

Моделирование, восстановление и картирование геополей с учётом и без шумов измерений. Ч. 2. Методы вариационного моделирования, интерполяции и интеллектуальных вычислений

А. М. ПАШАЕВ, Р. А. САДЫХОВ, С. Б. ГАБИБУЛЛАЕВ

Национальная академия авиации Азербайджана,
Баку, Азербайджан, e-mail: sadixov@mail.ru

Рассмотрены различные методы интерполяции, сглаживания, нейросетевого обучения. Выявлено, что ни один из них не является универсальным и абсолютно надёжным. Рекомендована гибридизация рассмотренных методов. Приведены результаты нечёткого нейросетевого моделирования при случайном расположении обучающих точек с неизвестным видом выборочного распределения.

Ключевые слова: методы идентификации и обработки зашумлённой измерительной информации, нечёткое нейросетевое моделирование.

Various methods for interpolation, smoothing, neural network education are considered and none of them seems to be universal and absolutely reliable. An effective solution is recommended, that is methods hybridization. The results of the fuzzy neural network simulation are given, that have accidental location of training points and the type of location distribution being unknown.

Key words: methods of identification and processing of noisy measurement information, fuzzy neural network simulation.

Различные методы моделирования, восстановления и картирования геополей с учётом и без шумов измерений аппроксимирующего, сглаживающего и фильтрующего типов основаны на вариационном подходе. В каждом из методов минимизируется какой-либо функционал качества, отражающий постановку задачи: уменьшение ошибки на некотором классе функций, обеспечение гладкости решения, эффективность фильтрации случайных компонент и др. [1—3]. Вариационное моделирование относится к дедуктивному решению задач восстановления, которые поддаются формализованному описанию и могут быть доведены до конечного программного продукта. В этом случае можно использовать аппарат математической физики и вычислительной математики, а также метод конечных элементов (МКЭ) и метод граничных интегральных уравнений (ГИУ) [2, 4—6].

Метод конечных элементов. Данный метод относится к классу вариационно-сеточных методов. Его отличает использование финитных базисных функций, заданных на треугольных или четырёхугольных сетках, что приводит к разреженности матрицы, полученной при решении системы линейных алгебраических уравнений. Трудности возникают при аппроксимации краевых условий общего вида (в частности, нелокальных) в областях произвольной формы. Проблемы медленной сходимости можно решить, если в качестве конечных элементов использовать вейвлеты [7].

Рассмотрим применение МКЭ в спутниковой геодезии на примере моделирования высоты геоида [8]. Высота геоида h является поверхностью из конечных элементов и задаётся

базовыми функциями в виде полиномов:

$$h(\mathbf{p}^*) = \begin{cases} h(\mathbf{p}_k) \sum_{r=0}^m \sum_{s=0}^{m-r} c_{rsk} x^r y^s, & k = \overline{1, l}, \quad r = \overline{0, m}, \quad s = \overline{0, m}; \\ V_i(\mathbf{p}_n, \mathbf{p}_q), & 1 \leq n, q \leq l; \quad r + s \leq m, \end{cases} \quad (1)$$

где $\mathbf{p}^*$ — полный вектор параметров, состоящий из всех наборов коэффициентов c_{rsk} на l ячейках; V_i , $i = 0, 1, 2$ — условия непрерывности по функции, а также её первой и второй производным вдоль общих границ соседних ячеек; для каждой пары соседних ячеек n, q устанавливается один набор условий непрерывности разного типа V_0, V_1 или V_2 .

Полиномы определяются на элементарных площадках квадратной сетки с нерегулярными положениями узловых точек, при этом размеры ячеек, их форма и качество аппроксимации выбирают произвольно. Для получения высоты локального геоида для точки с координатами (x, y) проводят идентификацию соответствующей k -й ячейки по вектору положения узловых точек. После этого высоту h оценивают из $h(\mathbf{p}^*)$ по полиному с коэффициентами c_{rsk} . Условия непрерывности появляются как дополнительные уравнения, относящиеся к полиномиальным наборам коэффициентов c_{rsn}, c_{rsq} каждой пары соседних ячеек n, q . Число и содержание этих условных уравнений зависят от степени полинома m и от уравнений непрерывности. При исследованиях по преобразованию GPS высот полином (1) приводит к положительным результатам при условии непрерывности функции и $m=2$ для малых ячеек, имеющих размер 10—40 км, и $m=3$ — для больших ячеек.

Интерполяция полиномами. Такая интерполяция имеет вид

$$H_m = h(x, y) = \sum_{r,s} c_{rs} x^r y^s; r+s \leq m, \quad (2)$$

где $r=0, m, s=0, m-r$ — показатели степени; c_{rs} — коэффициенты, полученные методом наименьших квадратов (МНК); m — степень полинома.

Таким образом, уравнение (2) является первым уравнением в системе (1) для каждой k -й ячейки. Рассмотрим уравнение регрессии второго порядка (частный случай (2) при $m=2$):

$$H_2 = h(x, y) = c_{00} + c_{10}x + c_{01}y + c_{11}xy + c_{20}x^2 + c_{02}y^2. \quad (3)$$

Уравнение определения выходной координаты h имеет вид

$$Z_h = c_{00} + c_{10}x + c_{01}y + c_{11}xy + c_{20}x^2 + c_{02}y^2 + \delta_h,$$

где δ_h — погрешность измерений выходной координаты h .

Тогда модель экспериментальных данных представим в матричном виде:

$$\mathbf{Z}_h = \mathbf{X}\boldsymbol{\theta} + \delta_h,$$

где $\mathbf{Z}_h = \|Z_{1h}, Z_{2h}, \dots, Z_{nh}\|$ — вектор измерений h ;

$\boldsymbol{\theta} = \|c_{00}, c_{10}, c_{01}, c_{11}, c_{20}, c_{02}\|^T$ — вектор искомых коэффициентов; $\mathbf{X}$ — структурная матрица; n — количество измерений.

