

Восстановление непрерывного параметра по конечному числу его измерений

Ю. С. СЫСОВЕВ

Волгодонский инженерно-технический институт — филиал Национального исследовательского ядерного университета «МИФИ»,
Волгодонск, Россия, e-mail: sysoev2004@mail.ru

Представлена новая методика восстановления значений непрерывного параметра по конечному числу его измерений. Методика основана на построении интерполяционной функции, значения которой в узлах интерполяции совпадают с результатами измерений, а в точках, удалённых от узлов, мало отличаются от значений функции, полученной методом наименьших квадратов.

Ключевые слова: восстановление параметра, интерполяция, экстраполяция, метод наименьших квадратов, градуировка приборов, прогнозирование.

The new technique of continuous parameter value restoration according finite number of measurements of its values based on interpolation function formation is provided. Interpolation function values match results of measurements in interpolation nodes and differ a little from function values, received by the least-squares method in the points remote from nodes.

Key words: parameter restoration, interpolation, extrapolation, least-squares method, graduation of instruments, prediction.

При контроле объектов различной природы важную роль играет анализ поведения технологических параметров, основанный на восстановлении по результатам конечного числа измерений значений этих параметров в произвольной точке. Такой анализ позволяет, например, проводить градуировку измерительных приборов [1], оценивать отклонения формы профилей поверхностей деталей машин [2], находить межповерочные интервалы средств измерений [3—4], прогнозировать сейсмическую активность или нештатные ситуации на атомных электростанциях (АЭС) [5, 6] и т. д.

Способ приближённого или точного нахождения какой-либо величины по известным отдельным значениям называется интерполированием (интерполяцией) [7]. Данное понятие часто используют в узком смысле понимания термина. Его применяют для описания ситуаций, когда восстанавливаются значения функции в области её определения или употребляют в качестве противоположного понятия экстраполированию (экстраполяции), т. е. продолжению функции за пределы области определения [8]. Однако интерполирование — название более общее, чем экстраполирование. В дальнейшем будем использовать только его, а термин экстраполирование будем применять, когда необходимо подчеркнуть, что значение соответствующей переменной лежит вне минимального промежутка, содержащего узлы интерполяции, т. е. точки, в которых проводились измерения.

Для интерполяции значений параметра, как правило, строят некоторую интерполирующую (аппроксимирующую) функцию, значения которой и используют для интерполяции. Существует много методов построения таких функций: формула Тейлора, многочлены Лагранжа, многочлены Ньютона и т. д. [9—11]. Однако во всех методах задействованы либо производные, либо их оценки высоких порядков, поэтому их применение для решения практических задач вызывает определённые трудности. Один из надёжных и часто

встречающихся на практике методов интерполяции — метод наименьших квадратов (МНК), основанный на выборе класса интерполирующих функций и мониторинге параметров на некотором временном промежутке. Например, в работе [6] для прогноза сейсмической активности в качестве класса интерполирующих функций использованы многочлены третьей степени.

Для повышения точности аппроксимации с помощью МНК весовые коэффициенты (в виде некоторых постоянных величин) при равномерном и неравномерном распределении точек контроля рекомендуется выбирать по правилам, предложенным в [12]. При интерполяции с помощью МНК можно выделить два случая. Первый не вызывает затруднений и связан с ситуацией, когда известен класс функций, описывающий процесс изменения технологических параметров. Во второй, доминирующей ситуации, указанный класс функций либо неизвестен, либо его невозможно описать аналитически. Поэтому задача сводится к интерполяции параметров посредством функций из некоторого априори выбранного семейства. Именно этот случай и будет рассмотрен в настоящей работе.

