

Выбор оптимальных условий измерения теплофизических свойств веществ методом плоского «мгновенного» источника тепла

А. В. ГУРОВ, Г. А. СОСЕДОВ, А. Е. РОДИНА, С. В. ПОНОМАРЕВ

Тамбовский государственный технический университет, Тамбов, Россия,
e-mail: kafedra@uks.tstu.ru

Разработана математическая модель погрешностей измерений, которая использована при определении оптимальных режимных параметров метода плоского «мгновенного» источника тепла, применяемого для измерений коэффициента температуропроводности и объемной теплоемкости теплоизоляционных материалов.

Ключевые слова: теплоизоляционные материалы, температуропроводность, объемная теплоемкость, математическая модель погрешностей измерений.

The mathematical measurement errors model was developed and used for determination of optimum mode parameters of the flat «instant» heat source method applied for thermal diffusivity and the volume heat capacity of thermal insulation materials measurement.

Key words: heat-insulated materials, thermal diffusivity, volume heat capacity, mathematical model of measurements errors.

Цель данной работы — выбор оптимальных параметров режима измерительных операций и конструктивных размеров устройства для проведения измерений комплекса теплофизических свойств вещества методом плоского «мгновенного» источника тепла. Физическая модель устройства приведена на рис. 1.

При практической реализации метода на плоский нагреватель 1 подается короткий электрический импульс, за время действия которого в единице площади нагревателя выделяется количество теплоты Q_n . На практике длительность τ_i импульса приходится выбирать достаточно большой, чтобы с необходимой точностью зарегистрировать измеряемую температуру $T(x_0, \tau)$. В [1, 2] рассмотрены вопросы введения поправок на конечную длительность τ_i теплового импульса в приведенную ниже расчетную зависимость (2). При условии $\tau_i < (0,05 \dots 0,1)\tau_{\max}$, т. е. много меньше промежутка времени до момента $\tau_{\max}$ достижения максимума на температурной кривой (рис. 2), эти поправки остаются незначительными, что позволяет использовать метод без введения поправок.

Расчетные соотношения метода измерений. Исходя из его математической модели, предложенной в [1 — 3], можно записать

$$T(x, \tau) - T_0 = \frac{Q_n}{c\rho\sqrt{4\pi a\tau}} \exp\left[-\frac{x^2}{4a\tau}\right], \quad (1)$$

где $T(x, \tau)$ — температура в точке с координатой x в момент времени τ ; T_0 — начальная температура

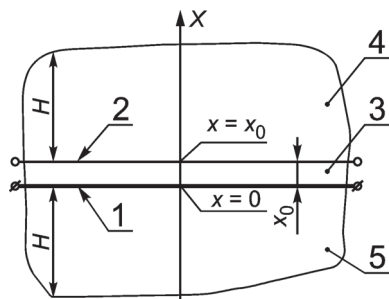


Рис. 1. Физическая модель устройства для реализации метода плоского «мгновенного» источника тепла [1]:

x_0 — расстояние между плоским нагревателем 1 и измерителем температуры 2; 3, 4, 5 — образцы исследуемого материала

исследуемого вещества, условно принимаемая за начало температурной шкалы в каждом эксперименте; a , c , ρ — соответственно температуропроводность, удельная теплоемкость и плотность исследуемого вещества.

В [1] показано, что температуропроводность обычно вычисляют по формуле

$$a = x_0^2 / (2\tau_{\max}). \quad (2)$$

Применение (2) приводит к большим погрешностям, поскольку момент времени $\tau_{\max}$ сложно определить достаточно точно. Попробуем найти такие моменты времени τ' и τ'' (см. рис. 2), которые позволят минимизировать погрешность определения температуропроводности.

