

7. Smith C., Schneider R., Wang D. Spin-Dependent Tunneling: A New Magnetic Sensing Technology. [Электронный ресурс] <http://archives.sensormag.com/articles/0304/28>. (Дата обращения 30.04.2015 г.).

8. Никитин С. А. Гигантское магнитосопротивление // Соросовский образовательный журнал. 2004. Т. 8. № 2. С. 92—98.

9. Гужин С. Г., Жулев В. И., Никитин С. В. Датчики на основе новых магниторезистивных эффектов // Датчики и системы. 2008. № 9. С. 54—59.

10. Лукашевич М. Г. Введение в магнитоэлектронику. Минск: БГУ, 2003.

11. Ripka P., Tipek A. Modern Sensors. London: ISTE Ltd, 2007.

12. Воробьев А. В. Синтез и верификация математической модели анизотропного магниторезистивного мостового сенсора // Датчики и системы. 2012. № 5. С. 40—45.

13. Воробьев А. В. Математическая модель анизотропного магниторезистивного датчика для инженерных расчетов // Вестник УГАТУ. 2012. Т. 16. № 1(46). С. 161—166.

Дата принятия 01.07.2015 г.

РАДИОТЕХНИЧЕСКИЕ ИЗМЕРЕНИЯ

681.518.2.519.216

Исследование оперативного метода измерения частоты и амплитуды сигналов с медленно меняющимися параметрами

А. В. НИКИТИН, А. О. НИКИТИН, А. А. ОРЛОВ

Волгоградский государственный университет, Волгоград, Россия, e-mail: orlwork@inbox.ru

Исследован нелинейный параметрический метод оценивания мгновенной частоты и амплитуды квазигармонического сигнала. Получены аналитические выражения дисперсии оценок и их смещения, подтвержденные численным моделированием. Экспериментальная проверка работы метода на реальном сигнале показала возможность определения его частоты с относительной погрешностью не более 10^{-5} на временном интервале около 30 периодов исследуемого сигнала.

Ключевые слова: квазигармонический сигнал, мгновенная частота, аналого-цифровой преобразователь.

A study on the nonlinear parametric method of estimating the instantaneous frequency and amplitude of a quasi-harmonic signal is presented. Analytical expressions for dispersion and bias of estimates confirmed by numerical simulation are obtained. Method performance tests with real signals showed the possibility to determine frequency with a relative error not exceeding 10^{-5} .

Key words: quasiharmonic signal, estimate, instantaneous frequency, analog-to-digital converter.

В ряде радиофизических и радиотехнических задач измерение параметров нестационарных систем сводится к анализу квазигармонических колебаний вида

$$x(t) = u(t) \cos \theta(t), \quad (1)$$

т. е. к определению законов изменения амплитуды и мгновенной частоты, которая является производной полной фазы

$\omega(t) = \dot{\theta}(t)$ [1]. Большинство существующих цифровых методов не позволяет с достаточной точностью получить оценку мгновенной частоты на коротком (порядка двух периодов сигнала) интервале наблюдения либо требуют существенных вычислительных затрат. К ним относятся методы, основанные на минимизации некоторого функционала, отвечающего за погрешность оценивания параметров колебаний, или на максимизации функции правдоподобия. Методы, в которых используется фильтрация исследуемого сигнала и формирование среднеинтегральной оценки результата, не позволяют получить подробные законы изменения $\omega(t)$ и $u(t)$ в режиме реального времени.

В [2] описан параметрический метод измерения мгновенной частоты зашумленного гармонического сигнала, ос-

нованный на использовании узкополосных режекторных цифровых фильтров. В [3] тот же метод получен на базе модели Прони второго порядка без затухания, а также приведены рекуррентные соотношения, позволяющие осуществить его минимальным количеством вычислительных операций. В [2, 3] предполагается постоянство частоты и амплитуды в рамках скользящего интервала наблюдения, а статистические характеристики метода исследованы только для простейших вариантов его реализации. Кроме того, метод позволяет измерять только мгновенную частоту, что требует точного и оперативного алгоритма измерения амплитуды. В [4] предложен метод оценки амплитуды, позволяющий рассчитывать её в рамках скользящего окна произвольной длины с использованием небольшого фиксированного количества операций вне зависимости от размера окна.

Цель данной работы — совместное применение указанных оперативных методов оценивания частоты и амплитуды на коротком интервале наблюдения, а также анализ их точности и устойчивости в зависимости от длительности этого интервала и частоты. При увеличении длины скользящего окна уменьшаются дисперсии оценок частоты и амплитуды,

но увеличивается систематическая погрешность, связанная с их изменением в рамках интервала наблюдения. Полученные аналитические оценки позволяют найти разумный компромисс между точностью и устойчивостью исследуемых методов.

Для однозначного описания сигнала (1) с помощью двух функций $\theta(t)$ и $u(t)$ необходимо какое-либо дополнительное условие, например, физически обоснованное предположение о непрерывности, положительности и ограниченности амплитуды и мгновенной частоты и всех их производных:

$$0 < \omega_m \leq \omega(t) \leq \omega_M, \quad \left| d^n \omega(t) / dt^n \right| \leq \omega(t) \omega_B^n, \quad \omega_B < \omega_M; \quad (2)$$

$$0 < u_m \leq u(t) \leq u_M, \quad \left| d^n u(t) / dt^n \right| \leq u(t) \omega_u^n, \quad \omega_u < \omega_M. \quad (3)$$

Здесь ω_B , ω_M — максимальные частоты спектров полной фазы и амплитуды сигнала.