Для идентификации (оценки) коэффициентов полинома (3) используют МНК следующего вида:

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} (\mathbf{X}^T \mathbf{Z}_h); D_{\hat{\boldsymbol{\theta}}} = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \delta, \quad (4)$$

где $D_{\hat{\boldsymbol{\theta}}}$ — дисперсионная матрица погрешностей оценок.

На практике интерполяцию полиномами по всей площади (глобальный интерполятор) применяют для описания относительно простых явлений.

Кусочно-полиномиальное сглаживание. Рассмотрим уравнение (3) и условие V_0 из (1) для n -й ячейки. Вначале проведём идентификацию (оценку) коэффициентов

$\hat{\boldsymbol{\theta}} = \|\hat{c}_{00}, \hat{c}_{10}, \hat{c}_{01}, \hat{c}_{11}, \hat{c}_{20}, \hat{c}_{02}\|$ полинома (3) по формуле (4). Затем для оценки неизвестных коэффициентов

$\tilde{\boldsymbol{\theta}} = \|\tilde{c}_{00}, \tilde{c}_{10}, \tilde{c}_{01}, \tilde{c}_{11}, \tilde{c}_{20}, \tilde{c}_{02}\|$ модели сформулируем задачи на условный минимум:

$$(Z_h - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\theta}})^T \delta^2 I (Z_h - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\theta}}); \quad (5)$$

$$\mathbf{A}\hat{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{V}_0, \quad (6)$$

где I — единичная матрица; $\mathbf{V}_0 = \|Z_{1h}, Z_{2h}, \dots, Z_{nh}\|$ — вектор измеренных значений высоты геоида h ;

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & \hat{x}_1 & \hat{y}_1 & \hat{x}_1 \hat{y}_1 & \hat{x}_1^2 & \hat{y}_1^2 \\ 1 & \hat{x}_2 & \hat{y}_2 & \hat{x}_2 \hat{y}_2 & \hat{x}_2^2 & \hat{y}_2^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \hat{x}_{n_i} & \hat{y}_{n_i} & \hat{x}_{n_i} \hat{y}_{n_i} & \hat{x}_{n_i}^2 & \hat{y}_{n_i}^2 \end{bmatrix} \quad \text{— матрица связей;}$$

n_i — количество точек на i -й грани n -й ячейки, $i=1, 4$.

Используя метод неопределённых множителей Лагранжа, из (5), (6) получим оценки коэффициентов $\tilde{\boldsymbol{\theta}}$:

$$\tilde{\boldsymbol{\theta}} = \hat{\boldsymbol{\theta}}^T + (V_0^T - \hat{\boldsymbol{\theta}}^T \mathbf{A}^T) \left[\mathbf{A} (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{A}^T \right]^{-1} \mathbf{A} (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1};$$

$$D_{\tilde{\boldsymbol{\theta}}} = D_{\hat{\boldsymbol{\theta}}} - (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \left[\mathbf{A} (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{A}^T \right]^{-1} \mathbf{A} (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \delta^2.$$

Таким образом, проведена стыковка для всех l ячеек. Алгоритм с автоматической стыковкой обладает достаточными фильтрующими свойствами по отношению к высокочастотной помехе и тем аномалиям, период которых меньше размеров ячеек МКЭ. Метод приводит к положительным результатам, если значения функции в опорных точках содержат ощутимую погрешность $h(x, y) \approx \hat{h}_i$. В этом его главное достоинство.

Метод средневзвешенной интерполяции (МСИ). Искомое значение геополя, например высоту геоида, можно найти, применив МНК:

$$\sum_{r,s=1}^n D_{rs}(x, y) [h(x, y) - \hat{h}(x_r, y_s)]^2 \rightarrow \min,$$

где $\sum_{r,s=1}^n D_{rs}(x, y) = \left[(x - x_r)^2 + (y - y_s)^2 \right]^{d/2}$ — весовая функция; $d = 1, 2, 3$; x_r, y_s — координаты точек наблюдений; n — количество точек наблюдений;

$$h(x, y) = \left[\sum_{r,s=1}^n D_{rs}^{-1}(x, y) \right]^{-1} \sum_{r,s=1}^n D_{rs}(x, y) \hat{h}(x_r, y_s). \quad (7)$$

Метод ближайших точек. Такой метод — упрощённая разновидность МСИ. Согласно методу ближайших точек

$$h(x_i, y_j) = \left[\sum_1^n \hat{h}(x_r, y_s) D_{rs} \right] \left(\sum_1^n D_{rs}^{-1} \right)^{-1}, \text{ а исходные точки с ве-}$$

сом D_{rs}^{-1} нужно учитывать как обратно пропорциональные расстояниям. При $x_i = x_r, y_j = y_s$ интерполяционное значение совпадает с наблюдаемым, т. е. $\hat{h}(x_r, y_s) = h(x_i, y_j)$. Можно сконструировать вероятностную нейронную сеть (НС) для оценивания функции регрессии (7). Предложенная сеть не требует обучения по оптимальному подбору весов соединений, поскольку роль весов играют компоненты векторов наблюдений. Однако получаемые оценочные функции оказываются асимптотическими.

Метод ГИУ. Этот метод классической теории потенциала использует редукцию исходной краевой задачи к эквивалентной задаче в виде интегральных уравнений решений и его

производных на границе этой области. Дискретизацию и численное решение возникающих сингулярных ГИУ осуществляют с помощью специальных квадратурных формул или методом граничных элементов. Применение метода ГИУ снижает размерность решения задачи на единицу и позволяет строить алгоритмы, автоматически учитывающие как сложные граничные условия, так и гладкость входных данных и искомым функций, т. е. алгоритмы без насыщения. Метод даёт возможность восстановить значение, полученное при решении в любой заданной точке области с любой заданной точностью, а также расширяет класс кривых, описывающих границы геополей. Особенно эффективен метод ГИУ в многосвязных областях [9].

