

Классификация моментов пространственного распределения интенсивности лазерного пучка

А. М. РАЙЦИН¹, М. В. УЛАНОВСКИЙ²

¹ Московский технический университет связи и информатики, Москва, Россия, e-mail: arcadiyram@rambler.ru

² Всероссийский научно-исследовательский институт оптико-физических измерений, Москва, Россия, e-mail: ulanovsky@vniiofi.ru

Рассмотрена классификация двух типов моментов распределения интенсивности лазерного пучка с учетом нормирований, применяемых при измерении пространственно-энергетических характеристик лазерных пучков.

Ключевые слова: лазерный пучок, моменты распределения интенсивности, многоэлементный измерительный преобразователь.

The classification of two types of laser beam intensity distribution moments with taking into account the normalizations used during measurement of spatial-energy characteristics of laser beams are considered.

Key words: laser beam, moments of intensity distribution, multielement measuring converter.

Основные пространственно-энергетические характеристики лазерного пучка (ПЭХЛП) выражаются через моменты распределения интенсивности (РИ) [1]. В поперечном сечении ЛП в момент времени t РИ можно представить в виде $I(x, y)$, в общем случае $-\infty < x < \infty$, $-\infty < y < \infty$. Двухмерные моменты РИ обозначим как

$$m_{pq} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x^p y^q I(x, y) dx dy, \quad p, q = 0, 1, 2, \dots, \quad (1)$$

где функция $I(x, y)$ такая, что несобственный интеграл (1) сходится. Данное обозначение момента показывает, что записаны p - и q -й моменты по переменным x, y , соответственно. В дальнейшем примем $m_{pq} = m_{pq}$.

Реально моменты РИ измеряют с помощью средств измерений (СИ) с многоэлементными измерительными преобразователями (МИП), имеющими ограниченные динамический диапазон и апертуру, которая обуславливает конечные пределы интегрирования в (1) и, следовательно, существование моментов:

$$m_{pq} = \iint_G x^p y^q I(x, y) dx dy, \quad p, q = 0, 1, 2, \dots, \quad (2)$$

где G — область интегрирования в пределах МИП.

Рассмотрим МИП с прямоугольной апертурой размера по осям координат $(T_x \times T_y)$, $-T_x/2 \leq x \leq T_x/2$, $-T_y/2 \leq y \leq T_y/2$.

Распределение интенсивности всегда можно представить в виде

$$I(x, y) = I_{\max} s(x, y), \quad (3)$$

где $I_{\max}$ — максимальная интенсивность; $s(x, y)$ — относительное РИ $0 \leq s(x, y) \leq 1$.

Из (2), (3) следует, что на значение момента оказывают влияние параметр $I_{\max}$, неинформативный для измерения ПЭХЛП и изменяющийся в процессе эксперимента, и граница области G . Упомянутые факторы вносят особенности в процесс измерения ПЭХЛП и на практике приводят к необходимости применения разных видов моментов и их нормирований. Например, при измерении ширины пучка и угла расходимости, определяемых через моменты, для исключения зависимости от $I_{\max}$ следует перейти к значениям $s(x, y)$, что можно сделать разными способами. При воспроизведении и передаче РИ существенное значение имеет его форма, также определяемая через моменты. Тогда для описания РИ, следует исключить зависимость моментов от линейных размеров области G и путем нормирования перейти к безразмерным моментам. В результате представим следующую классификацию моментов.

Рассмотрим моменты РИ типа 1, измеренные по нижнему уровню $I_{\max} R$:

$$M_{pq} = \iint_{\Omega} x^p y^q I(x, y) dx dy, \quad p, q = 0, 1, 2, \dots,$$

где $0 \leq R \leq 1$ — нижняя граница измерения относительного РИ; $G = \Omega$ — область интегрирования (эффективная площадь облучения МИП), определяемая неравенствами

$$I(x, y) = \begin{cases} I(x, y), & \text{если } I(x, y) \geq I_{\max} R; \\ 0, & \text{если } I(x, y) < I_{\max} R; \end{cases}$$

при этом $\Omega \subset (T_x \times T_y)$.

Если двухмерную функцию РИ $I(x, y)$ в плоскости измерительного устройства МИП представить в виде совокупности одномерных функций $I(x, y^*) = I(x)$, получаемых при пересечении распределения $I(x, y)$ плоскостями $y = y^* = \text{const}$, то можно ввести одномерные моменты, измеренные по нижнему уровню $I_{\max} R$, аналогично $I(x^*, y) = I(y)$.