Используем безразмерную переменную $z = x^2 / (4a\tau)$. Тогда (1) примет вид

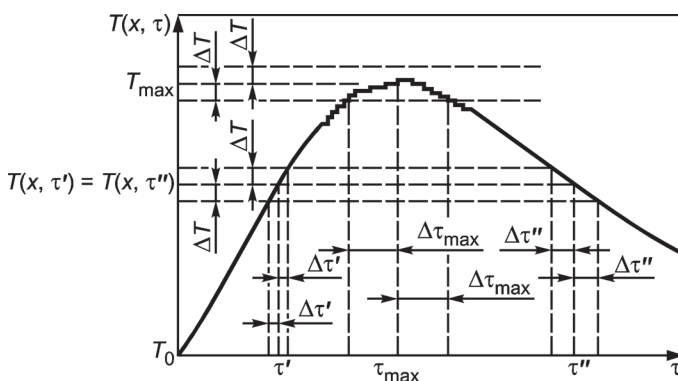


Рис. 2. Изменение во времени τ температуры $[T(x, \tau) - T_0]$ в точке с координатой x и иллюстрация непостоянства абсолютной погрешности $\Delta\tau$ определения времени в ходе эксперимента при постоянной абсолютной погрешности ΔT измерения температуры

$$T(x, \tau) - T_0 = [Q_n \sqrt{z} \exp(-z)] / (c\rho x \sqrt{\pi}),$$

где $c\rho = \lambda/a$ — объемная теплоемкость исследуемого материала; λ — теплопроводность.

Введем переменный параметр

$$\beta = [T(x, \tau) - T_0] / (T_{\max} - T_0), \quad (3)$$

Запишем (1) для момента времени $\tau' = \tau'(\beta)$:

$$T(x, \tau') - T_0 = [Q_n \sqrt{z(\tau'(\beta))} \exp(-z(\tau'(\beta)))] / (c\rho x \sqrt{\pi}). \quad (4)$$

Для момента времени $\tau = \tau_{\max}$, когда $z|_{\tau_{\max}} = 0,5$, согласно [1] имеем

$$T(x, \tau_{\max}) - T_0 \equiv T_{\max} - T_0 = Q_n / (c\rho x \sqrt{2\pi e}). \quad (5)$$

Поделив (4) на (5), после преобразований получим

$$\sqrt{z} \exp(-z) = \beta / \sqrt{2e}. \quad (6)$$

Обозначив $z' = z(\tau'(\beta)) = x^2/(4a\tau')$ и $z'' = z(\tau''(\beta)) = x^2/(4a\tau'')$ соответственно больший и меньший корни уравнения (6), при которых достигается заданное значение параметра β , определенное (3), найдем формулы для вычисления искомой температуропроводности a по результатам измерений в моменты времени τ' и τ'' :

$$a' = x^2/(4z'\tau'); \quad a'' = x^2/(4z''\tau''). \quad (7)$$

Из (4) легко получим формулу для вычисления объемной теплоемкости

$$c\rho = [Q_n \sqrt{z(\tau'(\beta))} \exp(-z(\tau'(\beta)))] / ([T(x, \tau'(\beta)) - T_0] x \sqrt{\pi}), \quad (8)$$

которая при $z|_{\tau_{\max}} = 0,5$ с учетом (5) принимает вид

$$c\rho = Q_n / [(T_{\max} - T_0) x \sqrt{\pi}].$$

Соотношения для вычисления погрешностей. По методике, описанной в [1], найдем выражение для вычисления погрешностей в случае определения (вычисления) температуропроводности по формулам (7). На основании первой из них

$$\delta a' = \sqrt{4(\delta x)^2 + (\delta z')^2 + (\delta \tau')^2}, \quad (9)$$

где $\delta a' = \Delta a'/a$ — средняя квадратическая оценка относительной погрешности измерения температуропроводности; $\delta x = \Delta x/x$, $\delta z' = \Delta z'/z'$, $\delta \tau' = \Delta \tau'/\tau'$ — относительные погрешности определения соответственно расстояния x между нагревателем и измерителем температуры, величин z' и τ' ; Δa , Δx , $\Delta z'$, $\Delta \tau'$ — абсолютные погрешности измерения (определения) величин a , x , z' , τ' .

