

9. Fairgrieve S., Makuch J., Falke S. An Implementation of Sensor Web Standards // Proc. Int. Symp. Collaborative Technologies and Systems. N.Y.: IEEE, 2009. P. 64—75.

10. Kansal A. e. a. An Infrastructure for Shared Sensing // IEEE MultiMedia. 2007. N 14. P. 8—13.

11. Gorman B.L., Resseguie D.R., Tomkins-Tinch C. Information Sharing across Incompatible Sensor Systems // Proc. Int. Symp. Collaborative Technologies and Systems. N. Y.: IEEE, 2009. P. 448—454.

Дата принятия 18.07.2012 г.

621.39

Двустороннее помехоустойчивое стрип-преобразование и его корневые изображения

Л. А. МИРОНОВСКИЙ*, В. А. СЛАЕВ**

* С.-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения, С.-Петербург, Россия, e-mail: miron@aanet.ru

** Всероссийский научно-исследовательский институт метрологии им. Д. И. Менделеева, С.-Петербург, Россия, e-mail: V.A.Slaev@vniim.ru

Исследованы корневые изображения двустороннего помехоустойчивого стрип-преобразования, рассмотрена задача выбора преобразующих матриц, приведен пример для конкретного изображения.

Ключевые слова: стрип-преобразование изображений, оптимальные матрицы, корневые изображения двустороннего стрип-преобразования.

The root images of double-sided noise immune strip-transformation were studied. The problem of transforming matrices choice was considered and an example of particular image strip-transformation was given.

Key words: strip-transformation of images, optimal transforming matrices, root images of double-sided strip-transformation.

Многие задачи преобразования информации и анализа данных связаны с обработкой и передачей изображений. От их качества зависит точность получаемых результатов. В [1, 2] был описан метод хранения и помехоустойчивой передачи изображений, названный стрип-методом. В нем использованы матричные преобразования исходного изображения перед передачей, в процессе которых фрагменты изображения перемешиваются и накладываются друг на друга. Преобразованное изображение передается по каналу связи, где оно искажается импульсной помехой, действие которой может приводить, например, к полной потере отдельных фрагментов изображения. При получении сигнала на приемном конце выполняется обратное преобразование, в результате которого изображение восстанавливается. Если обеспечить равномерное распределение импульсной помехи по всей площади изображения (без изменения

ее энергии), то произойдет заметное ослабление ее амплитуды и будет достигнуто приемлемое качество всех участков восстановленного изображения.

Цель настоящей работы — рассмотрение вариантов двустороннего помехоустойчивого стрип-преобразования изображений, исследование его корневых изображений при различных ограничениях на преобразующие матрицы и иллюстрация полученных результатов на конкретных примерах.

Двустороннее стрип-преобразование. Схема передачи изображения с использованием двустороннего стрип-преобразования показана на рис. 1, где P , P' — исходное и восстановленное изображения. Первый этап стрип-преобразования состоит в разбиении исходного изображения P на N одинаковых по размеру прямоугольных фрагментов. Обозначим m , n число горизонтальных и вертикальных поло-

сок, на которые условно «разрезается» изображение, тогда $N = mn$. Оператор S осуществляет указанную фрагментацию изображения. На втором этапе выполняется линейное комбинирование фрагментов. При этом исходное изображение, разбитое на фрагменты, рассматривается как блочная матрица X размером $m \times n$. Для изометрического преобразования этой матрицы с целью «перемешивания» ее фрагментов умножим ее на матрицу B слева и на матрицу A справа (двустороннее матричное преобразование). Таким образом, двустороннее стрип-преобразование

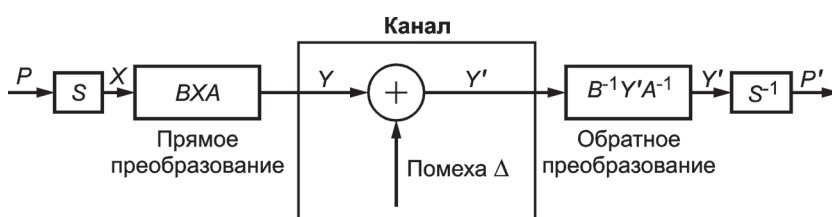


Рис. 1. Схема передачи изображений с использованием двустороннего стрип-преобразования

изображения на передающем конце канала связи описывается формулой

$$Y = BXA, \quad (1)$$

где B , A — невырожденные квадратные матрицы порядков m , n .

