

Моделирование, восстановление и картирование геополей с учётом и без шумов измерений.

Ч. 6. Методы кусочно-полиномиальной аппроксимации, статистического планирования экспериментов и построения изолинейных карт

А. М. ПАШАЕВ, Р. А. САДЫХОВ, С. Б. ГАБИБУЛЛАЕВ.

Национальная академия авиации Азербайджана,
Баку, Азербайджан, e-mail: sadixov@mail.ru

Рассмотрено сплайновое, конечно-элементное и кусочно-полиномиальное восстановление границ геополей с автоматической стыковкой. Неизвестные коэффициенты аппроксимирующих полиномов оценены по измерениям их входных и выходных координат при наличии шумов измерений. Разработан новый метод построения изолинейных карт, основанный на фундаментальной теореме Пуанкаре «О возвращаемости». Исследованы возможности метода на примере построения линий изобар.

Ключевые слова: сглаживающие сплайны, статистические методы планирования экспериментов, кусочно-полиномиальная аппроксимация, построение изолинейных карт.

The article studies spline, finite elemental and piecewise-polynomial recovery of borders of geofields with automatic docking. The unknown coefficients of the approximating polynomials are estimated by their input and output measurements in the presence of noise. The newly developed method of building isolinear maps is based on the fundamental theorem Poincare "Recovering". The potential of the method has been investigated on the example of construction of lines isobar.

Key words: smoothing splines, statistical planning methods of experiments, piecewise-polynomial approximation, construction of lines maps.

Геометризация (око́нтуривание) нефтяных залежей позволяет достичь необходимой точности разведки месторождений при меньших объёмах бурения. В работе [1] предложен новый подход к оптимальному размещению ограниченного (в плане материальных затрат) количества око́нтуривающих скважин. Данный метод основан на статистических методах планирования эксперимента и, в отличие от других методов, требует чёткого представления о положении контура нефтеносности (КН). Регрессионные модели, применяемые для обработки экспериментальных данных и содержащие степенные и ортогональные полиномы, которые имеют области разной степени гладкости, не всегда приводят к удовлетворительным результатам [2, 3]. В связи с этим представляют особый интерес кусочно-полиномиальные, сплайновые, конечно-элементные и другие модели.

Комплексирование методов око́нтуривания нефтяных залежей. При определении границ месторождений нефтяных залежей наиболее эффективны методы дистанционного око́нтуривания на основе гидростатического исследования скважин, скважинной электроразведки, импульсной сейсмической голографии и опережающего око́нтуривания. Погрешности определения КН при этих способах составляют соответственно 15–25, 5–15, 1–5 и 1–3 %. Перечисленные методы позволяют определить первоначальное положение КН и обладают разной точностью, характеризующейся средними квадратическими погрешностями (СКП) σ_i , $i=1, 2, 3, 4$ измерений. При наибольшем значении координат, равном 5000 м, для гидростатического метода $\sigma_1=417$ м, для электроразведочного – $\sigma_2=250$ м, для импульсного сейсмографического –

$\sigma_3=83$ м, а для опережающего око́нтуривания – $\sigma_4=50$ м. Усреднение с учётом этих погрешностей осуществляется следующим образом:

$$\hat{x} = \sum_{i=1}^4 \lambda_i x_i; \hat{y} = \sum_{i=1}^4 \lambda_i y_i, \quad (1)$$

где $\lambda_i = 1/\sigma_i^2 \left(\sum_{i=1}^4 1/\sigma_i^2 \right)^{-1}$.

Используя приведённые выше значения СКП разных методов око́нтуривания, получим

$$\lambda_1 = 0,010; \lambda_2 = 0,028; \lambda_3 = 0,256; \lambda_4 = 0,705.$$

Точности найденных оценок характеризуются дисперсиями $D_{\hat{x}}, D_{\hat{y}}$:

$$D_{\hat{x}} = D_{\hat{y}} = \left(\sum_{i=1}^4 1/\sigma_i^2 \right)^{-1}.$$

Найденные с помощью (1) оценки координат око́нтуривающих точек КН можно применять при аппроксимации этого контура с учётом погрешностей входных и выходных координат модели.

Восстановление КН методами кусочно-полиномиальной аппроксимации с учётом и без шумов измерений. Контур нефтеносности аппроксимируется отдельными интервалами (кусочками и участками сглаживания) и полиномами невысокого поряд-

ка, а затем участки объединяются в общую аппроксимирующую кривую. На основе проведённых экспериментов было выявлено, что оптимальными по точности и затратам компьютерного времени являются полиномы третьей степени при наличии двух условий (функция и её первые производные) [2]. Однако такой выбор не всегда справедлив при определении положения КН, так как эти контуры или являются, или стремятся к линиям с минимальной кривизной [3]. Поэтому стыковку полиномов проводят и по второй производной, когда степень полинома – три и число условий – три.

Для интерполяции участков КН используют полином третьего порядка

$$y(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3. \quad (2)$$

Уравнение измерений выходной координаты y записывается как

$$Z_y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \delta_y,$$

где $Z_y = \|z_{1y}, z_{2y}, \dots, z_{ny}\|^T$ – вектор измерений выходной координаты y .

Тогда модель экспериментальных данных для рассматриваемого интервала можно представить в матричном виде:

$$Z_y = X\theta + \delta_y,$$

где X – структурная матрица; $\theta = \|a_0, a_1, a_2, a_3\|^T$ – вектор искомых коэффициентов; n – количество точек на данном интервале.