Составляющая погрешности $\delta z'$ выражается как

$$\delta z' \approx \frac{dz'}{z'} = \frac{1}{z'} \frac{dz'}{d\beta} d\beta \approx \frac{1}{z'} \frac{dz'}{d\beta} \Delta \beta.$$

Аналогично определим абсолютную погрешность $\Delta \beta$ по методике, изложенной в [1]. С учетом (3) получим

$$\Delta \beta = \beta \sqrt{\delta^2(T(x, \tau') - T_0) + \delta^2(T_{\max} - T_0)}, \quad (10)$$

где $\delta(T(x, \tau') - T_0) = \Delta(T(x, \tau') - T_0)/[T(x, \tau') - T_0]$, $\delta(T_{\max} - T_0) = \Delta(T_{\max} - T_0)/(T_{\max} - T_0)$ — относительные погрешности измерений разностей температур.

Положим $\Delta(T(x, \tau') - T_0) = \Delta(T_{\max} - T_0) = \Delta T$, тогда после преобразования выражение (10) принимает вид

$$\Delta \beta = \beta \delta (T_{\max} - T_0) \sqrt{1/\beta^2 + 1}, \quad (11)$$

$$\text{откуда следует} \quad \delta z' = \frac{1}{z'(\beta)} \frac{dz'(\beta)}{d\beta} \beta \delta T_{\max} \sqrt{\frac{1}{\beta^2} + 1},$$

где $\delta T_{\max} \equiv \delta(T_{\max} - T_0)$.
Заменяв z' на z'' , найдем

$$\delta z'' = \frac{1}{z''(\beta)} \frac{dz''(\beta)}{d\beta} \beta \delta T_{\max} \sqrt{\frac{1}{\beta^2} + 1}.$$

Определим входящую в (9) составляющую $\delta \tau'$. Погрешности определения моментов времени $\tau_{\max}$, τ' и τ'' связаны не только непосредственно с измерением времени. Как следует из рис. 2, в реальных условиях эксперимента пик кривой, соответствующий максимуму температуры, заметно зашумлен и поэтому существенно размыт. Если $T_{\max}$ можно определить достаточно точно, то соответствующий момент времени $\tau_{\max}$ имеет заметную погрешность $\Delta \tau_{\max}$.

Моменты времени τ' и τ'' находят по значениям температуры, т. е. погрешность определения τ' и τ'' можно выразить через погрешность определения температуры ΔT . Учитывая, что $\partial T(x, \tau)/\partial \tau \approx \Delta T/\Delta \tau$, получаем

$$\Delta \tau' \approx \Delta T / [\partial T(x, \tau(\beta)) / \partial \tau]_{\tau=\tau'};$$

$$\Delta \tau'' \approx \Delta T / [\partial T(x, \tau(\beta)) / \partial \tau]_{\tau=\tau''}. \quad (12)$$

Из (12) следует, что абсолютная погрешность $\Delta \tau'$ зависит от абсолютной погрешности ΔT измерения температуры $T(x, \tau'(\beta))$ и от ее производной в момент времени τ' . При этом значения производной и погрешности $\Delta \tau'(\beta)$ зависят от выбора конкретного значения безразмерного параметра β , представляющего собой отношение разностей температур $[T(x, \tau') - T_0] / (T_{\max} - T_0)$. Если предположить, что $\Delta(T_{\max} - T_0) = \Delta(T(x, \tau') - T_0) = \Delta T = \text{const}$, то с учетом (11) получим

$$\frac{\Delta \tau'}{\tau'} = \delta \tau' = \frac{\Delta T}{\tau' \partial T / \partial \tau|_{\tau=\tau'}} = \frac{(T_{\max} - T_0) \delta T_{\max}}{\tau' \partial T(x, \delta(\beta)) / \partial \tau|_{\tau=\tau'}},$$

где $\Delta T = (T_{\max} - T_0) = \delta T_{\max}$.

