

Спектральный анализ метода измерений фазового сдвига по интерферограммам

Г. Н. ВИШНЯКОВ, Г. Г. ЛЕВИН, В. Л. МИНАЕВ

Всероссийский научно-исследовательский институт оптико-физических измерений,
Москва, Россия, e-mail: minaev@vniiofi.ru

Приведен спектральный анализ метода измерений фазового сдвига по интерферограммам на основе разностей между ними. Объяснены ограничения метода и выявлены пути повышения его точности. Рассмотрено влияние фазового сдвига и аддитивного шума на погрешность измерений.

Ключевые слова: фазовый сдвиг, интерферограмма, метод фазовых шагов.

This paper describes the spectral analysis of method of phase shift measurement by interferograms based on differences between them. Such analysis helps to show restrictions of the method and the ways of accuracy increase. The effect of phase shift value and additive noise over phase shift measurement accuracy is considered.

Key words: phase shift, interferogram, phase shift method.

Для автоматической расшифровки интерферограмм применяют метод фазовых шагов [1]. Цель такой расшифровки — восстановление двумерной карты фазы, далее фазового изображения из интерференционного. Метод предполагает регистрацию и обработку набора интерферограмм с известным фазовым сдвигом между пучками света. При вычислении фазового изображения в качестве параметра используют этот сдвиг, погрешность которого влияет на восстановление фазы, например может привести к возникновению второй гармоники.

Фазовый сдвиг между интерферирующими пучками света возникает в результате изменения оптической длины пути одного из них. Для определения значения сдвига необходимо точно задавать или измерять указанное изменение. Первые устройства автоматической расшифровки интерферограмм методом фазовых шагов были снабжены прецизионными системами задания фазового сдвига на основе пьезоприводов. Однако гистерезис пьезоэлемента, вибрации и воздушные потоки могут случайным образом изменять оптическую длину пути. Если трудно точно задать фазовый сдвиг, можно попытаться его измерить. Фазовый сдвиг ведет к смещению интерференционных полос, следовательно, его можно измерить по интерферограммам. Для этого существует много методов [2—9], один из последних предложен в [10] и является сравнительно быстрым и точным. Метод основан на вычислении сдвигов по интегральным характеристикам интерференционных изображений, сформированным из разности между соответствующими парами из трех интерферограмм.

В настоящей работе метод [10] получил дальнейшее развитие. Проведя анализ в частотной плоскости, авторам статьи удалось выявить и объяснить некоторые ограничения метода, а также предложить существенные меры для повышения его точности.

Уравнение интерферограммы запишем в общем виде:

$$I_k(x, y) = a(x, y) + b(x, y)\cos[u_0x + \varphi(x, y) + \delta_k], \quad (1)$$

где I_k — распределение интенсивности в плоскости регистрации; x, y — координаты в плоскости регистрации интерфе-

рограммы; a — амплитудный фон; b — видность полос; u_0 — несущая частота опорных полос, ориентированных, например, перпендикулярно оси x ; $\varphi(x, y)$ — искомая фаза интерферограммы; δ_k — фаза во время k -го измерения, $k = 0, 1, 2, \dots$

Если $u_0 \neq 0$, то (1) описывает интерферограмму в полосах конечной ширины, при $u_0 = 0$ — при настройке интерферометра на бесконечно широкую полосу.

Перепишем (1), используя формулу Эйлера [11]:

$$I_k(x, y) = a(x, y) + 2^{-1}b(x, y)e^{iu_0x}e^{i\varphi(x, y)}e^{i\delta_k} + 2^{-1}b(x, y)e^{-iu_0x}e^{-i\varphi(x, y)}e^{-i\delta_k}. \quad (2)$$

Обозначим

$$c(x, y) = 2^{-1}b(x, y)e^{i\varphi(x, y)}, \quad (3)$$

$$c^*(x, y) = 2^{-1}b(x, y)e^{-i\varphi(x, y)}, \alpha_k = e^{i\delta_k}, \alpha_k^* = e^{-i\delta_k}$$

и запишем (2) в виде

$$I_k(x, y) = a(x, y) + c(x, y)e^{iu_0x}\alpha_k + c^*(x, y)e^{-iu_0x}\alpha_k^*. \quad (4)$$

Выполним двумерное преобразование Фурье над обеими частями уравнения (4), обозначив заглавными буквами фурье-образы функций. Используем теорему о смещении [11]:

$$\hat{I}_k(u, v) = \hat{A}(u, v) + \alpha_k \hat{C}(u - u_0, v) + \alpha_k^* \hat{C}^*(u + u_0, v), \quad (5)$$

где u, v — частотные координаты.