Коэффициенты полинома (2) для первого участка оцениваются методом наименьших квадратов (МНК) [4]:

$$\hat{\theta} = (X^T X)^{-1} (X^T Z_y); \quad (3)$$

$$D_{\hat{\theta}} = (X^T X)^{-1} \sigma^2, \quad (4)$$

где $D_{\hat{\theta}}$ – дисперсионная матрица ошибок.

Начиная со второго, компоненты θ рассчитываются по экспериментальным данным на предыдущем участке, т. е. каждый последующий участок КН выбирается с перекрытием. Оптимальным считается 50 % перекрытие. При этом задействуются линейные связи между оценёнными параметрами предыдущего участка (по функции, первым и вторым производным):

$$F\theta = V, \quad (5)$$

где

$$F = \begin{bmatrix} 1 & x_e & x_e^2 & x_e^3 \\ 0 & 1 & 2x_e & 3x_e^2 \\ 0 & 0 & 2 & 6x_e \end{bmatrix};$$

$$V = \begin{bmatrix} \hat{a}_{0N-1} + \hat{a}_{1N-1}x_e + \hat{a}_{2N-1}x_e^2 + \hat{a}_{3N-1}x_e^3 \\ \hat{a}_{1N-1} + 2\hat{a}_{2N-1}x_e + 3\hat{a}_{3N-1}x_e^2 \\ 2\hat{a}_{2N-1} + 6\hat{a}_{3N-1}x_e \end{bmatrix};$$

$e = (N-1)(n-L)$; L – число точек перекрытия.

Задача определения неизвестных коэффициентов модели, с учётом равнозначности измерений, формулируется как задача на условный экстремум: минимизируется квадратичная форма при ограничивающем условии (5):

$$(Z_y - X\theta)^T \sigma^2 I (Z_y - \theta),$$

где I – единичная матрица.

Далее применяется метод неопределённых множителей Лагранжа, и записываются следующие выражения для оценивания вектора коэффициентов θ при наличии линейных связей (5):

$$\bar{\theta}^T = \hat{\theta}^T + (V^T - \hat{\theta}^T F^T) \left[F(X^T X)^{-1} F^T \right]^{-1} F(X^T X)^{-1}; \quad (6)$$

$$D_{\bar{\theta}} = D_{\hat{\theta}} - (X^T X)^{-1} F^T \left[F(X^T X)^{-1} F^T \right]^{-1} F(X^T X)^{-1} \sigma^2. \quad (7)$$

Алгоритм с автоматической стыковкой обладает значительными фильтрующими свойствами по отношению к высокочастотной помехе и аномалиям, период которых меньше интервала сглаживания. Однако, так как аргументы x_i всегда определяются с погрешностью, т. е. имеются шумы измерений, то использование полученных на основе МНК алгоритмов (6), (7) приводит к неточным (смещённым) результатам, а главное, получаются неправильные оценки их погрешностей. Для обработки данных в этом случае требуется применять метод конфлюентного анализа [5]. Так как для аппроксимации КН выбирается полином третьей степени, то уравнение измерений можно представить в виде

$$Z_{y_i} = a_0 + a_1x_i + a_2x_i^2 + a_3x_i^3 + \delta_{np};$$

$$\delta_{np} = \delta_{y_i} + \delta_{x_i}^*;$$

$$D_{\delta_{np}} = D_{\delta_{y_i}} + D_{\delta_{x_i}^*};$$

$$D_{\delta_{x_i}^*} = a_1^2 D_{\delta_{x_i}} + 4a_2^2 x_i^2 D_{\delta_{x_i}} + 9a_3^2 x_i^4 D_{\delta_{x_i}},$$

где δ_{np} – приведённые погрешности, обусловленные погрешностями измерений функции и аргумента; $\delta_{x_i}^*$ – погрешность определения функции y_i , вызванная погрешностью измерений аргумента x_i ; $D_{\delta_{np}}, D_{\delta_{y_i}}, D_{\delta_{x_i}^*}$ – соответственно дисперсии погрешностей $\delta_{np}, \delta_{y_i}, \delta_{x_i}^*$.

Так как координаты x, y обычно измеряют одними и теми же способами и техническими средствами, то и погрешности их определения одинаковы, т. е.

$$D_{\delta_{x_i}} = D_{\delta_{y_i}} = \sigma_i^2.$$

Тогда можно записать выражение для дисперсии приведённой погрешности:

$$D_{\delta_{np}} = \sigma_i^2 (1 + a_1^2 + 4a_2^2 x_i^2 + 9a_3^2 x_i^4). \quad (8)$$

На основании уравнений (6)–(8) алгоритм оценивания вектора коэффициентов θ при наличии линейных связей (5) и с учётом погрешности определения аргумента x (входной координаты) примет вид

$$\bar{\theta}^T = \hat{\theta}^T + (V^T - \hat{\theta} F^T) \left[F(X^T X)^{-1} F^T \right]^{-1} F(X^T X)^{-1}; \quad (9)$$

$$D_{\bar{\theta}} \leq D_{\hat{\theta}_{\text{гар}}} = \left\{ (X^T X)^{-1} - (X^T X)^{-1} F^T \left[F(X^T X)^{-1} F^T \right]^{-1} F(X^T X)^{-1} \right\} \times \times \sigma_f^2 (1 + a_1^2 + 4a_2^2 x_{\max}^2 + 9a_3^2 x_{\max}^4), \quad (10)$$

где $\hat{\theta}_{\text{гар}}$ – гарантированная оценка коэффициентов полинома; $x_{\max}$ – максимальное значение аргумента на рассматриваемом интервале аппроксимации.