Изображение Y , полученное описанным способом, поступает в канал связи, где к нему добавляется импульсная помеха Δ (блочная матрица размером $m \times n$), в результате чего на выходе канала получаем изображение $Y' = Y + \Delta$. На приемном конце изображение Y' подвергается обратному двустороннему преобразованию для получения матрицы X' :

$$X' = B^{-1}Y'A^{-1}, \quad (2)$$

откуда

$$X' = B^{-1}(Y + \Delta)A^{-1} = B^{-1}YA^{-1} + B^{-1}\Delta A^{-1} = X + B^{-1}\Delta A^{-1}. \quad (3)$$

Результирующее изображение P' является итогом применения обратного стрип-оператора S^{-1} , осуществляющего дефрагментацию принятого изображения. В соответствии с (3) получатель увидит исходное изображение P с добавленной к нему в канале помехой, к которой применено обратное двустороннее стрип-преобразование.

В [1, 2] полагают матрицы A , B равными, ортогональными и симметричными, так как это упрощает вычисления и экономит память, если применять метод на практике. Тогда уравнения (1), (3) принимают вид

$$Y = AXA; \quad P' = P + \Delta\Delta. \quad (4)$$

В этом случае обратное стрип-преобразование совпадает с прямым и исчезает необходимость отдельно хранить или вычислять обратную матрицу. Помеха на выходе системы будет выражаться как $\Delta' = \Delta\Delta$. В настоящей работе все три упомянутых ограничения — равенство матриц A , B , их симметричность и ортогональность — снимаются. Это заметно расширяет класс преобразований и позволяет улучшить характеристики помехоустойчивости.

Математический формализм. В равенствах (1) — (4) выполняется умножение обычных числовых матриц A , B на блочные матрицы X , Y , элементами которых являются фрагменты изображений. При этом соблюдаются следующие правила:

сложение блоков (фрагментов). Отдельные блоки матриц изображений получаются суммированием соответствующих элементов блоков. Эта операция аналогична сложению двух матриц одинакового размера;

умножение фрагмента на число — умножение каждого пиксела (значения яркости) фрагмента на число, при этом изменяется яркость фрагмента в целом. Операция аналогична умножению матрицы на число;

умножение блочной матрицы на числовую аналогично обычному перемножению числовых матриц по правилу «строка на столбец» с учетом первых двух операций.

Перечисленные правила относятся к случаю черно-белых изображений. Технически их представляют в виде матрицы, которая состоит из отдельных пикселов. Именно эта матрица и подвергается фрагментации при стрип-преобра-

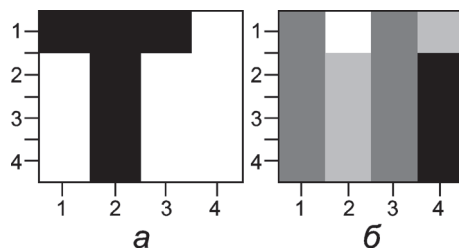


Рис. 2. Исходное (а) и преобразованное (б) изображения буквы «Т»

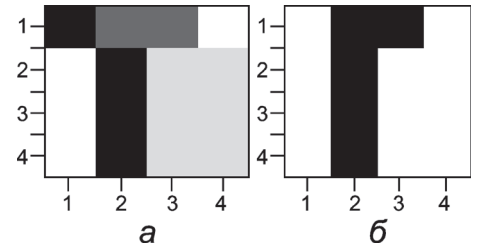


Рис. 3. Изображение, полученное с применением стрип-преобразования (а) и без него (б)

зовании. Для цветных изображений ситуация несколько усложняется. Один из стандартных способов представления цветных изображений — использование трехслойной матрицы RGB. В этом случае стрип-преобразованию подвергается отдельно каждый из трех слоев матрицы изображения.