Если МНК применяется для интерполяции параметров с целью прогнозирования их дрейфа или для градуировки измерительных приборов, то традиционные методы и методы, основанные на использовании рекомендаций, предложенных в [12], в этом случае недостаточно эффективны. Этот факт имеет простые объяснения. Во-первых, при поиске значений интерполирующей функции с помощью МНК ближайшие к аргументу указанной аппроксимирующей функции узлы интерполяции оказывают такое же влияние на конечный результат, как и другие узлы интерполяции, что для целого ряда задач нецелесообразно (при условии точности измерений, позволяющей пренебречь их погрешностью). Например, при прогнозировании на небольшие промежутки времени координаты последних точек во временном ряде,

полученном мониторингом значений параметров, оказывают такое же влияние на конечный результат, как и координаты первых точек, и это может привести к существенным погрешностям [13]. Во-вторых, при использовании МНК интерполирующая функция практически никогда в узлах интерполяции не совпадает с измеренными значениями, что не всегда является корректным при решении производственных задач таких, как прогнозирование дрейфа технологических параметров. Например, если температура масла в масло-системе главного циркуляционного насоса АЭС превышает 41 °С, то должна происходить блокировка реактора, что является чрезвычайным событием. Учитывая это, трудно ожидать адекватного результата прогноза, когда температура масла в системе в момент t_n последнего измерения достигла 40 °С, а экстраполирующая кривая не проходит через точку с координатами $(t_n, 40)$ или не находится в непосредственной близости от неё.

В представленной работе предлагается устранить перечисленные недостатки введением в МНК специальным образом построенных переменных весовых коэффициентов. Использование этих коэффициентов позволит:

усилить влияние узлов интерполяции, расположенных ближе к текущему значению аргумента интерполирующей функции, на конечный результат;

добиться, чтобы значения интерполирующей функции в узлах интерполяции совпадали с результатами измерений;

достичь того, чтобы в точках, удалённых от узлов интерполяции, значения построенной функции слабо отличались от значений функции, полученной МНК.

Поскольку в рамках первоначально выбранного класса интерполирующих функций выполнить данные условия, как правило, невозможно, автор вынужден расширить этот класс, добавив к нему функцию, обеспечивающую их реализацию.

Пусть $x = x_0(t)$ — неизвестная функция, определяющая значения контролируемого параметра и зависящая от переменной t (чаще всего — от времени), а $x_1, x_2, \dots, x_n$ — упорядоченная по номерам выборка значений, полученных при измерениях этого параметра в точках $t_1 < t_2 < \dots < t_n$, т. е. $x_j = x_0(t_j)$, $j = 1, 2, \dots, n$. Будем считать, что для интерполяции функции $x = x_0(t)$ выбрано семейство $\chi = \{x(t, \alpha)\}$ функций, зависящих от векторного параметра α , из некоторого множества Λ . Тогда традиционная задача поиска интерполирующей функции с помощью МНК примет вид:

$$\sum_{k=1}^n [x_0(t_k) - x(t_k, \alpha_0)]^2 = \min_{\alpha \in \Delta} \sum_{k=1}^n [x_0(t_k) - x(t_k, \alpha)]^2. \quad (1)$$

После определения решения $x(t, \alpha_0)$ из уравнения (1) для восстановления значений функции $x = x_0(t)$ в произвольной точке t , ($t \neq t_k$, $k = 1, 2, \dots, n$) полагают, что $x_0(t) = x(t, \alpha_0)$ и производят восстановление значений параметра в произвольной точке t , если $t_1 < t < t_n$, или осуществляют прогноз изменений параметра, если $t > t_n$.

Как указывалось ранее, такая интерполяция имеет ряд недостатков. Для устранения этих недостатков необходимо построить функцию $x = x^*(t)$, значения которой стремились бы к значениям $x = x(t, \alpha_0)$ решения уравнения (1) при аргументе t , удаляющемся от узлов интерполяции. При удалении аргумента t от узлов интерполяции значения функции должны быть близки к значениям, найденным МНК из (1), а в узлах интерполяции — совпадать со значениями $x_1, x_2, \dots, x_n$,

полученными с помощью измерений, т. е. с соответствующими значениями функции $x = x_0(t)$.