Метод ГИУ в моделировании многомерных задач двухфазной фильтрации. При схематизации процесса фильтрации по Бакли—Левретта, Рапопорта—Лиса и при полной смешимости жидкостей решения задач сведены к вопросу о движении изосат (изокон), описываемому ГИУ, когда переходная область аппроксимируется N зонами с осреднённой постоянной насыщенностью (концентрацией):

$$V(s) - a \int_{\Gamma} [V(s) - c^* V(\xi)] \frac{\partial}{\partial n} \ln R^{-1}(s, \xi) d\xi = K \frac{\partial \phi}{\partial n}, \quad (8)$$

где $\Gamma = \bigcup_{j=1}^N \gamma_j$ — изосата (изокон), т. е. положительно ориентированные замкнутые жордановы кривые, заданные в параметрическом виде $x = x(s)$, $y = y(s)$, $s \in [0, L]$; $L = \int ds$;

$V(s) = \bigcup_{j=1}^N V_j(s_j)$ — скорость движения изосат (изокон);

$s = \bigcup_{j=1}^N s_j$ — дуговая абсцисса γ_j ; ϕ — потенциал внешнего поля;

$R(s, \xi) = \left([x(s) - x(\xi)]^2 + [y(s) - y(\xi)]^2 \right)^{1/2}$; $s, \xi \in \Gamma$, n — внутренняя нормаль к контуру Γ .

Уравнение (8) распространено на неоднородные пласты при прогрессирующем обводнении. Эта модель инвариантна относительно систем заводнения (за-, при-, внутриконтурное) и технологических характеристик нефти c_{iH}^* . При этом

$a = (c_{iH}^* - c_B^*) / (2\pi c_B^2)$; $K = -c_{iH}^* m^{-1}$; m_0 — пористость пласта;

c_B^* — коэффициент подвижности воды;

$c^* = c_{jH}^* (c_{iH}^* - c_B^*) (c_{jH}^* - c_B^*)^{-1} c_{iH}^{-1}$, $j = \overline{1, N}$ — количество контуров.

Метод ГИУ при моделировании температурных полей в охлаждаемых лопатках газовых турбин. Расчёт температурных полей сопловых и рабочих лопаток с различным количеством и расположением охлаждаемых каналов, имеющих сложную многосвязную конфигурацию, сводится к решению ГИУ Фредгольма II рода с оператором логарифмического потенциала двойного слоя (ЛПДС):

$$\begin{aligned} \rho(s) - \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} [\rho(s) - \rho(\xi)] \frac{\partial}{\partial n} \ln R(s, \xi) d\xi = \\ = \frac{\alpha_j}{2\pi\lambda} \left(T_{\Gamma} - \int_{\Gamma} \rho(s) \ln R^{-1} ds \right), \end{aligned} \quad (9)$$

где $\rho = \bigcup_{i=0}^N \rho_i$ — плотность логарифмического потенциала про-

стого слоя (ЛППС), равномерно распределённого по γ_i ; N — количество охлаждаемых каналов; α_i — коэффициент теплоотдачи от лопатки к охлаждаемому воздуху; λ — коэффициент теплопроводности материала лопатки; T_{Γ} — температура на контуре $\Gamma = \bigcup_{i=0}^N \gamma_i$.

При определении оптимальных значений $T(x, y)$ следует решить обратную задачу теплопроводности. Для этого нужно найти сначала решение прямой задачи теплопроводности при граничных условиях II рода со стороны газа и граничных условий I рода со стороны охлаждающего воздуха, т. е.

$$T(x, y)|_{\gamma_i} = T_{i0}, \quad i = \overline{1, N},$$

где T_{i0} — известная оптимальная температура стенки лопатки.

Численные методы решения ГИУ. При сравнении МКЭ и методов, использующих механические квадратуры для решения ГИУ, предпочтение отдают последним, так как применение квадратурных формул увеличивает точность при меньшей дискретизации граничных поверхностей, а для точек внутри области все интегралы — регулярные, и потому квадратурные формулы имеют высший порядок точности независимо от положения дискретных точек. В этом заключается основное достоинство метода квадратур. Другое преимущество — простота и универсальность перехода к алгебраической системе. При численном решении ГИУ (8), (9) используют следующие двухпараметрические квадратные формулы для оператора ЛПДС в многосвязных областях $(L_{\tau, \varepsilon} f)(z)$ и для оператора ЛППС в многосвязных областях $(I_{\tau, \varepsilon} f)(z)$:

$$\begin{aligned} (L_{\tau, \varepsilon} f)(z) = \sum_{z_{k, e} \in \tau(z)} \left[\frac{f(z_{k, e+1}) + f(z_{k, e})}{2} - f(z) \right] \times \\ \times \frac{(y_{k, e+1} - y_{k, e})(x_{k, e} - x) - (x_{k, e+1} - x_{k, e})(y_{k, e} - y)}{|z - z_{k, e}|^2} + \pi f(z); \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} (I_{\tau, \varepsilon} f)(z) = \sum_{z_{k, e} \in \tau(z)} \frac{f(z_{k, e+1}) + f(z_{k, e})}{2} \times \\ \times \ln \frac{1}{|z - z_{k, e}|} |z_{k, e+1} - z_{k, e}|, \end{aligned} \quad (11)$$

где $z = x + iy$; $z_{k, e} \in \tau$; $z_{k, e} = x_{k, e} + iy_{k, e}$; $\tau(z) = \{z_{k, e} \mid |z_{k, e} - z| > \varepsilon\}$;

$\tau_k = \{z_{k, 1}, \dots, z_{k, n_k}\}$; $z_{k, 1} \leq z_{k, 2} \leq \dots \leq z_{k, n_k}$; $\|\tau\| = \max_{j \in \{1, n_k\}} |z_{k, j+1} - z_{k, j}|$.

