006.9

Формирование оптимального плана эксперимента для статистической оценки вероятности случайного события с использованием случайной последовательной выборки

Н. Г. НАЗАРОВ, М. В. ЗЕЛЕНКОВА

Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана, Москва, Россия, e-mail: viz_zelen@rambler.ru

Предлагается при оценке вероятности рассматривать многократные измерения как случайную последовательную выборку и строить процедуру реализации измерений на основе оптимального последовательного плана, который гарантирует выполнение заданных ограничений на вероятности ошибок 1-го и 2-го рода при минимальном среднем объеме выборки.

Ключевые слова: *средство измерений, последовательный план, вероятность ошибок 1-го и 2-го рода, оперативная характеристика.*

It is proposed to consider for the probability estimation the multiple measurements as a random sequential sampling and to build the measurement realization procedure on the base of optimal sequential plan which guarantees the fulfilment of given limits for the 1-st and 2-nd type of errors probability at minimal average volume of sampling.

Key words: *measuring instrument, sequential plan, 1-st and 2-nd type errors probability, operating characteristics.*

В законодательной метрологии введено понятие «единство измерений», определяющее следующий вид нормы на качество результата измерения:

$$P\,(|E(x)| \le 1/2Te) \ge 1 - \varepsilon;\ \ \varepsilon << 1, \qquad (1)$$

где $E(x) = Y(x) - x$ — случайная погрешность; $Y(x)$ — случайный результат однократного измерения величины x с известным действительным значением; Te — допуск поля допуска $0 \pm 1/2Te = S$.

Воспользуемся для обоснования объема многократных измерений, необходимых для статистической оценки вероятности в левой части условия (1), последовательным планом контроля качества больших партий изделий [1]. С этой целью введем следующие аналогии: $|e(x)| \in S$ — положительное событие (аналог годного изделия); $P(|E(x)| \in S)$ — вероятность положительного события; $|e(x)| \notin S$ — отрицательное событие (аналог дефектного изделия); $P(|E(x)| \notin S)$ — вероятность отрицательного события.

В последовательной случайной выборке $|E_1(x)|, ..., |E_n(x)|$ объема n количество отрицательных событий характеризуется случайным числом I.

Образуем альтернативные гипотезы

$$H_0: P \le \varepsilon << 1;\ H_1: P > \varepsilon,$$

где $P = P\,(|E(x)| > 1/2Te)$.

Решающая функция при использовании случайной последовательной выборки имеет следующий вид:

$$r(i) = \begin{cases} 0, \text{ если } i \le a + cn, \text{ то принимается гипотеза } H_0; \\ 1, \text{ если } i \ge b + cn, \text{ то принимается гипотеза } H_1; \\ n \Rightarrow n+1, \text{ если } a + cn \le i \le b + cn, \text{ то переход} \\ \text{к следующему } (n+1)\text{-му измерению,} \end{cases}$$

где i — реализация случайного числа I на выборке $|e_1(x)|,..., |e_n(x)|$, $a = \dfrac{\ln\left(\dfrac{\beta_0}{1-\alpha_0}\right)}{W} < 0$, $b = \dfrac{\ln\left(\dfrac{1-\beta_0}{\alpha_0}\right)}{W}$, $c = \dfrac{\ln\left(\dfrac{1-P_0}{1-P_1}\right)}{W} > 0$, $W = \ln\dfrac{P_1(1-P_0)}{P_0(1-P_1)}$; $P_0 = \varepsilon(1-\xi_0)$, $0 < \xi_0 < 1$, $P_1 = \varepsilon(1+\xi_1)$, $0 < \xi_1 < \dfrac{1-\varepsilon}{\varepsilon}$; α_0 — ограничение на вероятность ошибки 1-го рода для гипотезы $H_0^*: P \le P_0$; β_0 — ограничение на вероятность ошибки 2-го рода для гипотезы $H_1^*: P \ge P_1$.

Тройка параметров (a, b, c) образует последовательный план контроля, который однозначно определяет оперативную характеристику $L(P/a, b, c)$. Ее значения представляют вероятность принять гипотезу H_0 как функцию аргумента P.