Производная для момента времени τ' [1]:

$$\partial [T(x, \tau') - T_0] / \partial \tau|_{\tau=\tau'} = [Q_n \sqrt{z'} \exp(-z') (z' - 0,5)] / (c\rho x \tau' \sqrt{\pi}).$$

Для момента времени $\tau_{\max}$, когда $z|_{\tau_{\max}} = 0,5$, имеем $\partial T(x, \tau) / \partial \tau|_{\tau=\tau_{\max}} = 0$ и получаем выражение (5), с учетом которого

$$\delta\tau' = \frac{\Delta\tau'}{\tau'} = \frac{(T_{\max} - T_0)\delta T_{\max}}{\tau' \partial [T(x, \tau') - T_0] / \partial \tau|_{\tau=\tau'}} = \frac{\delta T_{\max}}{\sqrt{2e} \sqrt{z'(\beta) \exp(-z'(\beta))(z'(\beta) - 0,5)}}.$$

В итоге находим

$$\delta a' = \left\{ 4(\delta x)^2 + \left[\frac{\delta T_{\max}}{\sqrt{2e} \sqrt{z'(\beta) \exp(-z'(\beta))(z'(\beta) - 0,5)}} \right]^2 + \left[\frac{dz'(\beta)}{z'(\beta)d\beta} \beta \right]^2 \left(1 + \frac{1}{\beta^2} \right) (\delta T_{\max})^2 \right\}^{1/2}.$$

Аналогично выражается $\delta a''$.

Подобным же образом на основе (8) была получена зависимость для вычисления средней квадратической оценки относительной погрешности измерения объемной теплоемкости

$$\delta c_p' = \left\{ (\delta Q_n)^2 + (\delta x)^2 + (\delta [T(x, \tau'(\beta)) - T_0])^2 + \left(\frac{1}{2z'(\beta)d\beta} \frac{dz'}{d\beta} \beta \right)^2 + \left(\frac{dz'}{d\beta} \beta \right)^2 \right\}^{1/2}.$$

Принимая во внимание (11), а также равенство $\delta [T(x, \tau') - T_0] = \delta T_{\max} / \beta$, получаем

$$\delta c_p' = \left\{ (\delta Q_n)^2 + (\delta x)^2 + (\delta T_{\max})^2 \times \left[\frac{1}{\beta^2} + (1 + \beta^2) \left(\frac{dz'}{d\beta} \right)^2 \left(\frac{1}{4(z')^2} + 1 \right) \right] \right\}^{1/2}.$$

Оценка погрешностей измерений. По полученным формулам были рассчитаны средние квадратические погрешности для различных значений β , Q_n , x и выбраны оптимальные параметры, обеспечивающие наименьшую погрешность.

При выполнении расчетов были приняты $a = 1,2 \cdot 10^{-7} \text{ м}^2/\text{с}$, $c_p = 1625000 \text{ Дж}/(\text{м}^3 \cdot \text{К})$, $Q_n = 55000 \text{ Вт} \cdot \text{с}/\text{м}^2$, $\Delta Q_n = 550 \text{ Вт} \cdot \text{с}/\text{м}^2$, $x = 2 \dots 8 \text{ мм}$, $\Delta x = 0,1 \text{ мм}$, $\Delta T_{\max} = 0,01^\circ\text{C}$. Примеры зависимостей $\delta a'$, $\delta c_p'$ от параметра β при $x = 4 \text{ мм}$ и $Q_n = 55000 \text{ Вт} \cdot \text{с}/\text{м}^2$ приведены на рис. 3, а, б.

Как следует из рис. 3, а оптимальные значения β при измерении a находятся в диапазоне $0,3 - 0,6$. После проведения расчетов при изменении β с шагом $0,001$ было определено минимальное значение погрешности $\delta a' = 5,08 \%$ при $\beta = 0,498 \approx 0,5$.