Разработанные численные методы, эффективные с точки зрения реализации на компьютерах, базируются на сконструированных двухпараметрических квадратурных процессах (оценены их систематические погрешности). Их успешно применяют при расчётах многопластовых систем с автоматически изменяющейся связностью и при вычислениях теп-

ловой защиты многосвязных охлаждаемых элементов газовых турбин [9—13].

Развитие методов ГИУ. Комплексный метод ГИУ основан на использовании интегральной формулы Коши в обычном методе ГИУ, но область его применимости — лишь двухмерные задачи. Количество публикаций, посвящённых ГИУ и МГЭ, в 6 раз меньше, чем в областях МКЭ и в 2 раза, чем в методе конечных разностей, однако их число растёт. Этот рост связан как с расширением областей применения, так и с построением новых неклассических ГИУ без использования фундаментальных решений. Также разрабатываются новые подходы и методы: несингулярные, граничных узлов, бессеточные, мультиквадриковые, нейросетевые и т. д. [5, 10].

Вариационные методы в задачах восстановления (интерполяции) геополей. Рассмотрим выбор интерполирующей функции как решение дифференциального уравнения, описывающего процесс, сформировавший восстанавливаемую поверхность либо её геометрические свойства [14]. Пусть в замкнутой области Ω с границей $\partial\Omega$ восстанавливаемая функция должна проходить через точки

$$h(x_i, y_i) = \hat{h}_i; \quad i = \overline{1, n} \quad (12)$$

и удовлетворять экстремуму критерия качества (функционалу), который в достаточно общем виде может быть записан как

$$\int_{\Omega} F\left(x, y, h(x, y), \frac{\partial h(x, y)}{\partial x}, \frac{\partial h(x, y)}{\partial y}\right) d\Omega. \quad (13)$$

Соответствующее уравнение Эйлера—Остроградского, дающего экстремум функционала (13), имеет вид

$$\frac{\partial F}{\partial h} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial h_x} - \frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial F}{\partial h_y} = 0. \quad (14)$$

Для однозначности решения дифференциального уравнения (14) в частных производных второго порядка необходимо задать краевые условия

$$\left[p \frac{\partial h(x, y)}{\partial n} + qh(x, y) \right]_{\partial\Omega} = 0. \quad (15)$$

Аналогичным образом для общего критерия качества

$$\int_{\Omega} F\left(x, y, h(x, y), \frac{\partial h(x, y)}{\partial x}, \frac{\partial h(x, y)}{\partial y}, \frac{\partial^2 h(x, y)}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 h(x, y)}{\partial y^2}\right) d\Omega \quad (16)$$

можно получить уравнение, доставляющее экстремум функционалу (16)

$$\frac{\partial F}{\partial h} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial h_x} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial F}{\partial h_y} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial F}{\partial h_{xx}} + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \frac{\partial F}{\partial h_{xy}} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \frac{\partial F}{\partial h_{yy}} = 0. \quad (17)$$

Пусть критерий качества (13) выбран в виде

$$\begin{aligned} S_{\nabla}(h) &= \int_{\Omega} (\nabla h(x, y))^2 dx dy = \\ &= \int_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial h(x, y)}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial h(x, y)}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy = \min, \end{aligned} \quad (18)$$

где W_2^2 — класс функций, имеющих суммируемые с квадратом вторые производные.

Для (18) уравнение Эйлера—Остроградского (14) примет вид уравнения Лапласа:

$$\nabla^2 h(x, y) = \frac{\partial^2 h(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h(x, y)}{\partial y^2} = 0. \quad (19)$$

Уравнение (19) можно решить при выполнении условия (12). Границами считаются и внутренние точки области Ω , т. е. область Ω будет многосвязной. Задача интерполяции сведена к решению краевой задачи при нестандартно заданных граничных условиях [13].

Для функционала (16) критерий качества можно выбрать в виде

$$\begin{aligned} S_{\Delta}(h) &= \int_{\Omega} (\Delta h(x, y))^2 dx dy = \\ &= \int_{\Omega} \left[\frac{\partial^2 h(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h(x, y)}{\partial y^2} \right]^2 dx dy = \min_{W_2^2}. \end{aligned} \quad (20)$$

Тогда уравнение Эйлера—Остроградского (17) приводится к бигармоническому уравнению

$$\Delta^2 h(x, y) = \frac{\partial^4 h(x, y)}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 h(x, y)}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 h(x, y)}{\partial y^4} = 0. \quad (21)$$

Краевые условия (15) могут быть не только первого, второго или третьего рода, но также смешанными. Например, для уравнения Лапласа (15) на части границы задают граничные условия первого рода, а на другой — второго рода (задача Зарембы) или неклассические краевые задачи, в которых на части границы имеются одновременно граничные условия первого и второго рода, и требуется определить геополь на оставшейся части (задача Коши). Пусть для (18) известно следующее дополнительное условие (знание общего запаса месторождения):

$$\int_{\Omega} h(x, y) d\Omega = Q.$$

Тогда искомая функция $h(x, y)$ будет подчиняться уравнению Пуассона

$$\frac{\partial^2 h(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h(x, y)}{\partial y^2} = \frac{1}{2} \lambda,$$

где λ — множитель Лагранжа.