Выбор матриц преобразования. В результате разбиения исходного изображения на фрагменты получается блочная матрица, содержащая $m \times n$ блоков. Размер фрагмента изображения выбирают, исходя из ожидаемых размеров искажаемого участка изображения. Для максимального ослабления амплитуды импульсной помехи необходимо добиться ее равномерного распределения по изображению в результате применения обратного преобразования на приемном конце канала связи. Это позволит восстановить информацию об искаженных или потерянных фрагментах. Возникает задача определения вида матриц A , B , которые обеспечат минимизацию амплитуды помехи в восстановленном изображении. Уровень помехи Δ' в восстановленном изображении определяется формулой (3). Если матрицы A , B ортогональны, то справедливо равенство

$$\Delta' = B^T \Delta A^T. \quad (5)$$

Предположим, что помеха, действующая в канале связи, искажает только один фрагмент изображения (однократная импульсная помеха). Это означает, что только один из элементов блочной матрицы Δ в (5) может быть отличным от нуля. При единичной амплитуде помехи Δ амплитуда помехи Δ' в восстановленном сигнале будет определяться произведением $a_m b_m$, где a_m , b_m — наибольшие по модулю элементы матриц A , B .

Поскольку преследуемая цель — максимально ослабить амплитуду помехи, возникает задача поиска в классе ортогональных матриц заданного размера таких матриц A , B , у которых наибольший по модулю элемент минимален.

Хорошо известное решение этой задачи относится к случаям, когда размер матриц кратен четырем — это нормированные матрицы Адамара. Решение для четных размеров, не кратных четырем, дают С-матрицы (conference-matrices) с нулевой диагональю и остальными элементами, равными ± 1 . Например, нормированная С-матрица шестого порядка имеет вид

$$C_6 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Матрицы Адамара идеально равномерно распределяют однократную импульсную помеху по всей площади изображения, уменьшая ее амплитуду в $\sqrt{mn}$ раз. Лишь немногим уступают им С-матрицы, обеспечивающие ослабление помехи в $\sqrt{mn} - 1$ раз.

Для матриц нечетных размеров общее решение задачи поиска ортогональных матриц с минимальным по модулю максимальным элементом неизвестно. К настоящему времени оптимальные в указанном смысле ортогональные матрицы найдены только для $n = 3; 5; 7; 9; 11$ [2]. В частности, для случаев $n = 3$ и 5 оптимальные матрицы ортогональны и симметричны, их максимальные элементы равны $2/3$ и $6/11$, соответственно:

$$\frac{1}{6} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}; \frac{1}{11} \begin{bmatrix} -2 & 3 & 6 & 6 & 6 \\ 3 & 6 & -6 & 6 & -2 \\ 6 & -6 & -3 & 2 & 6 \\ 6 & 6 & 2 & -6 & 3 \\ 6 & -2 & 6 & 3 & -6 \end{bmatrix}$$

Поясним принцип двустороннего стрип-преобразования изображений на простом примере.

Пример 1. Возьмем в качестве исходного P изображение буквы «Т» (рис. 2, а). Проведем двустороннее матричное преобразование при $m = n = 4$. Для этого разобьем изображение на четыре части по вертикали и горизонтали. Полученную блочную матрицу X подвергнем двустороннему стрип-преобразованию с помощью матрицы Адамара четвертого порядка, приняв $A = B$:

$$Y = AXA/4; A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Преобразованное изображение Y представлено на рис. 2, б. Каждый из 16 фрагментов несет информацию обо всех фрагментах исходного изображения. Пусть при передаче пропал первый фрагмент преобразованного изображения, т. е. вместо него получен нулевой сигнал. При восстановлении изображения по формуле $X' = AY'A/4$ помеха равномерно распределилась по всему рисунку, и его качество несколько ухудшилось (рис. 3, а). На рис. 3, б показано, как выглядело бы изображение на приемном конце без применения стрип-метода при аналогичной помехе (вместо буквы «Т» пользователь получил бы букву «Г»).

Корневые изображения двустороннего стрип-преобразования. Пусть исходное изображение X разбито на $m \times n$ одинаковых участков. Выполним его двустороннее стрип-преобразование в соответствии с формулой

$$Y = BXA, \quad (6)$$

где B, A — невырожденные квадратные матрицы порядков m, n .