Выражением (10) определяются гарантированные значения дисперсии погрешностей оценок, найденных с помощью (9).

Восстановление КН интерполяционными и сглаживающими сплайнами. Восстановление произведём для полиномов, подчинённых условию непрерывности функции, и производных (наклона и кривизны в случае кубических сплайнов) в общих точках соседних участков. Кубическая сплайн-функция имеет минимальную кривизну и принимает в узлах сетки заданное значение. Данную функцию можно записать как

$$\int_{\gamma} [z''(t)]^2 dt = \min_{w_2^2},$$

где w_2^2 – класс функций, имеющих суммируемые с квадратом вторые производные.

Пусть кривая γ представляется конечным числом дискретных точек (выполняются точные дискретные измерения) в виде набора периодических кубических сплайнов двух типов

$$[(t_j, x_j), (t_j, y_j)] = (t_j, z_j), z_j = (x_j, y_j), j = \overline{1, N};$$

$$t_1 < t_2 < \dots < t_N, t_{N+1} = t_1, x_{N+1} = x_1, y_{N+1} = y_1.$$

Тогда восстановление сплайна $S[z(t)]$, его первой $S'[z(t)]$ и второй $S''[z(t)]$ производных в любой точке

$$z(t) = [x(t), y(t)],$$

где

$t \in [0, l], l = \sum_{j=1}^N h_j, h_j = |z_j - z_{j-1}|, j = \overline{1, N}$, осуществляется по следующим формулам [3]:

$$\begin{aligned} S[z(t)] &= z''_{j-1}(t_j - t)^3 / 6h_j + z''_j(t - t_{j-1})^3 / 6h_j + \\ &+ (z_{j-1} - z''_{j-1}h_j^2 / 6) \times (t_j - t) / h_j + \\ &+ (z_j - z''_jh_j^2 / 6)(t - t_{j-1}) / h_j; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S'[z(t)] &= -z''_{j-1}(t_j - t)^2 / 2h_j + z''_j(t - t_{j-1})^2 / 2h_j + \\ &+ (z_j - z_{j-1}) / h_j + (z''_j - z''_{j-1})h_j / 6 \end{aligned}$$

$$S''[z(t)] = z''_{j-1}(t_j - t) / h_j + z''_j(t - t_{j-1}) / h_j.$$

Для нахождения сплайнов решается система уравнений

$$\left. \begin{aligned} Az'' &= 6B\hat{z}; \\ z'' &= A^{-1}6B\hat{z}, \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

где $z'' = \|z''_1, z''_2, \dots, z''_N\|^T$ – вектор вторых производных по сплайну;

$\hat{z} = \|\hat{z}_1, \hat{z}_2, \dots, \hat{z}_N\|^T$ – вектор измеренных координат точек

$\hat{z}_j = (\hat{x}_j, \hat{y}_j), j = \overline{1, N}$ контура γ .

Матрицы A , имеют вид

$$A = \left\| \begin{array}{cccccc} 2(h_1 + h_2) & h_2 & 0 & \dots & 0 & h_1 \\ h_2 & 2(h_2 + h_3) & h_3 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ h_1 & 0 & 0 & \dots & h_N & 2(h_N + h_1) \end{array} \right\|;$$

$$B = \left\| \begin{array}{cccccc} h_1^{-1} & -(h_1^{-1} + h_2^{-1}) & h_2^{-1} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & h_2^{-1} & -(h_2^{-1} + h_3^{-1}) & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & (h_N^{-1} + h_1^{-1}) & h_1^{-1} \end{array} \right\|.$$

Матрица A – неплотная, симметричная, с диагональным преобладанием. По теореме Гершгорна о локализации собственных значений она положительно определена, следовательно – неособенная, и решение (11) определяется однозначно. Если координаты КН $\hat{z}(t_j) = [\hat{x}(t_j), \hat{y}(t_j)] \in \gamma$ измеряются с погрешностью

$\delta_j, j = \overline{1, N}$, то это неблагоприятно влияет на поведение сплайна и, особенно, на его производные (осцилляции). Более гладкие аппроксимирующие кривые позволяют получать сглаживающие сплайны, коэффициенты которых оценивают, решая задачу нелинейного программирования с ограничениями

$$\sum_{j=1}^N \int_{z(t_j)}^{z(t_{j+1})} [z''(t)^2] dt = \min_{w_2^2}; \quad (12)$$

$$|z(t_j) - \hat{z}(t_j)| \leq \delta_j, j = \overline{1, N}. \quad (13)$$

Основная трудность, возникающая при решении задачи, обусловлена тем, что в области, выделенной ограничениями (13), методы нелинейного программирования малоэффективны [6]. Поэтому вместо задач (12), (13)

обычно решается вспомогательная задача минимизации функционала

$$\sum_{j=1}^N \int_{z(t_j)}^{z(t_{j+1})} [z''(t)] dt + \sum_{j=1}^N g_j [z(t_j) - \hat{z}(t_j)]^2 = \min_{w_2^2}$$

где g_j – весовые коэффициенты.

