

отдельно и размещаются в одном информационном слове-измерении. Реализация этого варианта обеспечивает:

повышение временной плотности контроля измеряемого параметра;

уменьшение погрешностей оценок, получаемых из анализа результатов измерений;

неизменность требований к пропускной способности канала передачи данных.

#### Л и т е р а т у р а

1. **Кукушкин С. С.** Теория конечных полей и информатика. Т. 1. Методы и алгоритмы, классические и нетрадиционные, основанные на использовании конструктивной теоре-

мы об остатках. М.: МО РФ, 2003.

2. **Макклеллан Дж., Рейдер Ч.** Применение теории чисел в цифровой обработке сигналов / Перевод с английского. М. Радио и связь, 1983.

3. **Калман Р., Фалб П., Арбиб М.** Очерки по математической теории систем / Перевод с английского. М.: Мир, 1971.

4. **Сейдж Э., Мелс Дж.** Теория оценивания и её применение в связи и управлении / Перевод с английского. М.: Связь, 1976.

5. **Кузнецов В. И.** Статистическая идентификация. Адаптивная фильтрация // Промышленные АСУ и контроллеры. 2014. № 7. С. 20–27.

Дата принятия: 22.09.2017.

## ИЗМЕРЕНИЯ В ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЯХ

656.25+06

### Аналитический синтез адаптивного фильтра Калмана на основе нерегулярных точных измерений

С. В. СОКОЛОВ, М. В. ПОЛЯКОВА, П. А. КУЧЕРЕНКО

Ростовский государственный университет путей сообщения (РГУПС),  
Ростов-на-Дону, Россия, e-mail: poliakova.marianna@yandex.ru

Аналитически решена задача построения адаптивного дискретного фильтра Калмана с использованием нерегулярных точных измерений. Показано, что возможность нерегулярных точных измерений позволяет в такте их появления точно определять параметры фильтра (коэффициент усиления и коэффициент адаптации), обеспечивающие нулевую погрешность оценивания. Подобная перестройка параметров алгоритма оценивания резко увеличивает его сходимость.

**Ключевые слова:** нерегулярные точные измерения, комплексированные измерительные системы, адаптивный фильтр Калмана, коэффициент усиления, коэффициент адаптации.

The problem of creation of the adaptive discrete filter of Kallman with use of irregular exact measurements is analytically solved. The possibility of irregular exact measurements allows to determine precisely in a step of their emergence filter parameters (coefficient of strengthening and coefficients of his adaptation) providing a zero error of estimation. Similar reorganization of parameters of an algorithm of estimation sharply increases his convergence that is illustrated by the corresponding example.

**Key words:** irregular exact measurements, kompleksirovanny measuring systems, adaptive filter of Kallman, strengthening coefficient, adaptation coefficient.

Основой построения различных комплексированных измерительных систем является коррекция первичных измерений датчиков, погрешности которых растут со временем, по некоторым другим измерениям, выступающих в качестве эталонных. Коррекция, как правило, производится через некоторые, не всегда одинаковые (зачастую случайные) интервалы времени, превышающие такт первичных измерений. Необходимость повышения точности оценивания фазовых переменных объекта за счёт точных результатов измерений, полученных в некоторые произвольные моменты времени,

возникает во многих технических системах. Среди них можно отметить:

инерциально-спутниковые навигационные системы, в которых осуществляется коррекция результатов измерений инерциальной системы, погрешности которой растут со временем, по измерениям спутниковой системы, выступающей в качестве эталонной [1, 2];

системы, оценивающие навигационные параметры робота (или человека) с учётом нулевой скорости в момент касания ступни (или нижней точки колеса) поверхности земли [3];

системы, корректирующие параметры ориентации и навигации различных транспортных систем (морских, железнодорожных и т. д.) в момент прохождения ими базовых (реперных) точек с точно известными координатами [4];

комбинированные навигационные системы на базе инерциальных датчиков. Такие системы предназначены для обеспечения навигации внутри помещений и замкнутых пространств [5].