Из (5) следует, что фурье-образ интерферограммы на несущей частоте имеет три слагаемых, разнесенных на u_0 . По аналогии с дифракцией света на решетке первая область называется нулевым порядком дифракции и описывается слагаемым $\hat{A}(u, v)$, второе и третье слагаемые — соответственно +1 и -1 порядки дифракции.

Основная задача расшифровки интерферограмм состоит в решении уравнений (1) относительно фазы $\varphi(x, y)$ или (5) относительно $\hat{C}(u - u_0, v)$. В зависимости от значения частоты u_0 и ширины спектра в порядках дифракции различаются и методы восстановления фазы интерферограммы. Если значение u_0 достаточно велико и все три порядка в (5) разделяются в частотной области, то с помощью полосового частотного фильтра можно выделить один из первых порядков, например $\hat{C}(u - u_0, v)$. После обратного преобразования Фурье формируется комплексное изображение, фазовая составляющая которого несет информацию об искомой фазе интерферограммы. В этом состоит суть метода Фурье-преобразования. Если $u_0 \approx 0$ и порядки дифракции в спектре (5) перекрываются, то необходимо применять метод фазовых шагов. В (5) неизвестными являются $\hat{A}(u, v)$, $\hat{C}(u, v)$, для их нахождения составляют систему уравнений при изменении параметра α_k . В этом случае используют несколько интерферограмм, полученных при различных сдвигах фазы δ_k . Отсюда следует, что для реализации метода фазовых шагов требуется знание точных значений параметров α_k или фазовых сдвигов δ_k .

В развитие метода [10] проведем вывод основных формул вычисления фазовых сдвигов δ_k , используя Фурье-анализ разностных интерферограмм. Найдем Фурье-образ разности двух интерферограмм (см. (5)), полученных при разных фазовых сдвигах:

$$\begin{aligned} \hat{\Delta}_{kl}(u, v) &\equiv \hat{I}_l(u, v) - \hat{I}_k(u, v) = \\ &= \alpha_{kl} \hat{C}(u - u_0, v) + \alpha_{kl}^* \hat{C}^*(u + u_0, v), \end{aligned} \quad (6)$$

где $\alpha_{kl} = \alpha_l - \alpha_k = e^{i\delta_l} - e^{i\delta_k}$; l, k — номера интерферограмм.

На рис. 1 показан Фурье-образ разностной интерферограммы, у спектра которой отсутствует нулевой порядок — именно для его устранения и применяют указанные интерферограммы.

Если взять несколько интерферограмм с разными фазовыми сдвигами, то, используя (6), можно составить систему уравнений. Например, при $k = 0$, $l = 1, 2$ решение полученной системы запишем как

$$\hat{C}(u - u_0, v) = [\alpha_{02}^* \hat{\Delta}_{01}(u, v) - \alpha_{01}^* \hat{\Delta}_{02}(u, v)] / [\alpha_{01} \alpha_{02}^* - \alpha_{02} \alpha_{01}^*].$$

Выполнив обратное преобразование Фурье, получим комплексную функцию $c(x, y)$, фаза которой несет информацию об искомой фазе интерферограммы. В этом заключается суть метода фазовых шагов и для его реализации необходимо знать значение фазового сдвига. Опишем процедуру вычислений этого сдвига.

Интеграл от квадрата модуля спектра разности двух интерферограмм:

$$\sigma_{kl}^2 = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{\Delta}_{kl}(u, v)|^2 du dv. \quad (7)$$

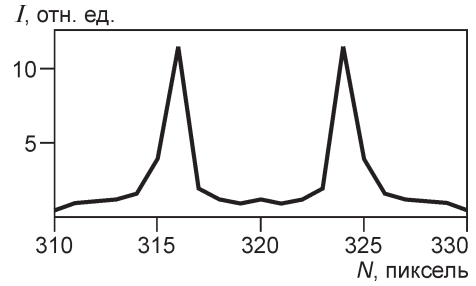


Рис. 1. Фурье-образ разностной интерферограммы:
I — распределение интенсивности; N — номер пикселя