Тогда вектор сеточных значений сглаживающего кубического периодического сплайна $\mathbf{Z} = \|z_1, z_2, \dots, z_N\|^T$; $z_j(x_j, y_j)$ $j = \overline{1, N}$ определяется как

$$\mathbf{Z} = \hat{\mathbf{Z}} - G B^T \mathbf{z}'',$$

где $\hat{\mathbf{Z}} = \|\hat{z}_1, \hat{z}_2, \dots, \hat{z}_N\|^T$ – оценённые (измеренные) координаты $\hat{z}_j = (\hat{x}_j, \hat{y}_j) \in \gamma$ КН с погрешностью δ_j ; $G = \begin{bmatrix} g_1 \\ \dots \\ g_N \end{bmatrix}$ – матрица весовых коэффициентов.

Для оценки точности вектора $\hat{\mathbf{z}}_j = (\hat{x}_j, \hat{y}_j)$ используется СКП

$$\delta_{\hat{\mathbf{z}}} = \left(\delta_{\hat{x}}^2 + \delta_{\hat{y}}^2 \right)^{1/2} = \sqrt{2} \sigma_{\hat{x}}.$$

В качестве δ_j принимается предельное отклонение, которое при нормальном распределении обычно составляет

$$\delta_j = 3 \sigma_{\hat{\mathbf{z}}} = 3 \sqrt{2} \sigma_{\hat{x}}.$$

Для нахождения $\mathbf{z}''$ решается система уравнений

$$(A + 6BGB^T) \mathbf{z}'' = 6B\hat{\mathbf{Z}}; \mathbf{z}'' = (A + 6BGB^T)^{-1} 6B\hat{\mathbf{Z}}. \quad (14)$$

Матрица $A + 6BGB^T$ – симметричная, пятидиагональная, и по теореме Гершгорна о локализации собственных значений она положительно определена, следовательно, неособенная. Для решения (14) применяется метод прогонки [7]. Анализ проведённых вычислений показывает, что степень сглаживания уменьшается с уменьшением весового множителя g_j , т. е. чем точнее оценены координаты точек КН в узлах сетки, тем меньше должны быть значения весовых множителей g_j . При $g_j = 0$ получается интерполяционный сплайн.

Существует и другой приём введения сглаживающих кубических сплайнов. Восстановление функции $z(t)$ по её значениям $\hat{z}(t_j)$ на нерегулярной сети узлов исходных данных $z(t_j)$ сводится к минимизации

$$\int_{\gamma} \Delta z(t) d\gamma = \int_{\gamma} \left(\frac{\partial^2 z(t)}{\partial t^2} \right)^2 dt = \min_{w_2^2}. \quad (15)$$

Функция, доставляющая минимальное значение (15), является решением бигармонического уравнения

$$\Delta^2 z(t) = \Delta \Delta z(t) = \partial^4 z(t) / \partial t^4 = 0. \quad (16)$$

Уравнению (16) соответствует сплайн-функция

$$z(t) = \sum_{j=1}^N w_j |t - t_j|^3 + w_{N+1} + w_{N+2} t,$$

где $\sum_{j=1}^N w_j = 0$, $\sum_{j=1}^N w_j t_j = 0$ являются функциями Грина бигармонического уравнения (16); w_j – коэффициенты, которые определяются из решения системы линейных уравнений

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1N} & 1 & t_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2N} & 1 & t_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{N1} & a_{N2} & \dots & a_{NN} & 1 & t_N \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ t_1 & t_2 & \dots & t_N & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \dots \\ w_N \\ w_{N+1} \\ w_{N+2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{z}_1 \\ \hat{z}_2 \\ \dots \\ \hat{z}_N \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (17)$$

$a_{ij} = |t_i - t_j|^3$, $j = \overline{1, N}$; $\hat{z} \in H(\gamma)$, z_j , $j = \overline{1, N}$ – некоторая известная функция, которая является математической моделью кривой γ .

Все диагональные члены матрицы (17) равны α , т. е. $a_{ii} = \alpha$ (сглаживающий сплайн).

Общий вид сглаживающих сплайнов запишем как

$$g \sum_{j=1}^N [z(t_j) - \hat{z}(t_j)]^2 + \alpha \int_{\gamma} [z''(t)]^2 dt = \min_{w_2^2}, \quad (18)$$

где $\alpha > 0$ – параметр регуляризации.

Минимизация (18) является некоторым компромиссом между приближением к заданным значениям и получением гладкой функции.

Конечно элементное восстановление КН. Восстанавливается гладкая кривая $Z(t)$, $t \in [t_1, t_N]$ с минимальной кривизной

$$\int_{t_1}^{t_N} [Z''(t)]^2 dt = \min_{w_2^2} \quad (19)$$

по известным значениям в дискретных точках

$$z(t_i) = \hat{z}_i, \quad i = \overline{1, N}. \quad (20)$$

Величина $Z(t)$ представляется в виде линейной комбинации конечного множества базисных функций

$$Z(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots + a_N t^N = C(t) \boldsymbol{\theta}, \quad (21)$$

где $C(t) = \|1, t, t^2, \dots, t^N\|$; $\boldsymbol{\theta} = \|a_0, a_2, \dots, a_N\|^T$.