Оперативная характеристика является полной характеристикой эффективности плана (a, b, c) и имеет следующий вид:

$$L(P/a,b,c) = \begin{cases} \dfrac{\left(\dfrac{\alpha_0}{1-\beta_0}\right)^{\Psi^{-1}(P)} - 1}{\left[\dfrac{\alpha_0\beta_0}{(1-\alpha_0)(1-\beta_0)}\right]^{\Psi^{-1}(P)} - 1}, & \text{если } P \ne c; \\[2ex] \dfrac{\ln\dfrac{\alpha_0}{1-\beta_0}}{\ln\dfrac{\alpha_0\beta_0}{(1-\alpha_0)(1-\beta_0)}}, & \text{если } P = c, \end{cases} \qquad (2)$$

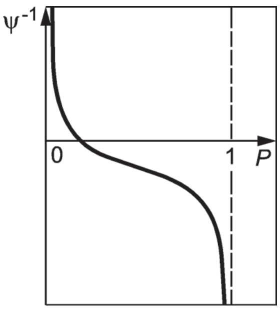

Рис. 1. График функции $\psi^{-1}(P)$

где $\Psi^{-1}(P)=\begin{cases}\infty, \text{ если } P=0;\\ -\infty, \text{ если } P=1,\\ \text{монотонно убывает на интервале } [0,1].\end{cases}$

График функции $\Psi^{-1}(P)$ показан на рис. 1. Такие свойства функции $\Psi^{-1}(P)$ обусловливают следующие особенности оперативной характеристики:

$$L(P/a,b,c)=\begin{cases}1, \text{ если } P=0;\\ 0, \text{ если } P=1,\\ \text{монотонно убывает на интервале } [0,1].\end{cases} \quad (3)$$

При P = 0 производная оперативной характеристики равна нулю. На рис. 2 приведен типичный вид оперативной характеристики, построенной по пяти характерным точкам аргумента P: 0, P_0, ε, P_1, 1. На самом графике показаны значения оперативной характеристики, соответствующие этим точкам. Значения характеристики в нуле и единице являются следствием ее свойств; в точках P_0 и P_1 — ограничениями на вероятности: ошибки 1-го рода α_0 и ошибки 2-го рода β_0.

При $P = c$ расчетное значение определяется по формуле (2).

Пунктирными кривыми показаны зависимости вероятностей ошибок 1-го и 2-го рода от аргумента P:

$$\alpha\left(P/H_0^*\right)\le\alpha_0 \ll 1,$$

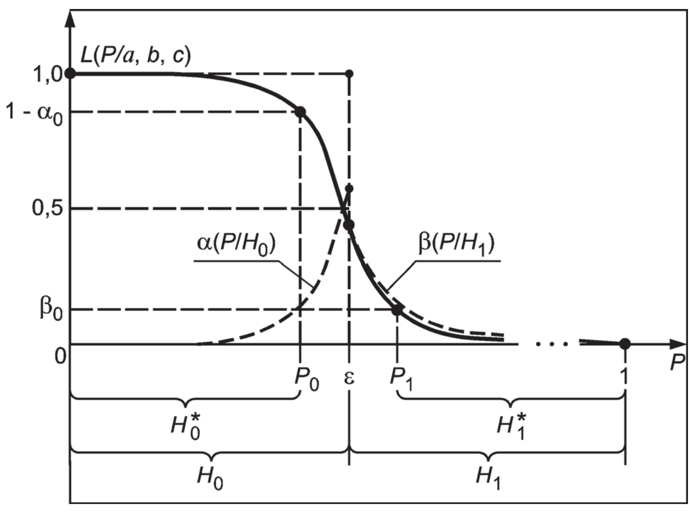

Рис. 2. График функции $L(P/a, b, c)$

$$\beta\left(P/H_1^*\right)\le\beta_0 \ll 1.$$

Введение гипотез H_0^* и H_1^* — вынужденная мера вследствие того, что, как видно из графика, в точке ε, являющейся разделяющей границей альтернативных гипотез H_0 и H_1, и в малой ее окрестности сумма вероятностей $\alpha + \beta$ равна единице или близка к ней, и потому невозможно одновременно ограничить их малыми пределами. Гипотеза H_0^* является наиболее предпочтительной частью гипотезы H_0^*, а гипотеза H_1^* — наименее предпочтительной, и потому оправданы малые ограничения вероятности ошибок 1-го и 2-го рода.