Поставим задачу отыскать изображения, инвариантные к преобразованию (6), т. е. переводимые им в то же изображение (с точностью до постоянного множителя):

$$BXA = \lambda X. \quad (7)$$

Такие изображения будем называть собственными или корневыми изображениями преобразования (6), а число λ — соответствующим корневым числом.

Отыскание корневых изображений для заданных матриц A, B является важной задачей [5]. Если помеха в канале связи совпадает с корневым изображением используемого преобразования, то при обратном преобразовании она останется неизменной, и эффекта «размазывания» помехи по изображению добиться не удастся. Если же с корневым совпадает исходное изображение, то при его передаче не будет достигнут эффект скрытности, который может быть полезен, например, в криптографии. При отыскании корневых изображений можно считать, что элементами матрицы X служат не фрагменты исходного изображения, а вещественные числа. Это упрощает исследование и приводит к следующей задаче, напоминающей обобщенную проблему собственных значений.

Задача о корневых матрицах. Для заданной пары невырожденных вещественных матриц A, B размерами $n \times n, m \times m$ найти все вещественные $m \times n$ матрицы X и числа λ , удовлетворяющие соотношению (7).

В [1] было получено решение поставленной задачи для частного случая, когда преобразование (6) имеет вид

$$Y = AXA, \quad (8)$$

где матрица A ортогональна и симметрична.

Было показано, что при сделанных ограничениях корневое число λ может принимать только значения ± 1 , поэтому достаточно рассмотреть два случая, вытекающих из (7) при $A = B$ и $\lambda = \pm 1$ [1]:

$$AXA = X, \quad AXA = -X,$$

когда множество всех корневых матриц описывается следующими теоремами.

Теорема 1. Пусть A — ортогональная симметричная матрица размером $n \times n$, k собственных чисел которой равны $+1$, и H — ортонормированная матрица ее собственных векторов. Тогда общее решение матричного уравнения $AXA = X$ содержит $k^2 + (n - k)^2$ произвольных постоянных и имеет вид

$$X = H\tilde{X}H^T; \quad \tilde{X} = \begin{bmatrix} C_1 & 0 \\ 0 & C_2 \end{bmatrix}, \quad (9)$$

где C_1, C_2 — произвольные квадратные матрицы размера $k \times k, (n - k) \times (n - k)$, соответственно.

Формула (9) описывает множество всех корневых матриц X , отвечающих корневному числу $\lambda = +1$.

Теорема 2. Пусть A — ортогональная симметричная матрица размером $n \times n$, k собственных чисел которой равны $+1$, и H — ортонормированная матрица ее собственных векторов. Тогда общее решение матричного уравнения $AXA = -X$ содержит $2k(n - k)$ произвольных постоянных и имеет вид

$$X = H\tilde{X}H^T; \quad \tilde{X} = \begin{bmatrix} 0 & C_1 \\ C_2 & 0 \end{bmatrix}. \quad (10)$$

Формула (10) описывает множество всех корневых матриц X , отвечающих корневому числу $\lambda = -1$.

Таким образом, общее количество M независимых корневых изображений для данной матрицы A определяется как

$$M = k^2 + (n - k)^2 + 2k(n - k) = n^2.$$

Следовательно, двустороннее стрип-преобразование (8) с симметричной ортогональной матрицей A обладает большим набором корневых изображений. Чтобы уменьшить мощность множества корневых изображений, необходимо отказаться от условия равенства матриц A, B , а также снять ограничения на их симметричность и ортогональность.

Отказ от условия равенства матриц A, B . Пусть A, B — симметричные ортогональные матрицы порядков n и m , соответственно. В этом случае задача поиска корневого изображения преобразования (6) сводится к решению уравнения Сильвестра типа

$$XA_1 = BX, \quad (11)$$

где X — матрица размером $m \times n$, $A_1 = \lambda A^{-1}$.

Это однородное уравнение Сильвестра, известен следующий результат его решения [3, 4].

Т е о р е м а 3. Если матрицы A_1, B не имеют общих собственных чисел (т. е. характеристические полиномы $P_{A_1} = |\mu I - A_1|$ и $P_B = |\mu I - B|$ взаимно простые), то (11) имеет только тривиальное нулевое решение $X = 0$.