После подстановки (21) в (19), (20) и ряда преобразований задача сводится к минимизации

$$1/2 \boldsymbol{\theta}^T H \boldsymbol{\theta} \quad (22)$$

при ограничениях

$$C \boldsymbol{\theta} = B, \quad (23)$$

где $C = \begin{bmatrix} 1 & t_1 & t_1^2 & \dots & t_1^N \\ 1 & t_2 & t_2^2 & \dots & t_2^N \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & t_N & t_N^2 & \dots & t_N^N \end{bmatrix}$; $H = 2 \int_{t_1}^{t_N} C''(t)^T C''(t) dt$; $B = \|z_1, z_2, \dots, z_N\|^T$.

Решение задач (22), (23) находится с помощью множителей Лагранжа (задача безусловной оптимизации):

$$1/2\theta^T H \theta + \lambda(C\theta - B), \quad (24)$$

где $\lambda = \|\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N\|^T$.

В результате, для определения неизвестных θ , λ из (24) получается следующая матричная система линейных уравнений:

$$\begin{bmatrix} H & C^T \\ C & O \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} O \\ B \end{bmatrix}. \quad (25)$$

Численный пример 1. Пусть функция $Z(t)$ является кубическим полиномом, представленным в виде

$$Z(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3, \quad t \in [0, 1].$$

Пусть известны: $z(0)=1$, $z(0,5)=6$, $z(1)=4$. Тогда

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1/2 & 1/4 & 1/8 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}; \quad C^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1/2 & 1 \\ 0 & 1/4 & 1 \\ 0 & 1/8 & 1 \end{bmatrix};$$

$$H = 2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 6 & 12 \end{bmatrix}; \quad B = \|1, 6, 4\|^T.$$

При подстановке C , C^T , H , B в (25) получается следующая система уравнений

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 1/4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 12 & 0 & 1/8 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1/2 & 1/4 & 1/8 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 6 \\ 4 \end{bmatrix},$$

решение которой даёт $a_0=1$, $a_1=17$, $a_2=-14$, $a_3=0$. Отметим, что матрица в уравнении (25) плохо обусловленная, и итерационные методы, применяемые для решения больших разреженных систем, отличаются медленной сходимостью. Одно из решений этой проблемы заключается в использовании в качестве конечных элементов вейвлетов [8].

Восстановление КН статистическими методами планирования экспериментов. Для восстановления КН фиксированное количество оконтуривающих скважин размещается по построенному сплайну. Как показывает опыт практического опробования алгоритма, оптимальным в смысле точности результата и затрат машинного времени является описание КН полиномом (2). При использовании МНК вектор оценки исходных

коэффициентов $\theta^T = \|a_0, a_1, a_2, a_3\|$ и дисперсионную матрицу ошибок оценок D можно записать в виде выражений (3), (4),

$$\text{где } X = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & x_n^3 \end{bmatrix} - \text{матрица известных координат.}$$

При решении рассмотренной задачи очень важен обоснованный выбор значений координат – абсцисс КН $x_i, (i=\overline{1, n})$, от которых зависит точность оценок коэффициентов аппроксимирующего полинома (2), а следовательно, точность аппроксимации КН указанным полиномом. Таким образом, необходимо определить координаты точек на КН (абсциссы оконтуривающих скважин), чтобы получить аппроксимирующие КН полиномы, т. е. найти такие значения $x_1, x_2, \dots, x_n$, которые обеспечивают оценки коэффициентов a_0, a_1, a_2, a_3 из условия минимума выбранного критерия качества. В практических задачах планирования эксперимента очень просто минимизировать след дисперсионной матрицы ошибок [1]. При этом требуется найти значения $x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*$ при заданных из условия $\min[\text{tr}(X^T X)^{-1} \sigma^2]$ на интервале $x_{\min i} \leq x_i \leq x_{\max i}$, где $x_{\min i}, x_{\max i}$ – нижняя и верхняя границы аппроксимируемого участка КН. Целевая функция (4) представлена в виде $D = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Из приведённой постановки следует, что рассматриваемая задача является оптимизационной с ограничениями. При этом целевая функция нелинейна, непрерывна и дифференцируема на заданном интервале измерений функций нескольких переменных. Для решения указанной задачи нужно рассмотреть необходимые и достаточные условия существования минимума функций нескольких переменных:

1. для наличия в точке $X^{*T} = \|x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*\|$ локального минимума необходимо, чтобы выполнялось равенство

$$\nabla f(x^*) = 0,$$

где $\nabla f = \left[\frac{\partial f}{\partial x_1^*}, \frac{\partial f}{\partial x_2^*}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n^*} \right]$ – градиент функции f ;

2. матрица $\nabla^2 f(x^*)$ должна быть положительно полуопределённая (необходимые условия).

Если же $\nabla f(x^*) = 0$ и матрица $\nabla^2 f(x^*)$ положительно определённая (достаточные условия), то x^* – точка строгого локального минимума $f(x)$.

Раскроем дисперсионную матрицу ошибок оценок (4). После перемножения и обращения матриц с использованием алгебраических дополнений получим

$$D = (X^T X)^{-1} \sigma^2 = \frac{\sigma^2}{\det(X^T X)} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} & A_{41} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} & A_{42} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} & A_{43} \\ A_{14} & A_{24} & A_{34} & A_{44} \end{bmatrix},$$

где $\det(X^T X) = A_{11}n + A_{12} \sum_{i=1}^n x_i + A_{13} \sum_{i=1}^n x_i^2 + A_{14} \sum_{i=1}^n x_i^3$ – определитель; $A_{ij} (i, j = \overline{1, 4})$ – алгебраические дополнения i, j элементов матрицы $X^T X$.