В процессе выполнения данного исследования стало очевидно, что наряду с выбором оптимального значения параметра $\beta = \beta_{\text{опт}} \approx 0,5$ необходимо определить расстояние x , при котором погрешность измерения a будет минимальной. С этой целью были рассчитаны значения по-

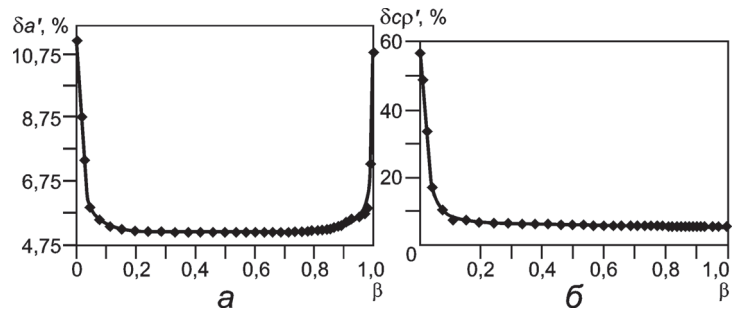


Рис. 3. Зависимости относительных погрешностей измерения теплопроводности $\delta a'$ и объемной теплоемкости $\delta c_p'$ от параметра β для $Q_n = 55000 \text{ Вт} \cdot \text{с}/\text{м}^2$ и $x = 4 \text{ мм}$

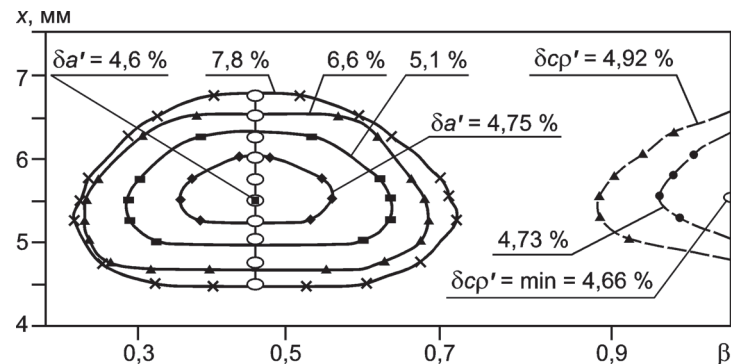


Рис. 4. Линии равных уровней погрешностей измерения теплопроводности $\delta a'$ и объемной теплоемкости $\delta c_p'$ при использовании метода плоского «мгновенного» источника тепла

грешностей $\delta a'$ при $2 < x < 8 \text{ мм}$. Были построены линии равных уровней погрешностей измерения теплопроводности $\delta a'$ и объемной теплоемкости $\delta c_p'$ в плоскости с координатами β и x , приведенные на рис. 4.

Заключение. Таким образом, минимальное значение относительных средних квадратических погрешностей δa измерения теплопроводности достигается при $\beta = 0,498 \approx 0,5$, $x = 5,5 \text{ мм}$; приемлемые значения погрешностей наблюдаются при $0,35 < \beta < 0,65$ и $5 < x < 6,5 \text{ мм}$.

Для минимизации средних квадратических погрешностей δc_p объемную теплоемкость нужно измерять в тот момент времени, когда температура достигает максимума, т. е. при $\beta = 1$. Тогда при $Q_n = 55000 \text{ Вт} \cdot \text{с}/\text{м}^2$, $x = 5,5 \text{ мм}$ и $\Delta x = 0,1 \text{ мм}$, $\Delta T_{\max} = 0,01 \text{ К}$, $\Delta Q_n = 550 \text{ Вт} \cdot \text{с}/\text{м}^2$ получаем $\delta c_{p\text{min}} = 4,66 \%$ при $\beta = 1$ и $x_{\text{опт}} = 5,5 \text{ мм}$.

Работа выполнена в рамках соглашения № 14.В37.21.0450 «Информационно-измерительная система для выбора оптимальных режимов процессов изготовления изделий из полимерных материалов с применением твердофазных технологий».

Литература

1. Пономарев С. В. и др. Теоретические и практические основы теплофизических измерений: монография / Под ред. С. В. Пономарева. М.: Физматлит, 2008.
2. Шашков А. Г. и др. Методы определения теплопроводности и теплопроводности. М.: Энергия, 1973.
3. Лыков А. В. Теория теплопроводности. М.: Высшая школа, 1967.

Дата принятия 18.07.2012 г.