В [5] показано, что при выполнении условий (2) функцию $\theta(t)$ можно выразить сходящимся на всей числовой оси рядом Тейлора, она имеет финитный спектр, носитель которого принадлежит отрезку $[-\omega_B, \omega_B]$, а квазигармоническое представление (1) является единственным.

Введём величину $\mu = \max(\omega_B/\omega_M, \omega_u/\omega_M)$. При $\mu \ll 1$ квазигармонический сигнал (1), удовлетворяющий условиям (2), (3), естественно считать сигналом с медленно меняющимися амплитудой и мгновенной частотой.

Используем три значения смеси сигнала (1) с белым нормальным шумом $\xi(t)$, нулевым средним и дисперсией σ^2 в точках $(t - kT)$, $k = 0, 1, 2$, предположив, что интервал T и параметр μ удовлетворяют условиям

$$T < \pi/\omega_M, \quad \mu \ll 1. \quad (4)$$

Разложим $\omega(t)$ и $u(t)$ в ряд Тейлора вблизи точки $(t - T)$:

$$x(t) = (u + \dot{u}T + \delta u_0) \cos(\theta + \omega T + \dot{\omega}T^2/2 + \delta\theta_0) + \xi(t);$$

$$x(t - T) = u \cos \theta + \xi(t - T); \quad (5)$$

$$x(t - 2T) = (u - \dot{u}T + \delta u_2) \cos(\theta - \omega T + \dot{\omega}T^2/2 + \delta\theta_2) + \xi(t - 2T).$$

Здесь $u = u(t - T)$, $\theta = \theta(t - T)$, $\omega = \omega(t - T)$, $\dot{u} = \dot{u}(t - T)$, $\dot{\omega} = \dot{\omega}(t - T)$. При выполнении условий (2)–(4) для остаточных членов ряда будут справедливы оценки

$$|\delta\theta_i| = \frac{|\ddot{\omega}(t_{\omega i})| T^3}{6} \leq \frac{\omega_M \omega_B^2 T^3}{6} \leq \mu^2 \frac{\omega_M^3 T^3}{6} < \mu^2 \frac{\pi^3}{6} \ll 1;$$

$$|\delta u_i| = \frac{|\ddot{u}(t_{ui})| T^2}{2} \leq \frac{u \omega_u^2 T^2}{2} \leq \mu^2 \frac{u \omega_M^2 T^2}{2} < \mu^2 \frac{u \pi^2}{2} \ll u, \quad (6)$$

где моменты времени $t_{\omega 0}, t_{u0}$ принадлежат интервалу $[t - T, t]$, а моменты $t_{\omega 2}, t_{u2}$ — интервалу $[t - 2T, t - T]$. Соотношения (6) позволяют не учитывать $\delta\theta_i$ и δu_i в (5).

Поскольку $|\dot{\omega}T^2| < \mu\pi^2 \ll 1$ и $|\dot{u}T/u| \leq \mu\pi \ll 1$, что также следует из (2)–(4), запишем

$$x(t) + x(t - 2T) \approx 2u \cos \omega T \cos \theta - u \dot{\omega} T^2 \cos \omega T \sin \theta - 2\dot{u}T \sin \omega T \sin \theta + \xi(t) + \xi(t - 2T).$$

Предположим, что $x(t) \neq 0$ в некоторой окрестности точки $(t - T)$ и

$$|[x(t) + x(t - 2T)] / [2x(t - T)]| \leq 1.$$

Рассмотрим величину

$$\hat{\omega} = \frac{1}{T} \arccos \left(\frac{x(t) + x(t - 2T)}{2x(t - T)} \right), \quad (7)$$

которая при малом уровне шума $\sigma^2 \ll u^2$ в первом порядке малости по σ/u , $\dot{\omega}T^2$ и $\dot{u}T/u$ даёт $\hat{\omega} \approx \omega + \delta_\omega$, где

$$\delta_\omega = \left(\frac{\dot{\omega}T}{2} \operatorname{ctg} \omega T + \frac{\dot{u}}{u} \right) \operatorname{tg} \theta - \frac{\xi(t) + \xi(t - 2T) - 2\xi(t - T) \cos \omega T}{2uT \sin \omega T \cos \theta}. \quad (8)$$

Таким образом, величина $\hat{\omega}$ — оценка частоты сигнала (1) на интервале $[t - 2T, t]$, а δ_ω — её отклонение от истинного значения, порождённое как медленными изменениями частоты и огибающей, так и аддитивным шумом. Усреднив это отклонение и его квадрат, найдём систематическую и случайную погрешности оценки частоты (7):

$$\langle \delta_\omega \rangle = \left[\frac{\dot{\omega}T}{2} \operatorname{ctg} \omega T + \frac{\dot{u}}{u} \right] \operatorname{tg} \theta; \quad \sigma_\omega^2 = \frac{1 + 2 \cos^2 \omega T}{2u^2 T^2 \sin^2 \omega T \cos^2 \theta} \sigma^2. \quad (9)$$

Полученная оценка дисперсии отклонения частоты полностью соответствует приведённой в [3]. Формула для оценки частоты (7) ещё раз подтверждает необходимость выполнения условия (4) и накладывает ограничение на величину θ , которая не должна принадлежать некоторой окрестности точек $\pi/2 + \pi k$, где k — целое число.