Таким образом

$$\text{tr}D = \frac{\sigma^2}{\det(X^T X)} (A_{11} + A_{22} + A_{33} + A_{44}).$$

Необходимыми условиями экстремума величины $\text{tr}D(x_1, x_2, \dots, x_n)$ являются:

$$\begin{aligned} \frac{\partial [\text{tr}D(x_1, x_2, \dots, x_n)]}{\partial x_i} = & \frac{\sigma^2}{\det(X^T X)} \left(\frac{\partial A_{11}}{\partial x_i} + \frac{\partial A_{22}}{\partial x_i} + \frac{\partial A_{33}}{\partial x_i} + \frac{\partial A_{44}}{\partial x_i} \right) - \\ & - \frac{\partial [\det(X^T X)]}{\partial x_i} \left[\frac{\sigma^2}{[\det(X^T X)]^2} (A_{11} + A_{22} + A_{33} + A_{44}) \right]; \\ \frac{\partial [\det(X^T X)]}{\partial x_i} = & n \frac{\partial A_{11}}{\partial x_i} + A_{12} + (x_1 + x_2 + \dots + x_n) \frac{\partial A_{12}}{\partial x_i} + \\ & + 2x_i A_{13} + (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2) \frac{\partial A_{13}}{\partial x_i} + \\ & + 3x_i^2 A_{14} + (x_1^3 + x_2^3 + \dots + x_n^3) \frac{\partial A_{14}}{\partial x_i}, i = \overline{1, n}. \end{aligned} \quad (26)$$

В результате получается система из n алгебраических уравнений с n неизвестными, решение которой содержит искоемые значения $x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*$.

Для нахождения всех возможных решений системы (26) используем общий метод проекции градиента [9] с учётом того, что матрица Якоби должна быть неособенная, т. е.

$$x^{k+1} = \beta_k \text{Pr}_R [x^k - \alpha_k \nabla f(x^k)] + (1 - \beta_k) x^k, k = 0, 1, \dots,$$

где x^0 – задано, $0 < \beta_k \leq 1$, $\alpha_k > 0$ и способ выбора α_k, β_k известен;

$$\text{Pr}_R x_i = \begin{cases} x_i, & x_i \in R; \\ x_{\min_i}, & x_i < x_{\min_i}; \\ x_{\max_i}, & x_i > x_{\max_i}. \end{cases}$$

$$\text{Pr}_R x = (\text{Pr}_R x_1, \text{Pr}_R x_2, \dots, \text{Pr}_R x_n);$$

$$f^T = \|f_1, f_2, \dots, f_n\|.$$

Определением таким образом точки x^* локального минимума (значения абсциссы оконтуривающих скважин $x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*$) обеспечивается получение наилучших (в соответствии с выбранным критерием A оптимальности) оценок коэффициентов a_0, a_1, a_2, a_3 аппроксимирующего полинома (2). На основе предложенного подхода можно восстановить КН и по другим критериям планирования эксперимента.

Построение изолинейных карт. В практике геодезических, геологических, геофизических, картографических и других работ приходится строить карты изолиний, передающие плавность и постепенность изменений количественных при-

знаков и позволяющие проводить качественный анализ этих признаков. Ниже для построения изолиний авторы предлагают использовать новый метод (предыдущие методы описаны в [3]), основанный на фундаментальной теореме Пуанкаре «О возвращаемости» замкнутой физической системы, ранее предложенной в [4]. Для этого функцию Гамильтона можно представить как

$$H(x, y, t) = 1/2(u_1, u_2) + R[P(x, y, t) - P_0(x, y, t)]^2,$$

где $P_0(x, y, t)$ – заданное значение восстанавливаемого параметра (давление) в некоторой точке (x^0, y^0) во времени t ; $U = (u_1, u_2)$ – скорость движения КН;

$$P(x, y, t) = \varphi(x, y, t) + aK^{-1} \int_{\gamma(t)} V(s, t) \ln R^{-1} ds -$$

функция распределения давления.

Движение КН определяется из решения следующей системы уравнений [3]:

$$\begin{cases} v(s, t) - a \int_{\gamma(t)} [v(s, t) - v(s, t)] \frac{\partial}{\partial n} \ln R^{-1}(s, \xi, t) d\xi = K \frac{\partial \varphi}{\partial n}; \\ \frac{\partial x(s, t)}{\partial t} = -v(s, t) \frac{\partial y(s, t)}{\partial s}; \\ \frac{\partial y(s, t)}{\partial t} = v(s, t) \frac{\partial x(s, t)}{\partial s}, \end{cases}$$

где $v(s, t)$ – скорость движения точек $\gamma(t)$ по нормали к нему; $\varphi(x, y, t)$ – потенциал внешнего поля; $a = (c_1 - c_2)(2\pi c_2)^{-1}$; $K = -c_1 m^{-1}$; граница раздела фаз $\gamma(t)$ – КН – представляется в параметрическом виде $x = x(s, t)$, $y = y(s, t)$, $s \in [0, l(t)]$, $l(t)$ – длина $\gamma(t)$.