Если рассмотреть дополнительное условие $\int_{\Omega} h^2(x, y) d\Omega = Q$,

тогда получим однородное уравнение Гельмгольца

$$\frac{\partial^2 h(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h(x, y)}{\partial y^2} - \lambda h(x, y) = 0.$$

Таким образом, имеем классические и неклассические краевые задачи Дирихле, Неймана, Зарембы и Коши для уравнения Лапласа, Пуассона, Гельмгольца или бигармо-

нического уравнения, которые можно редуцировать методом ГИУ к решению интегральных уравнений Фредгольма I и II рода, или их систем с операторами ЛППС и ЛПДС. Для приближённого решения этих уравнений можно воспользоваться регуляризирующими методами [14] и приближением ЛППС и ЛПДС квадратурными формулами (10), (11).

Рассмотрим задачу восстановления $h(x, y)$ внутри области Ω и определения краевых условий на границе $d\Omega$, которые принесли бы экстремум функционалу (18). Краевая задача сводится к однородной задаче Неймана:

$$\Delta h(x, y) = 0; (\partial h(x, y)/\partial n)_{\partial\Omega} = 0. \quad (22)$$

Задача нахождения краевых условий в комбинации с би-гармоническим интерполирующим уравнением (21) при критерии качества (20) приводят к следующим краевым условиям:

$$[\Delta h(x, y)]_{\partial\Omega} = 0; \left[\frac{\partial}{\partial n} \Delta h(x, y) \right]_{\partial\Omega} = 0. \quad (23)$$

Отметим, что задача восстановления функции $h(x, y)$, удовлетворяющая условиям (12), (20), а на границе области $d\Omega$ — граничным условиям (23) — является решением следующих краевых задач:

$$\Delta^2 h(x, y) = 0, (x, y) \in \Omega;$$

$$h_i(x, y) = \hat{h}_i, (x, y) \in \Omega;$$

$$\left(\frac{\partial^2 h(x, y)}{\partial n} \right)_{\partial\Omega} = 0, (x, y) \in \partial\Omega.$$

Следовательно, сплайн-интерполяцию можно интерпретировать как частный случай более общего вариационного подхода. При проведении сравнительного анализа различных методов интерполяции (триангуляцией и сплайнами) с вариационным подходом используют метод ГИУ. В качестве критерия качества выбрали (18) и решили краевую задачу (22). Сопоставили эталонное распределение $\hat{h}(x, y)$ с восстановленным $h(x, y)$ и сделали вывод: восстановленное геополе оценено точнее и обладает оптимальным сглаживающим эффектом.

Восстановление изображения (поверхности) по градиентному полю. В этом алгоритме используются связи между точками поверхности $\Omega \subset R^2$ и восстанавливается потенциальная функция $h \in \Omega$, градиент которой наиболее близок заданному векторному полю градиентов V^* [15]. Для функционала $\int_{\Omega} F(\nabla h, V^*) dx dy = \min_h$ уравнения Эйлера—Остроградского (14) примут вид

$$2 \left(\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} - \frac{\partial V_x^*}{\partial x} \right) + 2 \left(\frac{\partial^2 h}{\partial y^2} - \frac{\partial V_y^*}{\partial y} \right) = 0,$$

т. е. необходимо решить краевую задачу Неймана для уравнения Пуассона

$$\Delta h = f^*; \quad (24)$$

$$h'|_{\partial\Omega} = f^{**}, \quad (25)$$

где $f^* = \text{div } V^*$; h' — производная функции h ; f^{**} — известная функция; $\partial\Omega$ — граница области Ω .

Решение краевой задачи Неймана определено с точностью до константы при выполнении условия $\int_{\partial\Omega} f^{**} ds = 0$. Дис-

кретизация уравнений (24), (25) приводит к системе линейных алгебраических уравнений, имеющей единственное решение. Несмотря на её большую размерность, получаемую разрежённую систему можно эффективно решить методом матричной прогонки, а уравнение Пуассона — МКЭ, при трансформации его в вариационную задачу (интерполяция конечного элемента):

$$\int_{\Omega} (h_x^2 + h_y^2 - 2hf^*) dx dy = \min_h.$$

Однако триангуляция Ω достаточно сложна.

Рассмотрим другую задачу: бесшовную реставрацию карты, состоящей из реставрируемых фрагментов. Необходимо решить задачу Дирихле для уравнений Пуассона

$$\Delta h = f^*; \quad (26)$$

$$h|_{\partial\Omega} = f^{**}, \quad (27)$$

где $f^* = \Delta g$, g — реставрируемая карта; f^{**} — очертания карты на границе $\partial\Omega^*$ реставрации, где $\partial\Omega^*$ граница области $\Omega^* \subseteq \Omega$.

Для решения задач (26), (27) можно применить какой-либо сетчатый метод: метод конечных разностей, МКЭ и т. п. Однако такие методы позволяют получить решение только в узлах сетки, а значительные вычислительные затраты приводят к использованию аппроксимаций низкого порядка. Альтернативными являются бессеточные методы. К ним относятся различные варианты метода взвешенных невязок, когда в качестве базисных функций применяют радиальные базисные функции (РБФ). Тогда решение задач (26), (27) можно свести к минимизации функционала

$$\sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial^2 h_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h_i}{\partial y^2} - f_i^* \right)^2 + \lambda \sum_{j=1}^K (h_j - f_j^{**})^2,$$

где h_i, f_i^* и h_j, f_j^{**} — известные функции точек $(x_i, y_i) \in \Omega$ и $(x_j, y_j) \in \partial\Omega^*$; N, K — количество внутренних и граничных контрольных точек; λ — штрафной множитель.

Применение РБФ позволяет исключить трудоёмкий процесс построения сетки и получить приближённое дифференцируемое решение в произвольных точках области. Недостаток метода — сложность определения параметров РБФ. Альтернативное применение уравнению Пуассона для обработки изображений предложено в [16], где для описания скалярного поля выбрано уравнение Пуассона, а векторного — уравнение Ляме. Такое представление позволило исходное изображение представить в виде поля особых точек

(предикатного поля) и остаточного поля. Алгоритм является быстрым, так как обрабатываются только особые точки, число которых составляет не более 5—25 % от общего количества пробных точек. Недостаток метода — сложность реализации процедуры построения кромки, т. е. объединение особых (характерных) точек в цепочки.