Рассмотрим ещё одну комбинацию из значений сигнала $x^2(t - T) - x(t)x(t - 2T)$ и подставим в неё разложения (5), также ограничившись первым порядком малости:

$$x^2(t - T) - x(t)x(t - 2T) \approx u^2 \sin^2 \omega T + \delta_0;$$

$$\delta_0 = u^2 \dot{\omega} T^2 \sin \theta \cos \theta + 2u\xi(t - T) \cos \theta - u\xi(t) \cos(\theta - \omega T) - u\xi(t - 2T) \cos(\theta + \omega T). \quad (10)$$

Используя (7), (8), (10), построим величину

$$\hat{u} = \sqrt{x^2(t - T) - x(t)x(t - 2T) / \sin \hat{\omega} T}, \quad (11)$$

разложение которой при малости δ_0 и $\delta_\omega T$ даёт

$$\hat{u} \approx \frac{\sqrt{u^2 \sin^2 \omega T + \delta_0}}{\sin(\omega T + \delta_\omega T)} \approx u + \delta_u; \quad \delta_u = \frac{\delta_0}{2u \sin^2 \omega T} - uT \delta_\omega \operatorname{ctg} \omega T. \quad (12)$$

Таким образом, $\hat{u}$ является оценкой амплитуды сигнала (1) с отклонением δ_u . Подставив δ_ω , δ_0 из (8), (10) в (12) и усреднив отклонение амплитуды и его квадрат, получим систематическую и случайную погрешности оценки амплитуды (11):

$$\langle \delta_u \rangle = \frac{u [\cos^2 \theta - \cos^2 \omega T] \operatorname{tg} \theta}{2 \sin^2 \omega T} \dot{\omega} T^2 - \dot{u} T \operatorname{ctg} \omega T \operatorname{tg} \theta; \quad (13)$$

$$\sigma_u^2 = \frac{4 \sin^2(\theta + \omega T) \sin^2(\theta - \omega T) + \sin^2 \theta [\sin^2(\theta + \omega T) + \sin^2(\theta - \omega T)]}{4 \sin^4 \omega T \cos^2 \theta} \sigma^2. \quad (14)$$

Выражение (14) полностью совпадает с приведённым в [3].

Полученные оценки (9), (13), (14) неограниченно растут при $\omega \rightarrow 0$ и $\omega \rightarrow \pi/T$, а также обладают сингулярностью в точках $\theta = \pi/2 + \pi k$. Для получения более точных и устойчивых оценок необходимо использовать большее количество значений сигнала, т. е. увеличить интервал наблюдения.

Проведем дискретизацию сигнала $x(t)$ с шагом Δ , при этом $T = Q\Delta$ (коэффициент прореживания Q — целое число). Обозначив $x[n] = x(n\Delta)$, рассмотрим скользящее окно $[n - L + 1, n]$ длительностью $L = 2Q + M$ (здесь $M > 1$ — количество усреднений в рамках окна) и найдём аргумент арккосинуса в (7) путём минимизации функционала погрешности J варьированием $\cos(\hat{\omega}Q\Delta)$ в пределах временного окна:

$$J = \sum_{k=n-M+1}^n (2x[k-Q] \cos(\hat{\omega}Q\Delta) - x[k] - x[k-2Q])^2.$$

Оценки частоты и амплитуды, соответствующие моменту $(n - (L - 1)/2)\Delta$, в этом случае примут вид

$$\hat{\omega} = \frac{1}{Q\Delta} \arccos \left(\frac{\frac{1}{2} \sum_{k=n-M+1}^n (x[k-2Q] + x[k])x[k-Q]}{\sum_{k=n-M+1}^n x^2[k-Q]} \right); \quad (15)$$

$$\hat{u} = \sqrt{\sum_{k=n-M+1}^n (x^2[k-Q] - x[k]x[k-2Q])} / [\sqrt{M} \sin(\hat{\omega}Q\Delta)]. \quad (16)$$

Выражение (15) при $Q = 1$ было получено в [2] из других предположений. В силу условия (4) оценки (15), (16) будут определяться в диапазоне $[0, \pi/(Q\Delta)]$. Заметим, что использование хотя бы одного дополнительного отсчёта сигнала снимает в (7) проблему с неопределённостью при $\theta = \pi/2 + \pi k$.