Тогда задача построения изобар сводится к решению системы дифференциальных уравнений

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= u_1; \\ \frac{dy}{dt} &= u_2; \\ \frac{du_1}{dt} &= -2R[P(x, y, t) - P_0(x, y, t)] \frac{\partial P}{\partial x}; \\ \frac{du_2}{dt} &= -2R[P(x, y, t) - P_0(x, y, t)] \frac{\partial P}{\partial y}, \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

которая решается методом Рунге-Кутты 4-го порядка с начальным условием

$$M_0 = (x^0, y^0, u_1^0, u_2^0) \quad (28)$$

на отрезке $[0, 1]$ с шагом 0,01.

Здесь $u^0 = (u_1^0, u_2^0)$ – произвольный вектор; (x^0, y^0) удовлетворяет условию $P(x^0, y^0, t) = P^0$; значения $P^0(x, y)$ задаются картографом (геологом).

Таким образом, решения (27), (28) находят с помощью то-

чек (x_i, y_i) , $i = \overline{1, 10}$, и строят изобары P_0 в любой точке. Для зарисовки изолиний с уменьшенным количеством расчётных точек используют кубические сплайны.

Численный пример 2. Чтобы показать возможности предложенного метода, рассмотрим задачу построения единичной окружности $x^2 + y^2 = 1$, т. е. $P(x, y) = x^2 + y^2$, $P_0 = 1$. Пусть имеются выражения

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= u_1; \\ \frac{dy}{dt} &= u_2; \\ \frac{du_1}{dt} &= -4R(x + y^2 - 1)x; \\ \frac{du_2}{dt} &= -4R(x + y^2 - 1)y. \end{aligned}$$

Выберем начальную точку

$$M_0 = \left(0, 1, 1; -\frac{\partial P(x, y)}{\partial x} \Big|_{x=0, y=1} \Big/ \frac{\partial P(x, y)}{\partial x} \Big|_{x=0, y=0} \right).$$

Результаты численных расчётов приведены в табл. 1, где $\bar{x}$, $\bar{y}$ – расчётные значения координат единичной окружности. Как следует из табл. 1, отклонение

$$E = |\bar{x}^2 + \bar{y}^2 - 1| / (x^2 + y^2)$$

очень мало, что и подтверждает эффективность данного метода, который можно использовать для построения изолиний различных геополей.

Численный пример 3. При решении задачи Коши (27), (28) будем опираться на следующие данные. Контур нефтеносности является окружностью $R_K = 100$ м с центром в точке $O(0; 0)$. На окружности радиусом $R_H = 200$ м с тем же центром выберем восемь равномерно расположенных скважин с равными и постоянными дебитами $12,5$ м³/сут. Одна добывающая скважина размещена в точке $O_1(50; 0)$ с дебитом $Q = 100$ м³/сут. Расчёты произведём для изобар со значениями $P_0 = 105, 109, 111$ и 113 атм. Результаты вычислений приведены в табл. 2.

При построении изолинейных карт необходима проверка детерминированной составляющей картируемого параметра. Если такая проверка отсутствует, то построение не имеет смысла, поскольку в этом случае оценка дисперсии отклонений прогнозируемых параметров от точных значений $D(P_j - \hat{P}_j)$ примерно равняется исходной, определяемой по наблюдаемым значениям DP_j . Если же применить метод аппроксимации, не имеющий эффективной регуляризации и дающий неустойчивые результаты, то дисперсия существенно возрастет, и тогда получаемые оценки не получатся улучшить никакими процедурами восстановления функции.

Таблица 1

Результаты расчёта координат единичной окружности

Номер точки	$\bar{x}$	x	$\bar{y}$	y	E
1	0,836	0,80	0,551	0,600	0,020
2	0,921	0,90	-0,395	-0,430	0,030
3	0,481	0,48	-0,921	-0,870	0,040
4	-0,727	-0,73	-0,693	-0,700	0,020
5	-0,979	-0,96	0,225	0,250	0,040
6	-0,351	-0,35	0,942	0,920	0,030
7	0,583	0,58	0,812	0,800	0,001
8	0,980	0,97	-0,276	-0,251	0,030
9	0,514	0,50	-0,865	-0,861	0,010
10	-0,430	-0,40	-0,901	-0,915	0,030

Заключение. В отличие от интерполяционного полинома, которому присущ также краевой эффект, сплайн интерполяция является достаточно точным видом интерполяции, требующим от функции существенно меньшего запаса гладкости. Поэтому при восстановлении границ геополей значительной популярностью пользуются различные сплайновые методы интерполяции и сглаживания. Методами интерполяционных сплайнов, конечных элементов и кусочно-полиномиальной интерполяции с автоматической стыковкой можно оценивать коэффициенты аппроксимирующих полиномов по измерениям их входных и выходных координат (при отсутствии шумов). При наличии шумов измерений применяют сглаживающие сплайны, кусочно-полиномиальное сглаживание или статистические методы планирования экспериментов.