Для нахождения такой функции рассмотрим сначала МНК с постоянными весовыми коэффициентами:

$$\sum_{k=1}^n p_k [x_0(t_k) - x(t_k, \alpha_0)]^2 = \min_{\alpha \in \Delta} \sum_{k=1}^n p_k [x_0(t_k) - x(t_k, \alpha)]^2, \quad (2)$$

где p_k , $k = 1, 2, \dots, n$ — весовые коэффициенты (или веса),

удовлетворяющие условиям $p_k \geq 0$, $\sum_{k=1}^n p_k = 1$.

Чем весовой коэффициент p_j больше, тем большее влияние оказывает j -е слагаемое на суммы в правой части оптимизационной задачи (2), а значит, и на конечный результат. Следовательно, чем ближе значение p_j к единице, тем меньше будет отличаться значение $x(t_j, \alpha_0)$ от значения $x_j = x_0(t_j)$. Если же p_j будет стремиться к единице, то остальные p_k , $k \neq j$, будут стремиться к нулю, поскольку $p_k \geq 0$,

$\sum_{k=1}^n p_k = 1$, и решение оптимизационной задачи (2) будет пол-

ностью определяться j -м слагаемым (остальные слагаемые будут стремиться к нулю). Таким образом, при p_j , близком к единице, значения функции $x(t, \alpha_0)$, являющейся решением оптимизационной задачи (2), практически не будут отличаться от значения $x_0(t_j)$.

Приведённые эвристические соображения подсказывают, что добиться решения поставленной задачи можно, если вместо постоянных весов в МНК использовать переменные весовые коэффициенты.

Итак, при каждом фиксированном значении t для нахождения значения $x^*(t)$ зададим весовые коэффициенты $p_k(t)$ (при каждом t свои), тем самым определим некоторые функции $p = p_k(t)$, $k = 1, 2, \dots, n$, которые и будут служить весами в оптимизационной задаче, являющейся аналогом (2):

$$\sum_{k=1}^n p_k(t) [x_0(t_k) - x(t_k, \alpha)]^2 = \min_{\alpha \in \Delta} \sum_{k=1}^n p_k(t) [x_0(t_k) - x(t_k, \alpha)]^2. \quad (3)$$

При этом должны выполняться следующие условия:

$$\left. \begin{aligned} p_k(t) &\geq 0; \\ k &= 1, 2, \dots, n; \\ \sum_{k=1}^n p_k(t) &= 1 \end{aligned} \right\}. \quad (4)$$

Из рассуждений, приведённых выше, следует, что значения $p_k(t)$ при каждом $k = 1, 2, \dots, n$ должны удовлетворять следующему равенству: $\lim_{t \rightarrow t_k} p_k(t) = 1$. С учётом сказанного,

$p_k(t)$ будем строить в два этапа.

Сначала зададим функции $q = q_k(t)$ при $t \neq t_k$, положив $q_k(t) = 1/[p(t, t_k)]^\mu$, где $\mu > 0$ — некоторое число; $p(t, t_k)$ — расстояние между точками t, t_k ; $q_k(t) \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow t_k$. Затем при $t \neq t_j$,

$j = 1, 2, \dots, n$ определим $p_k(t) = q_k(t) / \sum_{i=1}^n q_i(t)$. Если $k \neq j$, то

$\lim_{t \rightarrow t_j} p_k(t) = 0$, а $\lim_{t \rightarrow t_k} p_k(t) = 1$. Поэтому положим $p_k(t_j) = \delta_{kj}$, где

$$\delta_{kj} = \begin{cases} 1, & \text{при } k = j; \\ 0, & \text{при } k \neq j \end{cases} \text{ — символ Кронекера.}$$

Функции $p = p_k(t)$, $k = 1, 2, \dots, n$, непрерывны и удовлетворяют всем условиям, представленным в (4).