Поиск случайной и систематической погрешностей оценок частоты (15) и амплитуды (16) проведём отдельно. Сначала рассмотрим смесь сигнала постоянной частоты и амплитуды с белым нормальным шумом, нулевым средним и дисперсией $\sigma^2 \ll u^2$, отсчёты которого обозначим $\xi[n] = \xi(n\Delta)$:

$$x[k] = u \cos(\omega k\Delta + \varphi) + \xi[k], \quad k = n - L + 1, \dots, n.$$

Для удобства вычислений введём индекс $m = k - (n - M + 1)$, что изменит начальную фазу:

$$x[m] = u \cos(\omega m\Delta + \psi) + \xi[m], \quad m = 0, \dots, L-1.$$

$$\psi = \varphi - \omega(n - M + 1)\Delta. \quad (17)$$

В этих обозначениях оценки (15), (16) примут вид

$$\hat{\omega} = \frac{1}{Q\Delta} \arccos \left(\frac{\frac{1}{2} \sum_{m=0}^{M-1} (x[m] + x[m+2Q])x[m+Q]}{\sum_{m=0}^{M-1} x^2[m+Q]} \right), \quad (18)$$

$$\hat{u} = \sqrt{\sum_{m=0}^{M-1} (x^2[m+Q] - x[m]x[m+2Q])} / [\sqrt{M} \sin(\hat{\omega}Q\Delta)]. \quad (19)$$

Подставив (17) в суммы, входящие в (18), (19), без учёта членов второго порядка малости получим

$$\sum_{m=0}^{M-1} (x[m] + x[m+2Q])x[m+Q] \approx 2u^2 \cos(\omega Q\Delta) D_{M,Q} + \delta_1;$$

$$\sum_{m=0}^{M-1} x^2[m+Q] \approx u^2 D_{M,Q} + \delta_2;$$

$$\sum_{m=0}^{M-1} (x^2[m+Q] - x[m]x[m+2Q]) \approx Mu^2 \sin^2(\omega Q\Delta) + \delta_3.$$

Здесь

$$D_{M,Q} = \sum_{m=0}^{M-1} \cos^2[\omega(m+Q)\Delta + \psi] = \frac{M}{2} + \frac{\sin(\omega M\Delta)}{2 \sin(\omega\Delta)} \cos[\omega(2Q+M-1)\Delta + 2\psi]; \quad (20)$$

$$\delta_1 = u \sum_{m=0}^{M-1} \cos[\omega(m+Q)\Delta + \psi] \times \{ (2 \cos(\omega Q\Delta) \xi[m+Q] + \xi[m] + \xi[m+2Q]) \};$$

$$\delta_2 = 2u \sum_{m=0}^{M-1} \cos[\omega(m+Q)\Delta + \psi] \xi[m+Q];$$

$$\delta_3 = 2u \sum_{m=0}^{M-1} \cos[\omega(m+Q)\Delta + \psi] \xi[m+Q] -$$

$$- u \sum_{m=0}^{M-1} \cos(\omega m\Delta + \psi) \xi[m+2Q] - u \sum_{m=0}^{M-1} \cos[\omega(m+2Q)\Delta + \psi] \xi[m].$$

Используя полученные соотношения в (18), (19), в первом порядке малости по δ_1 , δ_2 и δ_3 находим

$$\hat{\omega} \approx \omega + \delta_\omega; \quad \hat{u} \approx u + \delta_u;$$

$$\delta_\omega = \frac{1}{2Qu\Delta \sin(\omega Q\Delta) D_{M,Q}} \times$$

$$\times \left\{ \sum_{m=0}^{M-1} (\xi[m] + \xi[m+2Q]) \cos[\omega(m+Q)\Delta + \psi] - \right.$$

$$\left. - 2 \cos(\omega Q\Delta) \sum_{m=0}^{M-1} \xi[m+Q] \cos[\omega(m+Q)\Delta + \psi] \right\};$$

$$\delta_u = - \frac{uQ\Delta \cos(\omega Q\Delta)}{\sin(\omega Q\Delta)} \delta_\omega + \frac{\sum_{m=0}^{M-1} \cos[\omega(m+Q)\Delta + \psi] \xi[m+Q]}{M \sin^2(\omega Q\Delta)} -$$

$$- \frac{\sum_{m=0}^{M-1} \{ \cos(\omega m\Delta + \psi) \xi[m+2Q] + \cos[\omega(m+2Q)\Delta + \psi] \xi[m] \}}{2M \sin^2(\omega Q\Delta)}.$$

Усреднение отклонений δ_ω и δ_u даёт ноль, т. е. оценки не смещены. Усреднив δ_ω^2 , можно найти дисперсию погрешности оценивания частоты:

$$\sigma_\omega^2 = \begin{cases} G_0 G_1, & 1 \leq M \leq Q; \\ G_0(G_1 + G_2), & Q < M \leq 2Q; \\ G_0(G_1 + G_2 + G_3), & 2Q < M, \end{cases} \quad (21)$$

где $G_0 = \sigma^2 / [2Q^2 u^2 \Delta^2 D_{M,Q}^2 \sin^2(\omega Q \Delta)]$;

$$G_1 = D_{M,Q} (1 + 2 \cos^2(\omega Q \Delta));$$

$$G_2 = 2 \{ (M - Q) (1 - \cos(\omega_0 Q \Delta)) - 2 D_{M-Q, 3Q/2} \} \cos(\omega Q \Delta);$$

$$G_3 = 2 D_{M-2Q, 2Q} - (M - 2Q) (1 - \cos^2(\omega Q \Delta)).$$

При $M \gg Q$ в середине диапазона $[0, \pi/(Q\Delta)]$ ряд (20) примет вид $D_{M,Q} \approx M/2$, поэтому справедливо более простое приближение:

$$\sigma_\omega^2 \approx 2\sigma^2 / [Q u^2 M^2 \Delta^2 \sin^2(\omega Q \Delta)]. \quad (22)$$