На рис. 3 дана графическая интерпретация решающей функции. По горизонтальной оси откладывается количество реализовывавшихся многократных измерений, по вертикальной — количество отрицательных событий. Траектория *1* соответствует случаю, когда отрицательные события отсутствуют; траектория *2* — когда реализуются только отрицательные события; траектория *3* выводит на браковочную границу и принимается гипотеза H_1; траектория *4* выводит на приемочную границу и принимается гипотеза H_0.

В [2] доказано, что случайная последовательная выборка с вероятностью, равной единице, завершается принятием решения в пользу хотя бы одной из гипотез H_0, H_1 за ограниченное число шагов ($n \le N_0$).

Значения n, при которых принимаются решения в пользу гипотез H_0 и H_1, являются случайными, и потому N — случайная величина. Ее математическое ожидание определяется выражениями

$$m(P)=\begin{cases}\dfrac{b-(b-a)L(P/a,b,c)}{P-c} \text{ при } P\ne c;\\ \dfrac{ab}{c(c-1)} \text{ при } P=c.\end{cases}$$

С учетом свойств оперативной характеристики (3) можно выделить следующие три характерные точки:

$$m(P)=\begin{cases}-a/c, \text{ если } P=0;\\ \dfrac{ab}{c(c-1)}, \text{ если } P=c;\\ \dfrac{b}{1-c}, \text{ если } P=1.\end{cases}$$

причем $\arg\max\limits_P m(P)=c$.

Если выдерживается отношение $\alpha_0 \approx \beta_0$, то из выражений (1) получаем $|a| \approx b$ и, следовательно, $-\frac{a}{c}<\frac{b}{c(1-c)}$. Тогда график функции $m(P)$ будет иметь вид, показанный на рис. 4.

Известно [1], что $\max\limits_P m(P)$ всех существующих случайных выборок удовлетворяет условию $\max\limits_P m(P) > m(c)$. Отсюда

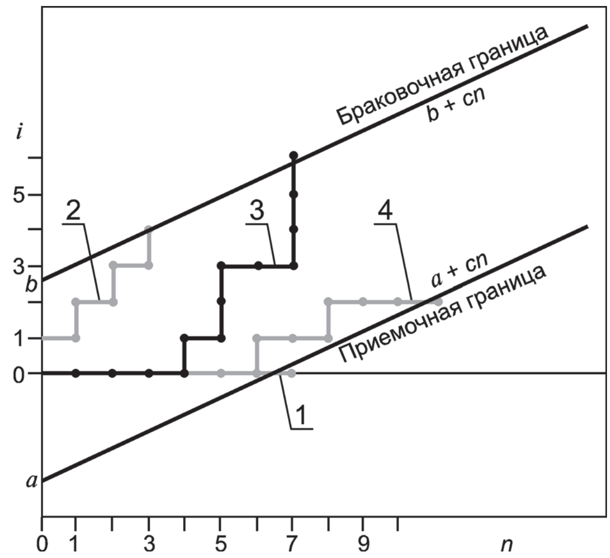

Рис. 3. Характерные траектории функции $i(n)$

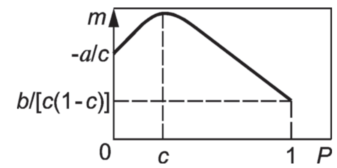

Рис. 4. График функции $m(P)$

следует, что последовательный план является оптимальным в том смысле, что при заданных ограничениях на вероятности ошибок 1-го и 2-го рода он обеспечивает минимум математического ожидания объема случайной последовательной выборки.

Используя уравнение приемочной границы $a + cn$, можно получить следующее полезное равенство:

$$n = n_0 + [i/c]^+ = n(i), \tag{4}$$

где $n_0 = [|a|/c]^+$, «+» — знак округления до ближайшего большего целого числа.