Используя (6), найдем

$$\begin{aligned} |\hat{\Delta}_{kl}(u, v)|^2 &= |\alpha_{kl} \hat{C}(u - u_0, v) + \alpha_{kl}^* \hat{C}^*(u + u_0, v)|^2 = \\ &= |\alpha_{kl}|^2 \left[|\hat{C}(u - u_0, v)|^2 + |\hat{C}(u + u_0, v)|^2 \right] + \\ &+ \alpha_{kl}^2 \hat{C}(u - u_0, v) \hat{C}(u + u_0, v) + [\alpha_{kl}^2 \hat{C}(u - u_0, v) \hat{C}(u + u_0, v)]^*, \end{aligned} \quad (8)$$

где второе и третье слагаемые формируются из произведения спектров в +1 и -1 порядках, поэтому их назовем перекрестными членами. Допустим, что пространственная частота u_0 , при которой ± 1 порядки не перекрываются, достаточно большая. Тогда в некотором приближении (рассмотрим далее) указанные слагаемые обращаются в нуль, следовательно

$$|\hat{\Delta}_{kl}(u, v)|^2 \approx |\alpha_{kl}|^2 \left[|\hat{C}(u - u_0, v)|^2 + |\hat{C}(u + u_0, v)|^2 \right]. \quad (9)$$

Значит

$$\sigma_{kl}^2 = \frac{2}{4\pi^2} |\alpha_{kl}|^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{C}(u, v)|^2 du dv.$$

Используя формулу Парсеваля [11] и (3), получим выражение для (7) через интеграл в пространственной области:

$$\begin{aligned} \sigma_{kl}^2 &= 2 |\alpha_{kl}|^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |c(x, y)|^2 dx dy = \\ &= -2^{-1} |\alpha_{kl}|^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} b^2(x, y) dx dy. \end{aligned} \quad (10)$$

Обозначим неизвестную величину — интеграл от квадрата функции видности полос интерферограммы — как

$$B = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} b^2(x, y) dx dy, \text{ тогда (10) примет вид}$$

$$\sigma_{kl}^2 = B |\alpha_{kl}|^2 / 2. \quad (11)$$

Таким образом, в приближении (9) интеграл по площади от квадрата разностной интерферограммы пропорционален

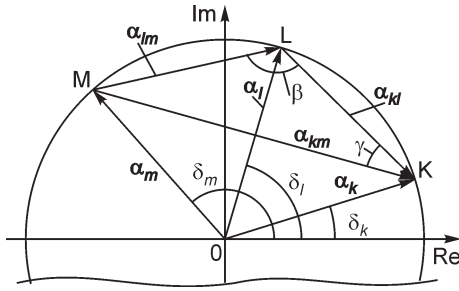


Рис. 2. Векторы двух и трех фазовых сдвигов в комплексной плоскости

значению $|\alpha_{kl}|^2$. Если рассмотреть геометрическую интерпретацию комплексных чисел в круге единичного радиуса, то число α_{kl} можно представить как разность векторов

α_k, α_l (рис. 2), тогда $|\alpha_{kl}|^2$ — квадрат длины данного разностного вектора. На рис. 2 показано, как можно определить $\delta_{lk} = \delta_l - \delta_k$ (фазовый сдвиг между интерферограммами) из треугольника OLK по формуле косинусов

$$|LK|^2 = |OL|^2 + |OK|^2 - 2|OL||OK|\cos\delta_{lk}.$$

Учтем, что $|OL| = |OK| = 1$, $|LK| = |\alpha_{kl}|$, тогда

$$|\alpha_{kl}|^2 = 4\sin^2((\delta_l - \delta_k)/2)$$

и, следовательно, фазовый сдвиг δ_{lk} определяется через длину вектора $|\alpha_{kl}|$, которую можно найти из (11), однако остается неизвестным множитель B .

Для того чтобы вывести формулы, не зависящие от B , введем третий фазовый сдвиг δ_m (см. рис. 2). Он порождает еще два разностных вектора α_{lm}, α_{km} и соответственно два новых треугольника MOL, MLK . Важный результат от введения третьего фазового сдвига — появление треугольника MLK , у которого все стороны равны разностным векторам $\alpha_{kl}, \alpha_{lm}, \alpha_{km}$, и с помощью теоремы косинусов можно найти угол γ :

$$\cos \gamma = (|\alpha_{km}|^2 + |\alpha_{kl}|^2 - |\alpha_{lm}|^2) / (2|\alpha_{km}||\alpha_{kl}|). \quad (12)$$

При подстановке (11) в (12) неизвестное значение B сокращается:

$$\cos \gamma = (\sigma_{km}^2 + \sigma_{kl}^2 - \sigma_{lm}^2) / (2\sigma_{km}\sigma_{kl}).$$