Найдём при выбранном значении t решение $x = x(t, \alpha_0)$ оптимизационной задачи (3) и определим значение функции $x = x^*(t)$ в точке t , положив $x^*(t) = x(t, \alpha_0)$.

При значении t , совпадающем с одним из узлов интерполяции, например, с j -м, и левая, и правая части равенства (3) будут содержать по одному слагаемому, а оптимизационная задача (3) будет иметь следующий вид:

$$[x_0(t_j) - x(t_j, \alpha_0)]^2 = \min_{\alpha \in \Delta} [x_0(t_j) - x(t_j, \alpha)]^2. \quad (5)$$

Минимум выражения, стоящего в правой части оптимизационной задачи (5), равен нулю, т. е. решением является функция $x = x(t, \alpha_0)$, принимающая в точке $t = t_j$ значение, равное $x_j = x_0(t_j)$. Тогда $x^*(t_j) = x(t_j, \alpha_0) = x_j = x_0(t_j)$, т. е. в узлах интерполяции построенная функция $x = x^*(t)$ принимает значения, совпадающие с соответствующими результатами измерений.

Для анализа поведения функции $x = x^*(t)$ при значениях t , удаляющихся от узлов интерполяции, рассмотрим отношения различных весовых коэффициентов $p_j(t)$, $p_k(t)$ в уравнении (3). Найдём предел:

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \frac{p_j(t)}{p_k(t)} = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \frac{1/[p(t, t_j)]^\mu}{1/[p(t, t_k)]^\mu} = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \frac{[p(t, t_k)]^\mu}{[p(t, t_j)]^\mu}.$$

Поскольку в рассматриваемом случае при любом значении t выполняется равенство $\rho(t, t_k) = \rho(t, t_j) + d_{kj}$, где d_{kj} — некоторая отрицательная или положительная константа, определяемая расстоянием $\rho(t, t_k)$, а $\rho(t, t_j) \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow \infty$, то

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \frac{p_j(t)}{p_k(t)} = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \left[1 + d_{kj}/\rho(t, t_j) \right]^\mu = 1. \quad (6)$$

Из равенства (6) следует, что при значениях t , удаляющихся от узлов интерполяции, весовые коэффициенты в задаче (3) становятся малоразличимыми и, следовательно, значения интерполирующей функции $x = x^*(t)$ при таких t будут практически не отличаться от значений интерполирующей функции, являющейся решением оптимизационной задачи (1).

Таким образом, построена интерполяционная функция $x = x^*(t)$, значения которой в узлах интерполяции совпадают со значениями параметра, полученными при измерениях, причём:

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} |x^*(t) - x(t, \alpha_0)| = 0,$$

где $x(t, \alpha_0)$ — решение уравнения (1).

Учитывая сказанное, для восстановления значений параметра осталось положить, что $x_0(t) = x^*(t)$.

Построенная функция $x = x^*(t)$ может не принадлежать выбранному ранее классу $\chi = \{x(t, \alpha)\}$ интерполирующих функций, и, в общем случае, её нельзя представить некото-

рыми аналитическими выражениями (за исключением, когда $[x = x^*(t)] \in \chi$). Однако это не мешает эффективно использовать эту функцию для восстановления контролируемого параметра, поскольку её значения легко вычисляются при каждом значении аргумента t .

Алгоритм восстановления значений параметра в точке t состоит из следующих шагов.

1. Вычисление весовых коэффициентов $p_k(t)$ в точке t .

2. Запись оптимизационной задачи (3) с найденными весами $p_k(t)$.

3. Нахождение решения $x(t, \alpha_0)$ полученной оптимизационной задачи. По результатам вычислений полагаем, что $x_0(t) = x^*(t) = x(t, \alpha_0)$.