В настоящее время существует два подхода построения цифровой модели геопоя, в частности, цифровых моделей рельефа. Первый подход – это методы дистанционного зондирования земли, требующие устранения геометрических искажений. Второй – построение геополей путём интерполяции оцифрованных изолиний карт. Однако последний метод излишне трудоёмок и имеет низкую точность моделирования. Несмотря на это, оцифрованные материалы ещё долго будут безальтернативными. В связи с этим авторы

Таблица 2

Координаты изобар при эксцентрично расположенной добывающей скважине

Номер координаты	Координаты точек изобар при $P_{атм}$, атм. (МПа)			
	105 (10,64)	109 (11,04)	111 (11,25)	113 (11,45)
1	(62,2; -4,45)	(-38,9; -19,0)	(-71; -74,3)	(-110,1; -31)
2	(45,3; -16,03)	(-32,4; -36,8)	(-75; -10,1)	(-105; -65)
3	(61,9; -3,70)	(-11,0; -67,7)	(69,2; -132,1)	(-31,1; -170)
4	(41,7; 14,30)	(4,1; -79,1)	(171,1; -33)	(15,1; -161)
5	(63,1; 5,35)	(57,8; -92,8)	(174; -10)	(101,5; 170)
6	(60,2; 8,29)	(142,0; 10,2)	(168,3; 71)	(201; -141)
7	(39,0; 1,50)	(121,6; 60,6)	(59,3; 122,3)	(210,3; 86,1)
8	(38,1; -12,1)	(4,3; 79,4)	(-35,2; 117)	(78,1; 181,3)
9	(60,0; -12,70)	(-10,3; 68,6)	(-69; 47)	(-63; 150,1)
10	(41,7; 14,0)	(-37,4; 21,7)	(-75; 10)	(-117,3; 71)

разработали новый метод построения изолинейных карт, основанный на фундаментальной теореме Пуанкаре «О возвращаемости» и исследуют возможности данного метода на примере построения линий изобар.

Л и т е р а т у р а

1. Гаджиев Ч. М., Садыхов Р. А. А-оптимальный план размещения оконтуривающих скважин при разведке нефтяных месторождений // Измерительная техника. 2000. № 3. С. 20–24.
2. Троян В. Н., Соколов Ю. М. Методы аппроксимации геофизических данных на ЭВМ. Л.: ЛГУ, 1989.
3. Садыхов Р. А. Математические модели и эффективные алгоритмы решения оптимальных задач АСУ ТП добычи нефти: Автореф. дис. на соиск. учен. степ. докт. техн. наук. 1995.
4. Пашаев А. М., Садыхов Р. А., Рамазанов Ф. Г., На-

зирли Ф. С. Восстановление параметров геополей с учетом шумов измерений. Ч.1. Методы сглаживания, фильтрации и регуляризации // Измерительная техника. 2010. № 8. С. 3–11.

5. Грановский В. А., Сирая Т. Н. Методы обработки экспериментальных данных при измерениях. Л.: Энергоатомиздат, 1990.

6. Гилл Ф., Мюррей У., Райт М. Практическая оптимизация. М.: Мир, 1985.

7. Завьялов Ю. С., Квасов Б. Н., Мирошниченко В. Л. Методы сплайн-функций. М.: Наука, 1980.

8. Стольниц Э., Де Роуз Т., Салезин Д. Вейвлеты в компьютерной графике. Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая графика», 2002.

9. Васильев Ф. П. Численные методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1988.

Дата принятия: 04.04.2017.

621.3.088

Результаты наблюдений за навигационными космическими аппаратами на особых участках орбиты

О. В. ДЕНИСЕНКО¹, В. Н. ФЕДОТОВ¹, В. Л. ВОРОНОВ¹,
В. С. РЫЖОВ², А. С. ЗАВГОРОДНИЙ¹, И. В. РЯБОВ¹

¹Всероссийский научно-исследовательский институт физико-технических и радиотехнических измерений, г.п. Менделеево, Московская обл., Россия,
e-mail: zavgor@vniiftri.ru

²Научно-исследовательский институт радиоэлектронной техники Московского государственного технического университета имени Н.Э. Баумана, Москва, Россия

Получены результаты измерений мощности радионавигационных сигналов при прохождении навигационными космическими аппаратами особых участков орбит. В результате измерений обнаружены перепады уровня мощности, вызванные, возможно, изменением ракурса наблюдений навигационных космических аппаратов. Приведены результаты наблюдений за навигационными космическими аппаратами с использованием разных антенных систем. Полученные данные хорошо согласуются.

Ключевые слова: глобальные навигационные спутниковые системы (ГНСС), мощность сигнала, особые участки орбиты.

The radionavigation signal power measurement results when the navigation satellites pass the special orbit sections are obtained. Power level shifts were detected, caused, apparently, by a change in the viewing angle of the satellite. The joint observations by means of different antenna systems were carried out. The data is in good agreement.

Key words: global navigation satellite systems (GNSS), signal power, special orbit sections.

Метрологическое обеспечение глобальных навигационных спутниковых систем (ГНСС) – актуальная задача современной метрологии. С применением технологий ГНСС в различных отраслях экономики возрастает важность метрологического обеспечения и оперативного контроля основных характеристик навигационных систем.

На качество работы аппаратуры, использующей радио-

навигационные сигналы в различных целях (от радионавигационных определений в геодезии до контроля толщины снежного покрова и решения задач локации [1, 2]), влияет множество факторов. Важнейшие среди них – энергетические характеристики навигационного сигнала. Согласно интерфейсному контрольному документу [3] уровень мощности сигнала при приёме линейно-поляризованной антенной с ко-