{\text{внш}}$, то получим аналитическое выражение для формфактора, подобно тому, как это сделано в [5] для цилиндрического образца. В этом случае имеется только сдвиг, завися-

щий от r , т. е. $\eta = 0$, а ζ не зависит от z . Тогда из уравнений Навье следует равенство

$$\partial \zeta / \partial r + r \partial^2 \zeta / \partial r^2 = 0,$$

из которого $\zeta = A \ln r + B$.

Предположим, что внутренний радиус цилиндра жестко прикреплен к основанию (вертикальному стержню), значит $\zeta(R_1) = 0$. Тогда $B = -A \ln R_1$, $\zeta = A \ln(r/R_1)$. По определению на внешней границе сдвиговое напряжение $\sigma_{rz} = F/S$ (S — площадь), поэтому $\sigma_{rz} = F/(2\pi R_2 H)$. С другой стороны, $\sigma_{rz} = G_0 \partial \zeta / \partial r$, таким образом

$$\left[G_0 \frac{\partial \zeta}{\partial r} \right]_{R_2} = G_0 \frac{A}{R_2} = \frac{F}{2\pi R_2 H},$$

откуда $A = F/(2\pi G_0 H)$, $\zeta = [F/(2\pi G_0 H)] \ln(r/R_1)$.

Полный сдвиг $\Delta H = \zeta(R_2) = [F/(2\pi G_0 H)] \ln(R_2/R_1)$.

Из формулы модуля сдвига

$$G = \frac{F(R_2 - R_1)}{S \Delta H} = \frac{G_0 (R_2 - R_1)}{R_2 \ln(R_2/R_1)}$$

найдем

$$\alpha_{\text{внш}} = G_0/G = [R_2/(R_2 - R_1)] \ln(R_2/R_1). \quad (5)$$

Аналогично можно получить приближенную формулу формфактора для случая, когда внешний радиус цилиндра жестко прикреплен к основанию (вертикальной цилиндрической стенке):

$$\alpha_{\text{внт}} = G_0/G = [R_1/(R_2 - R_1)] \ln(R_2/R_1).$$

На рис. 1 представлены результаты расчета формфактора по (3), (4). Формфактор α растет при уменьшении высоты образца H и увеличении зазора между цилиндрами (нарушении условий чистого сдвига), а также при увеличении μ . Отметим, что при $\mu \rightarrow 0$ формфактор $\alpha \neq 1$, как это происходит для сжатия—растяжения [5, 6].

Для проверки представленных расчетов изготовлена серия образцов, модуль сдвига которых был тщательно измерен, а формфакторы рассчитаны по (3), (4) и приведены в таблице. На рис. 2 показано, что истинный модуль сдвига не зависит от выбора используемой в расчете поверхности образца (внутренней или внешней).

Параметры образцов и их формфакторы

Материал	R_1 , мм	R_2 , мм	H , мм	G_0 , МПа	$\alpha_{\text{внш}}$	$\alpha_{\text{внт}}$
Компаунд S2 (Dow Corning)	17	24	17	0,390	1,3110	0,9301
	22	30	8		1,5470	1,1352
	40	60	40		1,3820	0,9219
Компаунд RTV-3133 (Dow Corning)	22	30	9,35	0,127	1,4769	1,0835
	22	30	24,16		1,2640	0,9271
	22	30	39,15		1,2231	0,8971
Компаунд Light component (Hilti)	22	30	19	2,300	1,2913	0,9495
	22	30	39		1,2231	0,8971

На рис. 3 изображены зависимости $\alpha(R_2/R_1)$ для различных соотношений H/R_1 , откуда следует, что $\alpha \approx 1,1$ даже при узком зазоре $R_2/R_1 = 1,1$ и средней высоте образца $H/R_1 = 1,0$, т. е. определенный по (1) модуль сдвига будет на 10 % меньше, чем его реальное значение. Линия 6, рассчитанная по (5), является асимптотическим пределом формфактора при увеличении H .

Для практического использования данного метода важно, что зависимость $\alpha(R_2/R_1)$ становится практически линейной в рассмотренном диапазоне параметров, когда высота образца H находится в пределах $1,5 < H/R_1 < 2,5$. В этом случае можно использовать простую приближенную интерполяционную формулу

$$\alpha \approx 2 - g + (g - 1) R_2/R_1,$$

где функция $g = aH/R_1 + b$ имеет коэффициенты $a = -0,114$, $b = 1,808$.

Выводы. Численно решена двумерная задача о сдвиге деформировании (в линейной постановке) полого цилиндрического образца. Определен формфактор, связывающий измеренный по закону Гука модуль сдвига образца произвольных размеров с модулем сдвига, не зависящим от формы и размеров образца. Это позволяет точнее стандартизировать методику измерений модуля сдвига материалов, исключив зависимость результатов от размеров образца. Для сдвиговой нагрузки полого цилиндрического образца можно использовать как внутреннюю, так и внешнюю поверхности, поэтому формфакторы рассчитаны для обоих случаев. Показано, что истинный модуль сдвига в рамках рассмотренного метода не зависит от выбора поверхности приложения силы. Для удобства использования формфактора

предложена его интерполяционная формула в важном для практики диапазоне размеров образца: $1,1 < R_2/R_1 < 2,0$, $1,5 < H/R_1 < 2,5$.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты № 14-01-00052 и № 13-01-00270) и Российского научного фонда (проект № 14-35-00020).

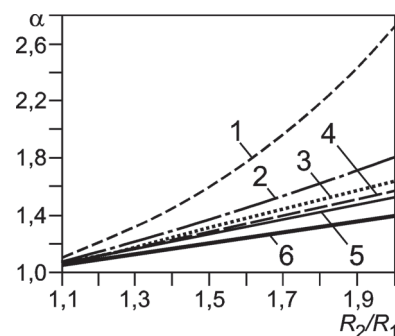


Рис. 3. Зависимость формфактора α от отношения R_2/R_1 ; кривые 1—5 соответствуют $H/R_1 = 0,5; 1,0; 1,5; 2,0; 2,5$; $\mu = 0,475$; 6 — расчет по (5)

Литература

1. **ГОСТ 28810—90.** Резина. Определение модуля сдвига. Метод сдвига четырехэлементного образца.
2. **Бойко А. В., Кулик В. М.** Об одном методе экспериментального нахождения динамических вязкоупругих свойств цилиндрического образца // Прикладная математика и механика. 2012. Т. 77. № 1. С. 138—142.
3. **Kulik V. M., Semenov B. N., Boiko A. V., Seoudi B. M., Chun H.H., Lee I.** Measurement of dynamic properties of viscoelastic materials // Experimental Mechanics. 2009. V. 49. N. 3. P. 417—425.
4. **Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.** Теория упругости. М.: Наука, 1987.
5. **Росин Г. С.** Измерение динамических свойств акустических материалов. М.: Стройиздат, 1972.
6. **Кулик В. М., Бойко А. В.** Формфактор сжатого цилиндрического образца // Измерительная техника. 2014. № 8. С. 36—38.

Дата принятия 17.12.2014 г.