Пусть $[T_1, T_2] \in [-T_x/2; T_x/2]$ — интервал значений аргумента x , в пределах которого интенсивность распределения $I(x) \geq I_{\max} R$, при этом $I(T_1) = I(T_2) = I_{\max} R$ (см. рис. а). Одномерные моменты РИ относительно x , измеренные в интервале $[T_1; T_2]$ по нижнему уровню $I_{\max} R$:

$$M_p = \int_{-T_x/2}^{T_x/2} x^p I(x) dx = \int_{T_1}^{T_2} x^p I(x) dx, \quad p = 0, 1, 2, \dots,$$

где T_1 — соответствует значению, при котором $I(T_1) = I_{\max} R$, а T_2 — значению $I(T_2) = I_{\max} R$.

Определим динамический диапазон СИ как $D_{\text{и}} = \lg(1/R)$. Измеряемое относительное РИ находится в пределах $R \leq s(x) \leq 1$, т. е.

$$s(x) = I(x)/I_{\max} = \begin{cases} s(x), & \text{если } s(x) \geq R; \\ 0, & \text{если } s(x) < R; \end{cases}$$

$x \in [T_1; T_2]$.

При измерении ПЭХЛП необходимо, чтобы РИ располагалось в диапазоне $D_{\text{и}}$ МИП, что, как правило, обеспечивается параметрами оптической системы СИ. Ограниченность динамического диапазона в этом случае является источником погрешности измерения, рассмотренной в [2].

Изучим моменты РИ типа 2, измеренные в пределах апертуры МИП:

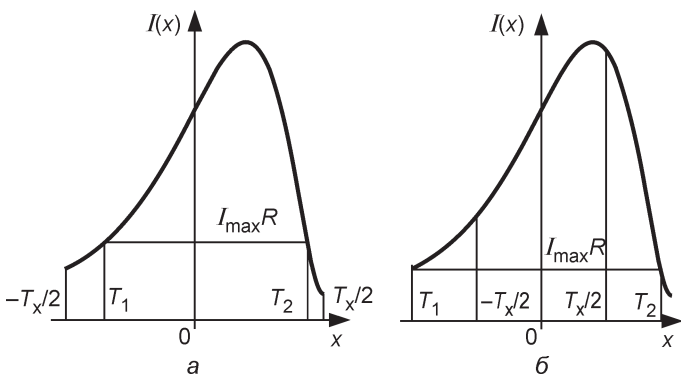
$$m_{pq} = \iint_{(T_x \times T_y)} x^p y^q I(x, y) dx dy, \quad p, q = 0, 1, 2, \dots$$

Здесь $G = (T_x \times T_y) \subset \Omega$.

В одномерном случае $(-T_x/2; T_x/2) \in (T_1, T_2)$, тогда $I(-T_x/2)$, $I(T_x/2)$ — РИ на краях входной апертуры СИ (см. рис. б).

Если установить интервал $[T_1, T_2]$ не представляется возможным, когда ПЭХЛП определяются по моментам распределения, минуя процесс сканирования распределения [3], или в задаче необходимо измерить только часть распределения в пределах входной апертуры, то интегрирование РИ производится на отрезке $-T_x/2 \leq x \leq T_x/2$, что в одномерном случае имеет вид

$$M_p = \int_{-T_x/2}^{T_x/2} x^p I(x) dx, \quad \text{где } p = 0, 1, 2, \dots$$



Измерение моментов распределения интенсивности типа 1 по нижнему уровню (а) и типа 2 в пределах входной апертуры (б)

Для исключения зависимости от неинформативных параметров при измерении ПЭХЛП обычно применяют *нормированные моменты*. Рассмотрим их основные виды. Одномерные моменты введем относительно координаты x , аналогично их можно представить относительно переменной y . Описанные далее моменты *типов 1а, 1б, 1с* позволяют исключить зависимость от неинформативного параметра $I_{\max}$.