Из этой теоремы вытекает ряд полезных практических выводов. Во-первых, имеется простой алгебраический критерий для проверки наличия корневых изображений у заданной пары матриц A, B . Он сводится к вычислению результата $R(P_{A_1}, P_B)$ их характеристических полиномов, указанных выше: если результат не равен нулю, то корневые изображения отсутствуют.

Во-вторых, поскольку матрицы A, B ортогональны и симметричны, то у них есть общие собственные числа вида ± 1 . Следовательно, у таких матриц корневые изображения всегда существуют, т. е. найдутся помехи, которые не будут ослабляться стрип-преобразованием. Это означает, что требование простоты технической реализации кодирования и декодирования изображения вступает в противоречие с требованием эффективности и качества повышения помехоустойчивости.

В-третьих, становится ясным преимущество использования преобразования (6) по сравнению с упрощенной версией $Y = AXA$ рассмотренной в [1].

Пример 2. Рассмотрим случай $m = 4, n = 6$, когда исходное изображение разбивается на 6 частей по вертикали и на 4 по горизонтали, т. е. разрезается на 24 малых прямоугольника (матрица X будет иметь размер 4×6).

Выберем матрицы преобразования

$$A = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix};$$

$$B = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Здесь A — нормированная С-матрица шестого порядка; B — нормированная матрица Адамара четвертого порядка. Обе матрицы симметричны и ортогональны, поэтому у них должны быть корневые изображения. Найдем их.

В данном случае матричное равенство $BXA - X = 0$ представляет 24 уравнения с 24 неизвестными $x_1, x_2, \dots, x_{24}$ — элементами матрицы X . Ранг матрицы этой системы равен 12, следовательно, общее решение содержит 12 произвольных параметров. Полагая, например, все элементы x_i с нечетными индексами равными единице, получаем следующую матрицу корневого изображения ранга 1:

$$X = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & \sqrt{5} & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & \sqrt{5} & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & \sqrt{5} & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & \sqrt{5} & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Соответствующее изображение показано на рис. 4, а. Другой вариант корневого изображения приведен на рис. 4, б, он отвечает матрице

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -0,618 & 0 & 0,618 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0,618 & 0 & -0,618 & 1 \end{bmatrix}$$

и также удовлетворяет равенству $BXA = X$.

Пример 3. Чтобы повысить помехоустойчивость и избавиться от корневых изображений, возьмем несимметричный вариант матрицы B (матрицу A оставим прежней)

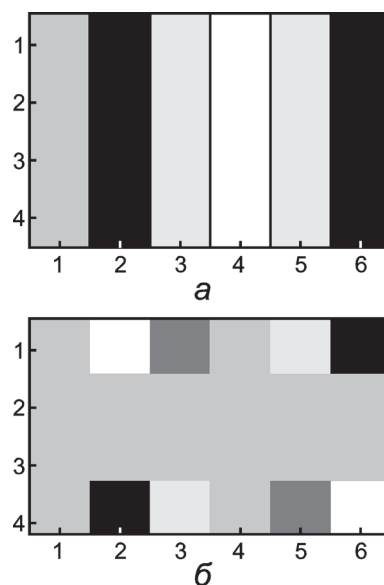


Рис. 4. Два варианта корневых изображений для примера 2

$$B = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Выписывая матричное уравнение $BXA - X = 0$, убеждаемся, что теперь матрица этой системы невырождена (ее ранг равен 24) и, следовательно, система имеет только нулевое решение, а корневые изображения отсутствуют. Таким образом, показана возможность полного устранения корневых изображений при использовании стрип-преобразования с ортогональными матрицами A, B .

Отказ от условий симметричности и ортогональности матриц A, B . В случае произвольных невырожденных матриц A, B вопрос о существовании корневых изображений сводится к анализу разрешимости линейной системы уравнений (7) $BXA = \lambda X$ при каком-либо вещественном числе λ . Перепишем эту систему в эквивалентном виде

$$\bar{A} = \lambda \bar{X}, \quad (12)$$

где $\bar{A}$ — квадратная матрица порядка mn ; $\bar{X}$ — вектор с mn компонентами, полученный в результате «вытягивания» в столбец матрицы X .