Угол $\delta_{lm} = \delta_l - \delta_m$ между векторами α_l, α_m является центральным, опирающимся на хорду LM , на нее также опирается вписанный угол γ . Так как оба угла лежат по одну сторону от хорды, то $\delta_{lm} = 2\gamma$, отсюда

$$\delta_{lm} = 2 \arccos \left[(\sigma_{km}^2 + \sigma_{kl}^2 - \sigma_{lm}^2) / (2\sigma_{km}\sigma_{kl}) \right]. \quad (13)$$

По аналогии находят угол между векторами α_l, α_k , равный $\delta_{lk} = \delta_l - \delta_k$ или

$$\delta_{lk} = 2 \arccos \left[(\sigma_{lm}^2 + \sigma_{km}^2 - \sigma_{kl}^2) / (2\sigma_{lm}\sigma_{km}) \right]. \quad (14)$$

Угол $\delta_{km} = \delta_m - \delta_k$ между векторами α_m, α_k определяем, рассмотрев углы центральный δ_{km} и вписанный β . Они опираются на хорду MK , но лежат от нее по разные стороны. Вписанный угол дополняет до 180° половину центрального угла, поэтому $\delta_{km} = 2\pi - 2\beta$, следовательно

$$\delta_{km} = 2\pi - 2 \arccos \left[(\sigma_{lm}^2 + \sigma_{kl}^2 - \sigma_{km}^2) / (2\sigma_{lm}\sigma_{kl}) \right]. \quad (15)$$

Таким образом, искомые фазовые сдвиги зависят только от интеграла (7), который можно интерпретировать как энергетический спектр «разностных» интерферограмм (6). Если еще раз воспользоваться формулой Парсеваля, то (7) можно переписать в пространственной области

$$\sigma_{kl}^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |\Delta_{kl}(x, y)|^2 dx dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} [I_l(x, y) - I_k(x, y)]^2 dx dy. \quad (16)$$

Отсюда следует, что параметр σ_{kl}^2 можно вычислять в пространственной области и рассматривать его как энергию разностной интерферограммы. По мнению авторов, выражение (16) в работе [10] названо дисперсией разностной интерферограммы ошибочно. Однако полученные выражения (13)—(15) для фазовых сдвигов совпадают с аналогичными выражениями из [10].

Анализ метода измерения фазового сдвига. Описанный выше спектральный подход позволил не только наглядно и просто вывести основные формулы (14)—(16) для вычисления фазовых сдвигов, но и найти пути снижения погрешностей измерений фазовых сдвигов, которые оценивали на основе компьютерного моделирования. Исходные данные — три интерферограммы с заданными фазовыми сдвигами. Восстановленные по описанному алгоритму сдвиги сравнивались с исходными. Параметром, характеризующим точность вычисления фазового сдвига, было абсолютное значение разности между вычисленным и исходным сдвигом, нормированное на значение исходного сдвига (относительная погрешность в процентах). Параметры интерферограмм при моделировании следующие: число отсчетов 640×480 , глубина модуляции полос 30 % с учетом аддитивного гауссового шума 4 % от максимального значения.

Сперва оценивали влияние шума в интерферограммах на точность вычислений фазового сдвига. Шум приводит к тому, что длина векторов (см. рис. 2) принимает случайные значения, отличные от единицы [12]. Вследствие изменения длины векторов изменяются углы в треугольнике MLK . Чем меньше фазовые сдвиги, тем меньше длина сторон ML, LK и относительное искажение углов при шумах будет проявляться сильнее. Можно ожидать, что погрешность вычисления фазового сдвига в присутствии шума будет зависеть от абсолютного значения этого фазового сдвига.

Чтобы проверить данное предположение, было проведено компьютерное моделирование для фазовых сдвигов $\pi/6$, $\pi/4$, $\pi/3$, $\pi/2$ при варьировании среднего квадратического отклонения (СКО) шума в диапазоне $\sigma_{\text{ш}} = 1\text{--}4\%$ с шагом $0,5\%$. На рис. 3 представлен график зависимости относительной погрешности вычисления фазового сдвига $\delta_{\text{ф.с}}$ от шума для различных фазовых сдвигов δ_k , откуда следует, что при малых сдвигах, например, $\pi/6$ и меньше, даже при $\sigma_{\text{ш}} \approx 1\%$ относительная погрешность велика (около 8%) и резко возрастает при увеличении уровня шума. Поэтому данный метод лучше подходит для больших сдвигов порядка $\pi/3$ и более, тогда стороны у треугольника MLK (см. рис. 2) становятся значительно больше и менее заметны искажения его углов от случайных изменений длины векторов. В методе фазовых шагов наиболее распространены сдвиги, близкие к $\pi/3$, $\pi/2$ с $\sigma_{\text{ш}} = 1\%$.