Восстановление характерных точек геополей. Характерными точками поверхности (изображения) являются те, по которым можно восстановить с некоторой точностью исходную поверхность, т. е.

$$h(x, y) = \hat{h}(x, y) \pm \varepsilon(x, y),$$

где $\hat{h}(x, y)$ — оценка истинной функции $h(x, y)$.

Эти параметры связаны соотношением

$$\hat{h}(x, y) = \int_{\Omega} h(x, y) G(x, y) dx dy + \varepsilon(x, y),$$

где $\varepsilon(x, y)$ — случайная составляющая, учитывающая помехи; $G(x, y)$ — определяет сглаживающие свойства поверхности и аппроксимируется плотностью сферического нормального распределения (гауссиан),

$$G(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}(x^2 + y^2)\right];$$

$h(x, y)$ — реальная поверхность произвольного характера, на которой могут быть различные экстремальные точки, разные перепады и т. д.

Наиболее эффективные признаки поверхностей — характерные точки функции, в которых она не дифференцируема, или имеет большой модуль градиента. Тогда для определения этих точек необходимо решить задачи оптимизации со следующими ограничениями:

$$\int_{\Omega} \left(\left| \frac{\partial h(x, y)}{\partial x} \right|^2 + \left| \frac{\partial h(x, y)}{\partial y} \right|^2 \right) dx dy = \min_h; \quad (28)$$

$$-\eta \leq h(x, y) - \hat{h}(x, y) \leq \eta, \quad (29)$$

где $\eta \geq 0$ — экзогенно установленный порог отличия функций $\hat{h}$, h , т. е.

$$\sup_{(x, y) \in \Omega} |h(x, y) - \hat{h}(x, y)| \leq \eta.$$

Задачи (28), (29) решаются методом сопряжённых градиентов. Рассмотренный вариационный подход эффективно фильтрует ошибки, возникающие при оцифровке реальных изображений (карт, снимков, геоизображений и т. д.). Недостатками являются проблемы численной стабильности и сравнительно низкой скорости работы. Имеется другой подход, основанный на определении нулевых значений оператора Лапласа, применённого к сглаженной поверхности. Его недостаток в том, что в отличие от градиента, лапласиан — скалярная величина, а не векторная, т. е. оператор Лапласа не инвариантен к ориентации перепадов и чувствителен к шуму. Поэтому поверхность (изображение) предварительно сглаживают, уменьшая высокочастотный шум.

Предложены методы, совмещающие в себе фильтрующие и дифференцирующие свойства. Так, для обнаружения нулей оператора Лапласа от сглаженной функции изображения используют свертку с лапласианом от гауссиана:

$$\text{LoG}(x, y) = -\frac{1}{\pi\sigma^4} \left[1 - \frac{1}{2\sigma^2}(x^2 + y^2) \right] \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}(x^2 + y^2)\right].$$

Такой подход обусловлен свойством ассоциативности оператора свёртки и оператора Лапласа. Заметим, что аналитическое решение задачи минимизации функционала Тихонова также позволяет построить метод выделения характерных точек (контуров), совмещающий фильтрующие и дифференцирующие свойства [17].

Интеллектуальные вычисления позволяют получать непрерывные или дискретные решения в результате обучения модели по имеющейся неполной информации. Один из подклассов группы этих методов составляют НС, использующие стохастические алгоритмы для обучения модели с учителем или путём самоорганизации и дополненные обратными связями. Эти методы предназначены для обработки зашумлённых экспериментальных данных. При этом отпадает необходимость проведения предварительного анализа исходных данных на нормальность выборочного распределения.

Проверим одну из основных характеристик, используемых для количественного изучения свойств месторождений полезных ископаемых, каким является удельное электрическое сопротивление (УЭС). В [18] приведено относительное УЭС (ρ_r/ρ_0) при совместном воздействии эффективного давления p и температуры T . Результаты проведённого статистического зондирования выборочных данных представлены в табл. 1. При этом $\bar{x}$ — расчёт среднего значения; M — выборочная медиана; δ — среднеквадратическое отклонение; V — коэффициент вариации; $E_{\bar{x}}$ — эксцесс; S_k — коэффициент асимметрии. Анализ результатов показал, что выборочное распределение противоречит предположению о нормальности. В связи с изложенным возникла необходимость иден-

Т а б л и ц а 1

Результаты проверки на нормальность выборочных данных

Условие	Полученное значение	Выполнение условия
$\bar{x} \approx M$	0,71±0,59	Не выполняется
$\bar{x} \pm \delta \geq 68\%$	77,7%	Выполняется
$\bar{x} \pm 2\delta \geq 95\%$	91,6 %	Не выполняется
$\bar{x} \pm 3\delta \geq 100\%$	100 %	Выполняется
$V < 33\%$	47 %	Не выполняется
$E_{\bar{x}} \rightarrow 0$	0,45 %	Не выполняется
$S_k \rightarrow 0$	1,14 %	Не выполняется

тификации параметров c_{rs} математической модели многомерного объекта, описываемого регрессионным уравнением (2) на основе статистических экспериментальных данных процесса (табл. 2).