Моменты типа 1а. Двух- и одномерные (относительно координаты x) моменты, соответственно нормированные к нулевым моментам M_{00} , M_0 , запишем как

$$\bar{M}_{pq} = \frac{\iint_{\Omega} x^p y^q I(x, y) dx dy}{\iint_{\Omega} I(x, y) dx dy} = \frac{\iint_{\Omega} x^p y^q s(x, y) dx dy}{\iint_{\Omega} s(x, y) dx dy}, \quad p, q = 0, 1, 2, \dots;$$

$$\bar{M}_p = \frac{\int_{T_1}^{T_2} x^p I(x) dx}{\int_{T_1}^{T_2} I(x) dx} = \frac{\int_{T_1}^{T_2} x^p s(x) dx}{\int_{T_1}^{T_2} s(x) dx},$$

$p = 0, 1, 2, \dots$

Моменты типа 1б. Двух- и одномерные моменты, центрированные соответственно относительно координат энергетического центра (КЭЦ) $(\bar{x}, \bar{y})$ и $\bar{x}$ пучка и нормированные к нулевым моментам M_{00} , M_0 :

$$\bar{M}_{pq}^* = \iint_{\Omega} (x - \bar{x})^p (y - \bar{y})^q I(x, y) dx dy / \iint_{\Omega} I(x, y) dx dy,$$

$p, q = 0, 1, 2, \dots$

$$\bar{M}_p^* = \frac{\int_{T_1}^{T_2} (x - \bar{x})^p I(x) dx}{\int_{T_1}^{T_2} I(x) dx} = \frac{\int_{T_1}^{T_2} (x - \bar{x})^p s(x) dx}{\int_{T_1}^{T_2} s(x) dx},$$

$p = 0, 1, 2, \dots$

Моменты типа 1с. Двух- и одномерные моменты, нормированные к наибольшему значению РИ $I_{\max}$:

$$\tilde{M}_{pq} = \iint_{\Omega} x^p y^q s(x, y) dx dy, \quad p, q = 0, 1, 2, \dots;$$

$$\tilde{M}_p = \int_{T_1}^{T_2} x^p s(x) dx, \quad p = 0, 1, 2, \dots$$

Моменты типа 1д. Двух- и одномерные моменты, нормированные к произведению $T_x^{p+1} T_y^{q+1}$ и $(T_2 - T_1)^{p+1}$ соответственно

$$\hat{M}_{pq} = \iint_{\Omega} x^p y^q I(x, y) dx dy / \left(T_x^{p+1} T_y^{q+1} \right), \quad p, q = 0, 1, 2, \dots,$$

$$\hat{M}_p = \frac{\int_{T_1}^{T_2} x^p I(x) dx}{(T_2 - T_1)^{p+1}} = \frac{\int_{T_1}^{T_2} (x - T_1)^p I(x) dx}{(T_2 - T_1)^{p+1}}, \quad p = 0, 1, 2, \dots,$$

где T_x^* , T_y^* — максимальные линейные размеры области Ω вдоль соответствующих осей координат.

Моменты типа 1е. Двух- и одномерные моменты, нормированные к произведению $T_x^{p+1} T_y^{q+1}$, $(T_2 - T_1)^{p+1}$ соответственно и наибольшему РИ $I_{\max}$:

$$M_{pq}^6 = \iint_{\Omega} x^p y^q s(x, y) dx dy / \left(T_x^{p+1} T_y^{q+1} \right), p, q = 0, 1, 2, \dots;$$

$$M_p^6 = \int_{T_1}^{T_2} (x - T_1)^p s(x) dx / (T_2 - T_1)^{p+1}, p = 0, 1, 2, \dots$$

Моменты *типа 1е* являются безразмерными, их применение целесообразно при воспроизведении и передаче единиц колоколообразного РИ [4]. Например, для распределения Гаусса $I(x) = I_{\max} e^{-ax^2}$, измеренного по уровню интенсивности R , такие моменты имеют вид

$$M_{01}^6 = \sqrt{\pi} \operatorname{erf}(\sqrt{-\ln R}) / (2\sqrt{-\ln R});$$

$$M_{21}^6 = \left[\sqrt{\pi} \operatorname{erf}(\sqrt{-\ln R}) - 2R\sqrt{-\ln R} \right] / \left[16(-\ln R)^{3/2} \right],$$

где $\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$ и определяются только уровнем R .

Для моментов *типа 2* можно составить аналогичную классификацию.