Аналогично вычисляется дисперсия погрешности оценивания амплитуды:

$$\sigma_u^2 = \begin{cases} R_0 R_1, & 1 \leq M \leq Q; \\ R_0(R_1 + R_2), & Q < M \leq 2Q; \\ R_0(R_1 + R_2 + R_3), & 2Q < M, \end{cases} \quad (23)$$

где $R_0 = \sigma^2 / [2M^2 D_{M,Q}^2 \sin^4(\omega Q \Delta)]$;

$$R_1 = D_{M,Q} (1 + 2 \cos^2(\omega Q \Delta)) (D_{M,Q}^2 + M^2 \cos^2(\omega Q \Delta)) + MD_{M,Q}^2 (1 - 7 \cos^2(\omega Q \Delta));$$

$$R_2 = 2 (D_{M,Q} - M \cos^2(\omega Q \Delta)) \{ 2 D_{M,Q} (M - Q) \sin^2(\omega Q \Delta) + M \cos(\omega Q \Delta) [(M - Q) (\cos(\omega Q \Delta) - 1) + 2 D_{M-Q, 3Q/2}] - D_{M,Q} (D_{M-Q, Q} + D_{M-Q, 2Q}) \};$$

$$R_3 = (M^2 \cos^2(\omega Q \Delta) + D_{M,Q}^2) D_{M-2Q, 2Q} - (M - 2Q) \times (M^2/4 + D_{M,Q}^2) \sin^2(2\omega Q \Delta) + MD_{M,Q} [(M - 2Q) (1 - \cos(3\omega Q \Delta)) - D_{M-2Q, 3Q/2} - D_{M-2Q, 5Q/2}].$$

Здесь, как и ранее, ряд $D_{M,Q}$ определяется выражением (20). При $M \gg Q$ в середине диапазона $[0, \pi/(Q\Delta)]$ справедливо приближение

$$\sigma_u^2 \approx \frac{2\sigma^2}{M^2 \sin^4(\omega Q \Delta)} \times$$

$$\times \left[M - \frac{3Q}{4} - (2M - Q) \cos^2(\omega Q \Delta) + M \cos^4(\omega Q \Delta) \right]. \quad (24)$$

Численное моделирование полностью подтверждает справедливость соотношений (21)–(24). Полученные результаты позволяют утверждать, что оптимально такое значение коэффициента прореживания Q , при котором частота ω попадает примерно в середину диапазона $[0, \pi/(Q\Delta)]$. В случае, когда частота меняется медленно и необходимо постоянно обновлять её значения, можно регулярно приближать Q к оптимальному значению.

Зависимости (21), (23) имеет смысл сравнить с пределом Рао—Крамера [6]. Чтобы получить неравенства Рао—Крамера, для дисперсии оценки каждого из параметров модели (17) требуется рассчитать элементы информационной матрицы Фишера $\mathbf{I}$:

$$I_{pq} = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{k=0}^{L-1} \sum_{i=0}^{L-1} \frac{\partial(x[k])}{\partial p} \frac{\partial(x[i])}{\partial q}.$$

В качестве p и q используются u , ω или ψ . Неравенство Рао—Крамера для оцениваемого параметра p имеет вид

$$\sigma_p^2 \geq B_{pp}.$$

Здесь $\mathbf{B} = \mathbf{I}^{-1}$ — матрица, обратная информационной матрице Фишера, с элементами

$$B_{uu} = (I_{\omega\omega} I_{\psi\psi} - I_{\omega\psi}^2) / |\mathbf{I}|, \quad B_{\omega\omega} = (I_{uu} I_{\psi\psi} - I_{u\psi}^2) / |\mathbf{I}|,$$

$$B_{\psi\psi} = (I_{\omega\omega} I_{uu} - I_{u\omega}^2) / |\mathbf{I}|,$$

где $|\mathbf{I}| = I_{uu} I_{\omega\omega} I_{\psi\psi} + 2 I_{u\omega} I_{\omega\psi} I_{u\psi} - I_{\omega\omega} I_{u\psi}^2 - I_{uu} I_{\omega\psi}^2 - I_{\psi\psi} I_{u\omega}^2$ — определитель матрицы Фишера [6]. Элементы информационной матрицы для модели (17) выражаются как

$$I_{uu} = \frac{1}{2\sigma^2} \left[L + \cos(\omega(L-1)\Delta + 2\psi) \frac{\sin(\omega L \Delta)}{\sin \omega \Delta} \right];$$

$$I_{\psi\psi} = \frac{u^2}{2\sigma^2} \left[L - \cos(\omega(L-1)\Delta + 2\psi) \frac{\sin(\omega L \Delta)}{\sin \omega \Delta} \right];$$