Таблица 2

Экспериментальные данные зависимости УЭС от температуры и давления

$T, ^\circ\text{C}$	Относительное удельное электрическое сопротивление, %, при давлении P , МПа				
	7	21	35	49	63
31	0,81	1,12	1,33	1,47	1,53
54	0,52	0,72	0,85	0,93	0,97
72	0,41	0,57	0,67	0,73	0,76
86	0,34	0,47	0,56	0,61	0,64
96	0,52	0,72	0,85	0,55	0,58
100	0,27	0,38	0,45	0,50	0,51

Рассмотрим решение уравнения (2) с использованием НС. Входные сигналы сети — значения переменной $B=(x, y)$, а выходные параметры — H . Для построения модели процесса на вход НС подаются сигналы B , а выходные сигналы сравнивают с эталонными сигналами T и вычисляют отклонения:

$$E = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n (H_j - T_j)^2.$$

Если для всех обучающих пар отклонение меньше заданного, то обучение (коррекция) параметров сети заканчивается. В противном случае оно продолжается до тех пор, пока значение E не достигнет минимума, т. е. заданного качества обучения. Коррекция параметров сети осуществляется следующим образом:

$$c_{rs}^H = c_{rs}^C + \gamma \partial E / \partial c_{rs}, \quad (30)$$

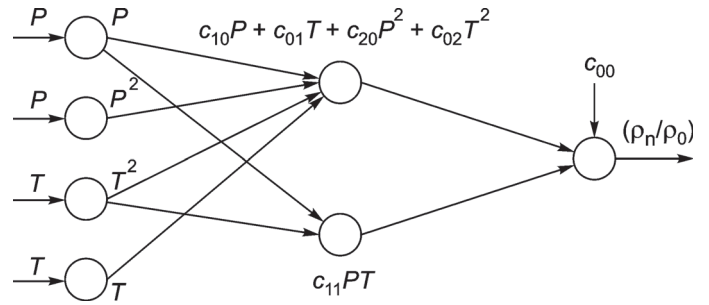
где c_{rs}^C, c_{rs}^H — старые и новые значения c_{rs} ; γ — скорость обучения.

Пример. Рассмотрим модель зависимости УЭС (выходная координата модели) от термобарических (входные координаты модели) параметров (уравнение регрессии второго порядка с двумя переменными), т. е. частный случай модели (2) при $m=2$:

$$H = (\rho_n / \rho_0) = c_{00} + c_{10}P + c_{01}T + c_{11}PT + c_{20}P^2 + c_{02}T^2. \quad (31)$$

Построим НС для решения уравнения (31), где в качестве параметров сети выступают коэффициенты $c_{00}, c_{10}, c_{01}, c_{11}, c_{20}, c_{02}$ (рис. 1), и осуществим обучение параметров сети с использованием формулы (30):

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial c_{00}} &= \sum_{j=1}^n (h_j - t_j); & \frac{\partial E}{\partial c_{10}} &= \sum_{j=1}^n (h_j - t_j)P; \\ \frac{\partial E}{\partial c_{01}} &= \sum_{j=1}^n (h_j - t_j)T; & \frac{\partial E}{\partial c_{11}} &= \sum_{j=1}^n (h_j - t_j)PT; \\ \frac{\partial E}{\partial c_{20}} &= \sum_{j=1}^n (h_j - t_j)^2 P^2; & \frac{\partial E}{\partial c_{02}} &= \sum_{j=1}^n (h_j - t_j)T^2. \end{aligned} \right\} \quad (32)$$



Структура нейронной сети для решения уравнения регрессии 2-го порядка

В итоге обучения (31), (32) находим параметры сети, удовлетворяющие базе знаний с требуемым качеством обучения. Перед проведением компьютерной симуляции в результате экспериментов в табл. 2 были собраны статистические данные, и проведено обучение параметров сети:

$$\begin{aligned} c_{00} &= 1,42; c_{10} = 2,11; c_{01} = -2,53; c_{11} = -0,87; \\ c_{20} &= -1,10; c_{02} = 1,31 \end{aligned} \quad (33)$$

Сравним результаты (33) с результатами в [18], полученными при использовании модели (31) и МНК (4):

$$\begin{aligned} \hat{c}_{00} &= 1,45; \hat{c}_{10} = 2,26; \hat{c}_{01} = -2,55; \\ \hat{c}_{11} &= -0,85; \hat{c}_{20} = -1,28; \hat{c}_{02} = 1,33 \end{aligned}$$

Таким образом, НС для идентификации параметров моделей различных по своей природе геополей можно использовать независимо от вида распределения выборочных данных. При этом нейросетевым методам присущи следующие недостатки: отсутствие строгой теории по выбору структуры сети; практическая невозможность извлечения знания из обученной НС, так как последняя является «чёрным ящиком» для пользователя.

Другим подходом реализации НС по сравнению с многослойными сетями, использующими в основном сигмоидальные функции активации, являются РБФ гауссовского типа, позволяющие упрощенно отображать характеристик модели. Радиальные базисные функции НС содержат только один скрытый слой, поэтому исключается неформализуемый подбор структуры сети. Эффективные алгоритмы обучения РБФ НС отсутствуют.

В [5] рассматриваются задачи, возникающие в георазведке, мониторинге тепловых, энергетических полей и т. д. и требующие знания граничных механических, энергетических, или температурных значений на границах тел, недоступных для прямого измерения. Классическим примером такой некорректной задачи является задача Коши для уравнения Лапласа:

$$\Delta T(x, y) = 0, \quad (x, y) \in \Omega; \quad (34)$$

$$T(x, y) = t(x, y), \quad (x, y) \in \gamma_1; \quad (35)$$

$$\frac{\partial T(x, y)}{\partial n} = 0, \quad (x, y) \in \gamma_1, \quad (36)$$

где Ω — область в R^2 , ограниченная снаружи замкнутой кривой γ_1 , а внутри — замкнутой кривой γ_2 , $\partial\Omega = \gamma_1 \cup \gamma_2$.

По избыточной информации на части границы γ_1 требуется восстановить информацию на оставшейся части γ_2 . Решение основано на сведении краевой задачи (34)–(36), к системе неклассических ГИУ.