Заметим, что вместо $[p(t, t_k)]^\mu$ в определении $q_k(t)$ можно использовать и другие непрерывные функции. Эти функции должны строго монотонно убывать при $t < t_k$, возрастать при $t > t_k$, стремиться к бесконечности при $t \rightarrow \pm\infty$ и к нулю при $t \rightarrow t_k$. Например, если необходимо дополнительное регулирование влияния значений временного ряда, полученного мониторингом контролируемого параметра, то в зависимости от положения этих значений в указанном ряде целесообразно применять значения $q_j(t)$, определённые из равенств:

при $t < t_1$

$$q_j(t) = 1/[p(t, t_1)]^\mu + Q(1 + \gamma)^{j-1} \rho(t_1, t_j)^\mu, \quad j = 1, 2, \dots, n;$$

при $t_{k-1} < t < t_k$

$$q_j(t) = \begin{cases} 1/[p(t, t_{k-1})]^\mu + Q(1 + \gamma)^{k-j-1} \rho(t_j, t_{k-1})^\mu, & \text{если } 1 \leq j \leq k-1; \\ 1/[p(t, t_k)]^\mu + Q(1 + \gamma)^{j-k} \rho(t_k, t_j)^\mu, & \text{если } k \leq j \leq n; \end{cases}$$

при $t > t_n$

$$q_j(t) = 1/[p(t, t_n)]^\mu + Q(1 + \gamma)^{n-j} \rho(t_n, t_j)^\mu, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Здесь Q, γ, μ — некоторые константы, причём $Q > 0, \gamma \geq 0, \mu > 0$. Остальные процедуры определения весовых коэффициентов $p_j(t)$, $j = 1, 2, \dots, n$ и их анализ полностью повторяют рассуждения предыдущего случая.

При практическом использовании описанной методики приходится решать вопросы о выборе чисел Q, γ, μ , а также о методах решения оптимизационной задачи (3).

Выбор указанных чисел осуществляют в зависимости от типа решаемой практической задачи путём их подбора на основе имеющихся экспериментальных или натурных данных. Отметим, что увеличение каждого из этих чисел ведёт к ослабеванию влияния на конечный результат более удалённых узлов интерполяции от текущего значения t по сравнению с менее удалёнными. Причём скорость изменения процесса ослабления является неоднородной функцией аргументов Q, γ, μ , в том смысле, что одинаковые относительные или абсолютные изменения этих аргументов ведут к различным изменениям указанной скорости.

Решение задачи (3) производится обычными методами оптимизации [14] или некоторыми их модификациями (например, [15]). В случае, когда $\chi = \{x(t, \alpha)\}$ является семей-

ством многочленов (координаты вектора α являются коэффициентами многочлена), решение задачи оптимизации (3) классическим методом [9] сводится к решению обычной системы линейных уравнений. Например, если χ — семейство квадратных трёхчленов, то задача (3) будет иметь вид

$$\sum_{k=1}^n p_k(t) \left[x_k - (a_0 t_k^2 + b_0 t_k + c_0) \right]^2 =$$

$$= \min_{a,b,c} \sum_{k=1}^n p_k(t) \left[x_k - (a t_k^2 + b t_k + c) \right]^2.$$

После приравнивания к нулю частных производных целевой функции по переменным a , b , c , получим систему трёх уравнений с тремя неизвестными:

$$\left\{ \begin{aligned} \left(\sum_{k=1}^n p_k(t) t_k^4 \right) a + \left(\sum_{k=1}^n p_k(t) t_k^3 \right) b + \left(\sum_{k=1}^n p_k(t) t_k^2 \right) c &= \sum_{k=1}^n p_k(t) x_k t_k^2; \\ \left(\sum_{k=1}^n p_k(t) t_k^3 \right) a + \left(\sum_{k=1}^n p_k(t) t_k^2 \right) b + \left(\sum_{k=1}^n p_k(t) t_k \right) c &= \sum_{k=1}^n p_k(t) x_k t_k; \\ \left(\sum_{k=1}^n p_k(t) t_k^2 \right) a + \left(\sum_{k=1}^n p_k(t) t_k \right) b + \left(\sum_{k=1}^n p_k(t) \right) c &= \sum_{k=1}^n p_k(t) x_k. \end{aligned} \right. \quad (7)$$