$$I_{\omega\omega} = \frac{\Delta^2 u^2}{4\sigma^2} \left[\frac{L(L-1)(2L-1)}{3} + L \cos(2\omega L \Delta + 2\psi) \left\{ L - \frac{1}{\sin^2 \omega \Delta} \right\} + \operatorname{ctg} \omega \Delta \sin(2\omega L \Delta + 2\psi) \left(2L^2 - \frac{1}{\sin^2 \omega \Delta} \right) + \operatorname{ctg} \omega \Delta \sin 2\psi \right];$$

$$I_{u\omega} = \frac{u\Delta}{4\sigma^2} \left[L \frac{\cos(\omega(2L-1)\Delta + 2\psi)}{\sin \omega \Delta} - \frac{\sin(\omega L \Delta) \cos(\omega L \Delta + 2\psi)}{\sin^2 \omega \Delta} \right];$$

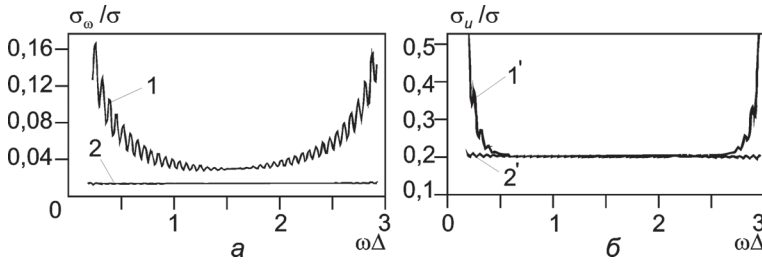


Рис. 1. Зависимости 1, 1', построенные соответственно по формулам (21), (23), и границы Рао—Крамера 2, 2' для модели (17) при $Q = 1$, $M = 47$, $L = 49$

$$I_{\omega\psi} = \frac{u^2 \Delta}{4\sigma^2} \left[L(L-1) - L \frac{\sin(\omega(2L-1)\Delta + 2\psi)}{\sin \omega\Delta} + \frac{\sin(\omega L\Delta) \sin(\omega L\Delta + 2\psi)}{\sin^2 \omega\Delta} \right];$$

$$I_{\psi u} = -\frac{u}{2\sigma^2} \sin(\omega(L-1)\Delta + 2\psi) \sin(\omega L\Delta) / \sin \omega\Delta.$$

На рис. 1 представлены зависимости 1, 1', построенные по формулам (21), (23) при $u = 1$, $\psi = 0,33$, $\sigma = 0,01$ и соответствующие им границы Рао—Крамера 2, 2' при $Q = 1$, $M = 47$. Интересны также зависимости относительных средних квадратических отклонений (СКО) оценок частоты и амплитуды от количества усреднений M . С ростом M от границы Рао—Крамера удаляется σ_ω/σ , а σ_u/σ — приближается к ней.

Для определения точности оценки частоты используем отсчеты сигнала с медленно меняющимися частотой и амплитудой на интервале длительностью $L = 2Q + M$, для определённости, полагая M и L нечётными ($M = 2K + 1$):

$$x[k] = u[k] \cos(\omega[k]k\Delta + \varphi), \quad k = n - L + 1, \dots, n.$$

Перейдём к индексу $m = k - (n - (L - 1)/2) = k - n + Q + K$, т. е. перенесем начало отсчета в середину скользящего окна длительностью ΔL . Пользуясь условиями (6), отсчеты сигнала без шума разложим в ряд вокруг центральной точки окна:

$$x[m] \approx (u + \dot{u}m\Delta) \cos(\theta + \omega m\Delta + \dot{\omega}m^2\Delta^2/2), \quad m = -Q - K, \dots, Q + K.$$

Здесь $\theta = \varphi + \omega((n - Q - K)\Delta)$; $u = u((n - Q - K)\Delta)$; $\dot{u} = \dot{u}((n - Q - K)\Delta)$; $\omega = \omega((n - Q - K)\Delta)$; $\dot{\omega} = \dot{\omega}((n - Q - K)\Delta)$. В этих обозначениях оценки частоты и амплитуды примут вид

$$\hat{\omega} = \frac{1}{Q\Delta} \arccos \left(\frac{\frac{1}{2} \sum_{m=-K}^K (x[m-Q] + x[m+Q]) x[m]}{2 \sum_{m=-K}^K x^2[m]} \right);$$

$$\hat{u} = \sqrt{\frac{\sum_{m=-K}^K (x^2[m] - x[m-Q]x[m+Q])}{\sqrt{M} \sin(\hat{\omega}Q\Delta)}}. \quad (25)$$