Заключение. Ни один из методов интерполяции не является приоритетным с точки зрения точности, а при большом числе исходных точек все строгие интерполяторы дают приблизительно одинаковые результаты. Глобальные интерполяторы заглаживают поверхность, поэтому необходимо воспользоваться локальными. Локально-аппроксимационные модели с линейными функциями имеют достаточно высокую точность, однако очень чувствительны к аддитивным шумам. Преимущество локальных интерполяторов перед глобальными заключается в том, что, изменяя число ближайших точек, контролируется степень фильтрации исходных данных, т. е. сглаживание поверхности. Заслуживают внимания методы аппроксимации, основанные на выборе интерполирующей функции как решения краевой задачи Дирихле, Неймана, Заренбы, Коши для уравнения Лапласа, Пуассона, Гельмгольца либо бигармонического уравнения. Для решения этих краевых задач используют один из конкурирующих методов: МКЭ, ГИУ (метод граничных элементов), бессеточный метод, или их гибридизацию. Нейронная сеть является одной из форм, в которых с помощью обучения можно закодировать эмпирические знания (набор измерений) об окружающей среде и её свойствах. Модели на основе регрессионных НС имеют высокую точность и относительно невысокую чувствительность к аддитивному шуму. Особенно это проявляется при случайном расположении обучающих точек с неизвестным видом выборочного распределения. В случае затруднений при подборе структуры НС необходимо использовать РБФ НС, но эффективные алгоритмы обучения для последних отсутствуют. Проведённый анализ показал, что ни один из методов оценивания (сглаживания, аппроксимации, нейросетевого обучения) не является универсальным и абсолютно надёжным. Эффективное решение — их гибридизация, что требует от пользователя достаточной подготовки и знаний. Например, МКЭ в комбинации с кусочно-полиномиальным сглаживанием и МСИ (или методом ближайших точек) или вероятностной НС. Подобная гибридизация обладает хорошими фильтрующими, сглаживающими и обучающими свойствами по отношению к высокочастотной помехе и тем аномалиям, период которых меньше ячеек МКЭ. Поэтому правильный подбор методов к гибридизации позволит неспециалисту в области математики и вычислительных технологий успешно решить задачи моделирования и восстановления параметров геополей с учётом шумов измерений.

Л и т е р а т у р а

1. Пашаев А. М., Садыхов Р. А., Илдыз Ф. Т., Караборк Х. Т. Восстановление параметров геополей // Измерительная техника. 2005. № 12. С. 3—9.
2. Пашаев А. М., Садыхов Р. А., Рамазанов Ф. Г., Назирли Ф. С. Восстановление параметров геополей с учетом шумов измерений. Ч. 1. Методы сглаживания, фильтрации и регуляризации // Измерительная техника. 2010. № 8. С. 3—11.

3. Пашаев А. М., Садыхов Р. А., Рамазанов Ф. Г., Назирли Ф. С. Восстановление параметров геополей с учётом шумов измерений. Ч. 2. Методы идентификации, регуляризации и мягких вычислений (softcomputing) // Измерительная техника. 2010. № 10. С. 14.

4. Яновская Т. В., Порохова Л. Н. Обратные задачи геофизики. СПб.: С.-Петербург. ун-т, 2004.

5. Васильев А. Н., Тархов Д. А. Нейросетевое моделирование. Принципы. Алгоритмы. Приложения. СПб.: ИПУ, 2009.

6. Жданов М. С. Геофизическая электромагнитная теория и методы. М.: Научный мир, 2012.

7. Стольниц Э., ДеРоз Т., Салезин Д. Вейвлеты в компьютерной графике. Ижевск: НИЦ Регулярная и хаотическая графика, 2002. [Электрон. версия]: <http://www.dfhb.de>; <http://www.geozilla.de> (дата обращения 05.01.2015).

8. Садыхов Р. А. Математические модели и эффективные алгоритмы решения оптимальных задач АСУ ТП добычи нефти // Автореф. дисс. на соиск. учёной степени докт. техн. наук. М., 1995.

9. Sadigov R. A. Potential method in solution of multivariate problems of two-phase filtration in heterogeneous formation // Transactions of academy of sciences of Azerbaijan / Series of phys. Techn. And mathemat. Sciences. 2000. V. XX. N. 1. P. 212—219.

10. Mukherjee S., Mukherjee Yu. Boundary methods: Elements, Contours, and Nodes. N.Y.: Taylor & Francis Group, LLC, 2005.

11. Пашаев А. М., Аскеров Д. Д., Садыхов Р. А. Моделирование температурных полей в авиационных газотурбинных двигателях // Труды ЦАГИ им. Н. Е. Жуковского. 2003. Вып. 2661.

12. Sadigov R. A. Probability — statistical and variation approaches to a solution of problems (tasks) of interpolation of geofields // Elmi mecmueller. 2008. V. 10. N. 1. P. 51.

13. Pashayev A., Askerov D., Sadiqov R., Samedov A. Numerical modeling of gas turbine cooled blades // Aviation. 2005. V. IX. N. 3. P. 9—18.

14. Веселов В. В., Гонтов Д. П., Пустыльников Л. М. Вариационный подход к задачам интерполяции физических полей. М.: Наука, 1983.

15. Кононов В., Канушин В. Применение уравнения Пуассона в задачах обработки изображений // Графика и мультимедиа. 2009. № 7(1). С. 1—18.

16. Болтов Ю. В., Волков И. А. Сглаживание изображений на основе решения краевой задачи // Телекоммуникации. 2010. № 5. С. 29—37.

17. Цибанов В. Н. Регуляризующие методы фильтрации и восстановления // Автореф. дисс. на соиск. учёной степени к. ф.-м. н. М.: 2008.

18. Буряковский Л. А., Джафаров И. С., Джаваншир Р. Д. Моделирование систем нефтегазовой геологии. М.: Недра, 1990.

Дата принятия: 12.03.2015.