Система (12) будет иметь нетривиальное решение в том и только том случае, если найдется вещественное число λ , при котором матрица $\bar{A} - \lambda I$ вырождена, что и представляет собой критерий существования корневого изображения (I — единичная матрица).

В результате, для ответа на вопрос о наличии корневого изображения у заданной пары матриц A, B надо выписать характеристический полином матрицы $\bar{A}$ из (12) и проверить, есть ли у него вещественные корни. Каждому такому корню λ_i будет отвечать корневое изображение X_i , которое можно найти, решив (12) при $\lambda = \lambda_i$.

Пример 4. Пусть $m = n = 2$, т. е. исходное изображение разбито на 4 части. Выполним его стрип-преобразование по формуле $Y = BXA$, где матрицы A, B неортогональны, не-симметричны и имеют вид

$$A = \begin{bmatrix} -11 & -30 \\ 6 & 16 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -22 & -50 \\ 10 & 23 \end{bmatrix}.$$

Для проверки существования корневых изображений выписываем матричное равенство (7):

$$\begin{bmatrix} -22 & -50 \\ 10 & 23 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & x_3 \\ x_2 & x_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -11 & -50 \\ 6 & 16 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x_1 & x_3 \\ x_2 & x_4 \end{bmatrix},$$

которому соответствует однородная система уравнений (12):

$$242x_1 + 550x_2 - 132x_3 - 300x_4 = \lambda x_1;$$

$$-110x_1 - 253x_2 + 60x_3 + 138x_4 = \lambda x_2;$$

$$660x_1 + 1500x_2 - 352x_3 - 800x_4 = \lambda x_3;$$

$$-300x_1 - 690x_2 + 160x_3 + 368x_4 = \lambda x_4.$$

Она будет иметь ненулевое решение, если определитель системы равен нулю: $\det(\bar{A} - \lambda I) = 0$, где

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 242 & 550 & -132 & -300 \\ -110 & -253 & 60 & 138 \\ 660 & 1500 & -352 & -800 \\ -300 & -690 & 160 & 368 \end{bmatrix}.$$

Раскрывая определитель, получаем уравнение для λ :

$$\lambda^4 - 5\lambda^3 - 98\lambda^2 + 120\lambda + 576 = (\lambda - 3)(\lambda + 8)(\lambda - 12)(\lambda + 2).$$

Оно имеет 4 вещественных корня, которым отвечают 4 матрицы корневых изображений

$$X_1 = \begin{bmatrix} -5 & -25/2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}; \quad X_2 = \begin{bmatrix} -5 & -10 \\ 2 & 4 \end{bmatrix};$$

$$X_3 = \begin{bmatrix} -4 & -10 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}; \quad X_4 = \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Заключение. В результате анализа различных вариантов двустороннего стрип-преобразования исследован вопрос о существовании изображений и помех, инвариантных по отношению к указанному преобразованию, при различных ограничениях на преобразующие матрицы. Описана процедура отыскания корневых изображений, проиллюстрированная конкретными примерами.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 11-08-00240).

Литература

1. **Мироновский Л. А., Слаев В. А.** Стрип-метод помехоустойчивого преобразования изображений. Измерительная техника. 2006. № 8. С. 6—12; **Mironovskii L. A., Slaev V. A.** The strip method of noise-immune image transformation // Measurement Techniques. 2006. V. 49. N 8. P. 745—754.
2. **Мироновский Л. А., Слаев В. А.** Стрип-метод преобразования изображений и сигналов. Монография. СПб.: Политехника, 2006.
3. **Голуб Дж., Ч. Ван Лоун.** Матричные вычисления. М.: Мир, 1999.
4. **Гантмахер Ф. Р.** Теория матриц. М.: Физматлит, 2004.
5. **Mironovsky L. A., Slaev V. A.** Root images of noise immune strip-transformation // Proc. Intern. Workshop on Phys. and Math. IWPM 2011. Hangzhou, (China), 2011.

Дата принятия 19.06.2012 г.