Ограничившись первым порядком малости по $\dot{u}L\Delta/u$ и $\dot{\omega}L^2\Delta^2$, получим приближённые выражения для сумм в выражениях (25):

$$\sum_{m=-K}^K (x[m+Q] + x[m-Q]) x[m] \approx 2u^2 \cos(\omega Q\Delta) C_1 + \Delta_1;$$

$$\sum_{m=-K}^K x^2[m] \approx u^2 C_1 + \Delta_2;$$

$$\sum_{m=-K}^K (x^2[m] - x[m-Q]x[m+Q]) \approx Mu^2 \sin^2(\omega Q\Delta) + \Delta_3;$$

$$\Delta_1 = \dot{u}u\Delta \left[4 \cos(\omega Q\Delta) C_2 - Q \sin(\omega Q\Delta) C_3 \right] -$$

$$- \dot{\omega}u^2\Delta^2 \left[\cos(\omega Q\Delta) \left(C_4 + \frac{Q^2}{2} C_3 \right) + 2Q \sin(\omega Q\Delta) C_2 \right];$$

$$\Delta_2 = 2\dot{u}u\Delta C_2 - \dot{\omega}u^2\Delta^2 C_4 / 2; \quad \Delta_3 = \dot{\omega}u^2 Q^2 \Delta^2 C_3 / 2.$$

$$\text{Здесь } C_1 = \sum_{m=-K}^K \cos^2(\theta + \omega m\Delta) = \frac{M}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\theta \frac{\sin(M\omega\Delta)}{\sin \omega\Delta};$$

$$C_2 = \sum_{m=-K}^K m \cos^2(\theta + \omega m\Delta) =$$

$$= \frac{\sin 2\theta [M \cos(M\omega\Delta) \sin \omega\Delta - \sin(M\omega\Delta) \cos \omega\Delta]}{4 \sin^2 \omega\Delta};$$

$$C_3 = \sum_{m=-K}^K \sin(2\theta + 2\omega m\Delta) = \sin 2\theta \frac{\sin(M\omega\Delta)}{\sin \omega\Delta};$$

$$C_4 = \sum_{m=-K}^K m^2 \sin(2\theta + 2\omega m\Delta) =$$

$$= (\sin 2\theta [M \cos(M\omega\Delta) \sin(2\omega\Delta) +$$

$$+ \{(M^2 - 1) \sin^2 \omega\Delta - 2 \cos^2 \omega\Delta\} \sin(M\omega\Delta)] / (4 \sin^3 \omega\Delta).$$

В силу малости Δ_1 , Δ_2 и Δ_3 по сравнению с u^2 найдём приближённые выражения для оценок частоты и амплитуды:

$$\hat{\omega} = \frac{1}{Q\Delta} \arccos \left[\frac{2u^2 \cos(\omega Q\Delta) C_1 + \delta_4}{2u^2 C_1 + 2\delta_5} \right] \approx \omega + \Delta_\omega;$$

$$\hat{u} \approx \sqrt{u^2 \sin^2(\omega Q\Delta) + \Delta_3} / \sin(\omega Q\Delta + \delta_\omega Q\Delta) \approx u + \Delta_u;$$

$$\Delta_\omega = [2 \cos(\omega Q\Delta) \Delta_2 - \Delta_1] / [2u^2 Q\Delta \sin(\omega Q\Delta) C_1] =$$

$$= \dot{u} \frac{C_3}{2u C_1} + \dot{\omega} \Delta \frac{4Q \sin(\omega Q\Delta) C_2 + (Q^2 C_3 - C_4) \cos(\omega Q\Delta)}{4Q \sin(\omega Q\Delta) C_1}; \quad (26)$$

$$\Delta_u = \frac{\Delta_3}{2u \sin^2(\omega Q\Delta)} - u Q\Delta \operatorname{ctg}(\omega Q\Delta) \Delta_\omega = -\dot{u} Q\Delta \frac{\cos(\omega Q\Delta) C_3}{2 \sin(\omega Q\Delta) C_1} +$$

$$+ \dot{\omega} u Q\Delta^2 = \frac{Q C_1 C_3 - M \cos(\omega Q\Delta) (4 \sin(\omega Q\Delta) C_2 + Q \cos(\omega Q\Delta) C_3)}{4M \sin^2(\omega Q\Delta) C_1}. \quad (27)$$

Погрешность, связанная с частотной и амплитудной модуляцией, принимает наименьшее значение в середине интервала $[0, (\pi/(Q\Delta))]$ возможных значений частоты ω . Отклонения результатов численного моделирования от значений, полученных по (26) и (27), составляют менее 1 %.

Одним из главных достоинств данного метода является возможность его реализации в виде рекурсивной структуры, требующей фиксированного количества операций независимо от длины скользящего окна $L = 2Q + M$. Построим три временных ряда

$$S_1[n] = \sum_{k=n-M+1}^n x[k]x[k-Q]; S_2[n] = \sum_{k=n-M+1}^n x^2[k];$$

$$S_3[n] = \sum_{k=n-M+1}^n x[k]x[k-2Q] \quad (28)$$

и перепишем их с использованием выражений (15), (16):

$$\hat{\omega} = \frac{1}{Q\Delta} \arccos\left(\frac{S_1[n] + S_1[n-Q]}{2S_2[n-Q]}\right); \quad (29)$$

$$\hat{u} = \sqrt{S_2[n-Q] - S_3[n]} / \left[\sqrt{M} \sin(\hat{\omega}Q\Delta) \right]. \quad (30)$$

Ряды (29) можно вычислить с помощью рекуррентных соотношений

$$S_1[n] = S_1[n-1] - x[n-M]x[n-M-Q] + x[n]x[n-Q];$$

$$S_2[n] = S_2[n-1] - x^2[n-M] + x^2[n];$$

$$S_3[n] = S_3[n-1] - x[n-M]x[n-M-2Q] + x[n]x[n-2Q]. \quad (31)$$

Их расчёт требует шесть операций умножения, шесть операций сложения, массив памяти из L ячеек для хранения отсчетов сигнала $x[n]$ и три массива из Q ячеек для хранения предыдущих значений $S_1[n]$, $S_2[n]$ и $S_3[n]$. Для расчёта частоты и амплитуды по (29), (30) необходимы еще пять арифметических операций и вычисления функций $\arccos(x)$, $\sin(x)$,

$\sqrt{x}$, что можно осуществить с помощью заранее заданных массивов значений.