Моменты типа 2а. Двух- и одномерные (относительно координаты x) моменты, соответственно нормированные к нулевым моментам m_{00} , m_0 :

$$\bar{m}_{pq} = \frac{\iint_{T_x \times T_y} x^p y^q I(x, y) dx dy}{\iint_{T_x \times T_y} I(x, y) dx dy} = \frac{\iint_{T_x \times T_y} x^p y^q s(x, y) dx dy}{\iint_{T_x \times T_y} s(x, y) dx dy},$$

$p, q = 0, 1, 2, \dots;$

$$\bar{m}_p = \frac{\int_{-T_x/2}^{T_x/2} x^p I(x) dx}{\int_{-T_x/2}^{T_x/2} I(x) dx} = \frac{\int_{-T_x/2}^{T_x/2} x^p s(x) dx}{\int_{-T_x/2}^{T_x/2} s(x) dx}, p = 0, 1, 2, \dots$$

Моменты типа 2б. Двух- и одномерные моменты, центрированные соответственно относительно КЭЦ $(\bar{x}, \bar{y})$ и $\bar{x}$ пучка, нормированные к нулевым моментам m_{00} , m_0 :

$$\bar{m}_{pq}^* = \iint_{T_x \times T_y} (x - \bar{x})^p (y - \bar{y})^q I(x, y) dx dy / \iint_{T_x \times T_y} I(x, y) dx dy,$$

$p, q = 0, 1, 2, \dots;$

$$\bar{m}_p^* = \int_{-T_x/2}^{T_x/2} (x - \bar{x})^p I(x) dx / \int_{-T_x/2}^{T_x/2} I(x) dx, p = 0, 1, 2, \dots$$

Такие двухмерные моменты применяются в стандарте [1].

Моменты типа 2с. Двух- и одномерные моменты, нормированные к наибольшему значению РИ $I_{\max}$:

$$\tilde{m}_{pq} = \iint_{T_x \times T_y} x^p y^q s(x, y) dx dy, p, q = 0, 1, 2, \dots;$$

$$\tilde{m}_p = \int_{-T_x/2}^{T_x/2} x^p s(x) dx, p = 0, 1, 2, \dots$$

Моменты *типа 2д.* Двух- и одномерные моменты, нормированные к произведению $T_x^{p+1} T_y^{q+1}$ и T_x^{p+1} соответственно

$$\hat{m}_{pq} = \iint_{T_x \times T_y} x^p y^q I(x, y) dx dy / \left(T_x^{p+1} T_y^{q+1} \right), p, q = 0, 1, 2, \dots,$$

$$\hat{m}_p = \int_{-T_x/2}^{T_x/2} x^p I(x) dx / T_x^{p+1}, p = 0, 1, 2, \dots,$$

где T_x , T_y — максимальные линейные размеры МИП вдоль соответствующих осей координат.

Моменты типа 2е. Двух- и одномерные моменты, нормированные к произведению $T_x^{p+1} T_y^{q+1}$, T_x^{p+1} соответственно и наибольшему РИ $I_{\max}$:

$$m_{pq}^6 = \iint_{T_x \times T_y} x^p y^q s(x, y) dx dy / \left(T_x^{p+1} T_y^{q+1} \right);$$

$$m_p^6 = \int_{-T_x/2}^{T_x/2} x^p s(x) dx / T_x^{p+1}.$$

Таким образом, для измерения пространственно-энергетических характеристик лазерного пучка впервые получена и представлена классификация двух типов моментов РИ с различными видами нормирования.

Л и т е р а т у р а

1. **ГОСТ Р ИСО 11146—2008.** Лазеры и лазерные установки (системы). Методы измерений ширин, углов расходимости и коэффициентов распространения лазерных пучков. Ч. 1—3.

2. **Райцин А. М.** Определение пространственно-энергетических характеристик лазерного излучения с учетом ограниченного динамического диапазона измерительного устройства // Измерительная техника. 2013. № 8. С. 23—27.

3. **Шангин В. А.** Принципы построения средств измерений интегральных характеристик ПЭХЛИ. Метрологическое обеспечение пространственно-энергетической фотометрии // Сб. научных трудов. М.: ВНИИФТРИ. 1987. С. 48—62.

4. **Котюк А. Ф., Райцин А. М., Колбановская Н. А., Коршиков В. Б.** Воспроизведение единицы ОРПЭ в поперечном сечении лазерного излучения и передача ее размера // Измерительная техника. 1983. № 5. С. 34—35.

Дата принятия 03.09.2015 г.