Итак, точность вычисления фазовых сдвигов определяется качеством выполнения приближения (9), т. е. зависит от значения перекрестного члена в формуле (8), который, с точки зрения фурье-анализа, определяет степень перекрытия $+1$ и -1 порядков спектра разностной интерферограммы. Отсюда следует, что погрешность определяется шириной спектров и расстоянием между ними, и для ее снижения нужно ширину спектров уменьшать, а расстояние между порядками увеличивать.

Работа выполнена при поддержке Минобрнауки России (соглашение № 14.625.21.0004 от 25.08.2014).

Л и т е р а т у р а

1. Malacara Daniel, Servin Manuel, Malacara Zacarias. Interferogram analysis for optical testing. Milton Park, Abingdon: Taylor&Francis Group, 2005.
2. Wang Z., Han B. Advanced iterative algorithm for phase extraction of randomly phase-shifted interferograms // Opt. Lett. 2004. V. 29. N. 14. P. 1671—1673.
3. Hao Q., Zhu Q., Hu Y. Random phase-shifting interferometry without accurately controlling or calibrating the phase shifts // Opt. Lett. 2009. V. 34. N. 8. P. 1288—1290.
4. Xu X. F., Cai L. Z., Meng X. F., Dong G. Y., Shen X. X. Fast blind extraction of arbitrary unknown phase shifts by an iterative tangent approach in generalized phase-shifting interferometry // Opt. Lett. 2006. V. 31. N. 13. P. 1966—1968.

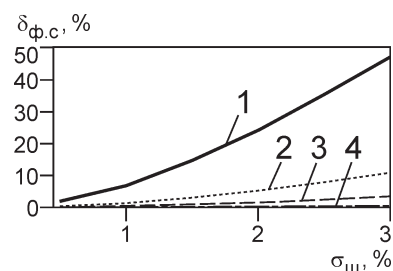


Рис. 3. Зависимость относительной погрешности вычисления фазового сдвига $\delta_{\text{ф.с}}$ от шума $\sigma_{\text{ш}}$ для различных фазовых сдвигов $\delta_k = \pi/6$; $\pi/4$; $\pi/3$; $\pi/2$ — соответственно кривые 1—4

5. Xu X. F., Cai L. Z., Wang Y. R., Yang X. L., Meng X. F., Dong G. Y., Shen X. X., Zhang H. Generalized phase-shifting interferometry with arbitrary unknown phase shifts: Direct wavefront reconstruction by blind phase shift extraction and its experimental verification // Appl. Phys. Lett. 2007. V. 90. N. 12. P. 121—124.
6. Xu X. F., Cai L. Z., Wang Y. R., Meng X. F., Sun W. J., Zhang H., Cheng X. C., Dong G. Y., Shen X. X. Simple direct extraction of unknown phase shift and wavefront reconstruction in generalized phase-shifting interferometry: algorithm and experiments // Opt. Lett. 2008. V. 33. N. 8. P. 776—778.
7. Gao P., Yao B., Lindlein N., Mantel K., Harder I., Geist E. Phase-shift extraction for generalized phase shifting interferometry // Opt. Lett. 2009. V. 34. N. 22. P. 3553—3555.
8. Yoshikawa N. Phase determination method in statistical generalized phase-shifting digital holography // Appl. Opt. 2013. V. 52. N. 9. P. 1947—1953.
9. Nobukazu Yoshikawa, Takaaki Shiratori, Kazuki Kajihara. Robust phase-shift estimation method for statistical generalized phase-shifting digital holography // Opt. Express. 2014. V. 22. N. 12. P. 14155—14165.
10. Hongwei Guo, Zhihui Zhang. Phase shift estimation from variances of fringe pattern differences // Appl. Opt. 2013. V. 52. N. 26. P. 6572—6578.
11. Папулис А. Теория систем и преобразований в оптике. М.: Мир, 1971.
12. Cheng-Shan Guo, Zhen-Yu Rong, Jing-Liang He, Hui-Tian Wang, Lü-Zhong Cai, Yu-Rong Wan. Determination of global phase shifts between interferograms by use of an energy-minimum algorithm // Appl. Opt. 2003. V. 42. N. 32. P. 6514—6519.

Дата принятия 03.09.2015 г.