Для проверки работы алгоритмов на реальных сигналах был создан аппаратно-программный комплекс для дискретизации и цифровой обработки сигналов на основе сигнального микропроцессора ADSP BlackFin и 16-разрядного аналого-цифрового преобразователя (АЦП) LTC2203. Для обработки получаемого массива данных применяли выражения (28), (29), (31).

Результаты оценки частоты сигналов генератора ГЗ-122 с помощью описанного метода приведены на рис. 2. Исследуемый сигнал, представленный на рис. 2, а, имел частоту 1 МГц, а АЦП тактировался от кварцевого генератора с номинальной частотой 20,48 МГц. В случае сигнала на рис. 2, б тактирование АЦП происходило от термостатированного кварцевого генератора MV-89 номинальной частотой 10 МГц. При этом частота сигнала генератора ГЗ-122 была установлена равной 488281,25 Гц для того, чтобы отношение частот сигналов и дискретизации в обоих экспериментах было одинаковым. Видимая дискретность отклонения частоты связана с арифметикой одинарной точности с плавающей запятой, применяемой в микропроцессоре. Обработка тех же данных на персональном компьютере с использованием арифметики большей разрядности позволяет избавиться от этой дискретности. Смещение оценок частоты в экспериментах связано с различием частоты кварцевых генераторов и опорного источника частоты ГЗ-122. Подобное смещение не

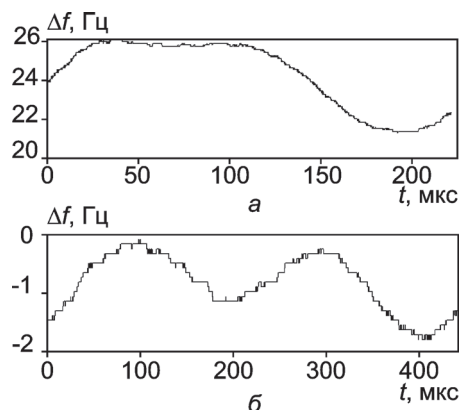


Рис. 2. Абсолютное отклонение оценок частоты сигналов генератора ГЗ-122 от заданного значения при $Q = 5$ и $M = 101$ при тактировании от стандартного кварцевого генератора (а) и от генератора MV-89 (б)

наблюдалось в экспериментах с цифровым генератором на основе микросхемы прямого цифрового синтеза AD 9852, в котором цифровой генератор и АЦП тактировались термостатированным кварцевым генератором MV-89.

В заключение можно отметить, что описанный метод позволяет получать законы изменения частоты и амплитуды как узкополосных, так и широкополосных сигналов, поскольку условия (2)–(4) не требуют узкополосности. На основе соотношений (28)–(31) можно реализовать систему, работающую в режиме реального времени на частотах до сотен мегагерц, а количество вычислительных операций не зависит от длины окна наблюдения L . Полученные оценки (21), (23), (26), (27) доказывают, что оптимальными являются значения $Q\Delta \approx \pi/(2\omega)$. При существенном изменении частоты для поддержания этого условия можно применять адаптивное изменение коэффициента Q или шага дискретизации Δ .

Экспериментальная часть исследования выполнена при поддержке РНФ (грант № 15-19-00028), теоретическая часть — при поддержке РФФИ (грант № 15-47-02297).

Л и т е р а т у р а

1. Трубецков Д. И., Рожнев А. Г. Линейные колебания и волны: Учеб. пособие. М.: Физматлит, 2001.
2. Savaresi S. M., Bittanti S., So H. C. // IEEE Trans. Autom. Contr. 2003. V. 48. N. 7. P. 1285—1292.
3. Никитин А. В., Юшанов С. В. Измерение мгновенной частоты широкополосных сигналов на коротком интервале наблюдения // Измерительная техника. 2008. № 2. С. 50—54.
4. Боровков В. И., Игнатьев В. К., Никитин А. В., Юшанов С. В. Однозначное определение огибающей и мгновенной частоты электромеханических колебаний // Известия вузов. Электромеханика. 2012. № 1. С. 16—20.
5. Игнатьев В. К., Никитин А. В., Юшанов С. В. Параметрический анализ колебаний с медленно меняющейся частотой // Известия вузов. Радиофизика. 2010. Т. LIII. № 2. С. 145—159.
6. Kay S. M. Fundamentals of Statistical Signal Processing: Estimation Theory. N.Y.: Prentice Hall, Upper Sadle River, 1998.

Дата принятия 07.04.2015 г.