Выражение (4) позволяет определить объем случайной выборки в зависимости от количества отрицательных событий в этой выборке, приводящей к принятию гипотезы H_0.

Для браковочной границы аналогичное уравнение запишется в виде

$$n^*(i) = \left[\frac{1}{c}(i - b)\right]^+, \; i > [b]^+, \tag{5}$$

где $n^*(i)$ — зависимость объема выборки от количества отрицательных событий, значения которой определяют объем выборки, приводящей к принятию решения в пользу гипотезы H_1.

Рассмотрим следующий пример. Исходные данные: $\varepsilon = 0{,}1$; α_0, $\beta_0 = 0{,}01$; $P_0 = 0{,}08$; $P_1 = 0{,}2$. Определим параметры последовательного плана:

$$W = \ln\frac{P_1(1-P_0)}{P_0(1-P_1)} = \ln\frac{0{,}2 \cdot 0{,}92}{0{,}08 \cdot 0{,}8} = \ln 2{,}875 = 1{,}056;$$

$$a = \frac{\ln\left(\dfrac{\beta_0}{1-\alpha_0}\right)}{W} = \frac{\ln\left(\dfrac{0{,}01}{0{,}99}\right)}{1{,}05} = \frac{\ln 0{,}010}{1{,}056} = \frac{-4{,}595}{1{,}056} = -4{,}351;$$

$$b = \frac{\ln\left(\dfrac{1-\beta_0}{\alpha_0}\right)}{W} = \frac{\ln\left(\dfrac{0{,}99}{0{,}01}\right)}{1{,}05} = \frac{\ln 99}{1{,}056} = \frac{4{,}595}{1{,}056} = 4{,}351;$$

$$c = \frac{\ln\left(\dfrac{1-P_0}{1-P_1}\right)}{W} = \frac{\ln\left(\dfrac{0{,}92}{0{,}8}\right)}{1{,}05} = \frac{\ln 1{,}15}{1{,}056} = \frac{0{,}140}{1{,}056} = 0{,}132;$$

$$m(c) = \frac{ab}{c(c-1)} = \frac{4{,}351^2}{0{,}132 \cdot 0{,}868} = \frac{\ln 1{,}15}{1{,}056} = \frac{0{,}140}{1{,}056} = 165{,}23.$$

Результаты расчетов по формулам (4) и (5) представлены в таблице.

Результаты расчета значений функций $n(i)$ и $n^*(i)$

i	0	2	10	20	50
$n(i)$	39	54	116	193	424
$n^*(i)$	—	—	39	116	346
В работе [3]	462	604	2615	—	—

Данные таблицы свидетельствуют о том, что при достаточно жестких ограничениях вероятностей ошибок 1-го и 2-го рода (α_0, $\beta_0 = 0{,}01$) объемы многократных измерений вполне реализуемы.

Математическое ожидание $m(c) = 165{,}23$ также свидетельствует о предпочтительности использования именно случайной последовательной выборки.

Для того чтобы сравнить выгоды, которые присущи изложенному методу статистической оценки вероятности по отношению к классическому методу выбора объема эксперимента, обратимся к [3], где содержится табличная зависимость объема эксперимента от числа «неуспехов» (аналог дефектного изделия в партии), полученного по классическому методу при тех же исходных данных, что и в настоящем примере. Эта зависимость, помещенная в таблице в строке «В работе [3]», свидетельствует о том, что изложенный выше метод статистической оценки вероятности значительно эффективнее классического.

Литература

1. **Миттаг Х.-Й., Ринне Х.** Статистические методы обеспечения качества / Пер. с нем. Е. Кокот; под ред. Б. Н. Маркова. М.: Машиностроение, 1995.

2. **Вальд А.** Последовательный анализ. М.: Физматгиз, 1960.

3. **Кибзун А. И., Кан Ю. С.** Задачи стохастического программирования с вероятностными критериями. М.: Физматлит, 2009.

Дата принятия 02.04.2012 г.