Решив систему (7) относительно неизвестных a , b , c , найдём неизвестные коэффициенты a_0 , b_0 , c_0 , определяющие оптимальное решение: $x(t, \alpha_0) = a_0 t^2 + b_0 t + c_0$. Аналогичные системы будут получаться, если в качестве χ использовать многочлены любых других степеней.

Отметим, что частный случай разработанной методики, связанный с прогнозированием, был опробован на Ростовской атомной электростанции для прогнозирования нештатных ситуаций, возникающих из-за перегрева масла в масло-системе главного циркуляционного насоса. Были получены результаты, в полной мере удовлетворившие требования специалистов АЭС [5], работающих в соответствующей области.

Заключение. Представлена методика восстановления значений непрерывного параметра по конечному числу его измерений. Разработанная методика основана на построении интерполяционной функции, значения которой в узлах интерполяции совпадают с соответствующими результатами измерений, а при увеличении расстояния от аргумента этой функции до множества указанных узлов её значения неограниченно приближаются к значениям функции, полученной с помощью МНК.

Л и т е р а т у р а

1. **ГОСТ 8.624—2006.** ГСИ. Термометры сопротивления из платины, меди и никеля. Методика поверки.
2. **Сысоев Ю. С.** Координатные методы определения параметров средней окружности при анализе профиля реальной поверхности // Измерительная техника. 1995. № 10. С. 22—25.
3. **Сысоев Ю. С., Симакова Н. А.** Оценка длительности межповерочных интервалов измерительных устройств методами теории массового обслуживания // Измерительная техника. 2014. № 12. С. 10—15.
4. **Сысоев Ю. С.** Использование геометрического и показательного распределений для прогнозирования дрейфа параметров технических объектов // Измерительная техника. 2015. № 12. С. 17—19.
5. **Сысоев Ю. С., Бекетов В. Г., Симакова Н. А.** Алгоритм прогнозирования дрейфа температур маслосистемы ГЦН блока АЭС с реактором ВВЭР-1000 // Глобальная ядерная безопасность. 2016. № 3(20). С. 57—63.
6. **Новосёлов О. Н., Гуфельд И. Л.** Прогнозирование состояния динамической системы по результатам измерений // Измерительная техника. 2015. № 10. С. 11—15.
7. **Иванов В. В.** Методы вычислений на ЭВМ. Справочное пособие. Киев: Наукова думка, 1986.
8. **Математическая энциклопедия.** Т. 5 / Под ред. И. М. Виноградова. М.: Советская энциклопедия, 1985.
9. **Пискунов Н. С.** Дифференциальное и интегральное исчисления. Т. 1. М.: Наука, 1978.
10. **Форсайт Дж., Малькольм М., Моулер К.** Машинные методы математических вычислений. М.: Мир, 1980.
11. **Березин И. С., Жидков Н. П.** Методы вычислений. Т. 1. М.: ФИЗМАТЛИТ, 1962.
12. **Сысоев Ю. С.** Алгоритмы выбора весовых характеристик при аппроксимации функций по методу наименьших квадратов // Измерительная техника. 1996. № 8. С. 5—10.
13. **Бокс Дж., Дженкинс Г.** Анализ временных рядов. Прогноз и управление. М.: Мир, 1974.
14. **Гилл Ф., Мюррей У., Райт М.** Практическая оптимизация. М.: Мир, 1985.
15. **Сысоев Ю. С.** Комбинированный алгоритм оптимизации и его применение к решению метрологических задач // Измерительная техника. 2015. № 4. С. 9—12.

Дата принятия: 06.12.2016.