В настоящее время подобную коррекцию проводят при непосредственной замене текущих оценок навигационных (или других) переменных соответствующими точными измерениями. Параметры алгоритма оценивания при этом остаются без изменений. Однако рост погрешностей оценивания на временном интервале, определённом моментом следующего точного измерения, не уменьшается (что и происходит в вышеупомянутых измерительных системах) [3–6]. В связи с этим возникает необходимость адаптации параметров алгоритма оценивания (далее – коэффициента усиления фильтра) по полученным точным измерениям. Такой подход позволит существенно повысить точность оценивания на временных интервалах.

**Постановка задачи.** Так как точные измерения производятся в дискретные моменты времени, то для решения поставленной задачи рассмотрим следующий алгоритм оценивания – фильтр Калмана. Это наиболее часто используемый вариант при решении вышеперечисленных задач. В фильтре Калмана оценка вектора состояния системы  $\mathbf{X}_k$  в  $(k+1)$ -й момент времени определяется по формуле [6]:

$$\hat{\mathbf{X}}_{k+1} = \Phi_k \hat{\mathbf{X}}_k + K_k (\mathbf{Z}_k - H_k \hat{\mathbf{X}}_k), \quad (1)$$

где  $\Phi_k$  – переходная матрица состояния системы;  $\hat{\mathbf{X}}_k$  – оценка вектора  $\mathbf{X}_k$  состояния системы в  $k$ -й момент времени;  $K_k$  – коэффициент усиления фильтра;  $\mathbf{Z}_k$  – вектор измерений;  $H_k$  – матрица измерений, отображающая пространство векторов состояния системы в пространство векторов измерений.

Вектор измерений можно найти из выражения

$$\mathbf{Z}_k = H_k \mathbf{X}_k + \mathbf{V}_k,$$

где  $\mathbf{V}_k$  – векторная случайная центрированная гауссова последовательность с дисперсионной матрицей  $R_k$ ;  $\mathbf{X}_k$  – вектор состояния системы в  $k$ -й момент времени.

Ввиду того, что формулируемая проблема является задачей адаптации алгоритма оценки, далее будем применять адаптивный вариант фильтра Калмана, в котором коэффициент усиления определяется как [7]:

$$K_k = P_{k/(k-1)} H_k^T (H_k P_{k/(k-1)} H_k^T + R_k)^{-1}, \quad (2)$$

$$P_{k/(k-1)} = \mu_k \Phi_k P_{k-1} \Phi_k^T + Q_k; \quad (3)$$

$$P_k = (E - K_k H_k) P_{k/(k-1)},$$

где  $P_{k/(k-1)}$  – экстраполированная ковариационная матрица;  $\mu_k$  – диагональная матрица коэффициентов адаптации фильтра;  $Q_k$  – дисперсионная матрица шума системы;  $E$  – единичная матрица.

Исходя из представленной формы (2) коэффициента усиления фильтра, задачу его адаптации по точным измерениям сформулируем как задачу нахождения матрицы  $\mu_k$  из условия совпадения в соответствующий момент времени оценки вектора  $\hat{\mathbf{X}}_{k+1}$  (1) с точным вектором состояния системы  $\mathbf{X}_{k+1}$  (точными измерениями).

**Решение задачи.** Для решения поставленной задачи используем полное выражение Калмановского коэффициента усиления, полученное подстановкой (3) в (2):

$$K_k = (\mu_k \Phi_k P_{k-1} \Phi_k^T + Q_k) H_k^T \times \\ \times [H_k (\mu_k \Phi_k P_{k-1} \Phi_k^T + Q_k) H_k^T + R_k]^{-1}.$$

Для удобства последующего решения обозначим

$$(\mu_k \Phi_k P_{k-1} \Phi_k^T + Q_k) H_k^T = \gamma_k \quad (4)$$

и выразим коэффициент:

$$K_k = \gamma_k (H_k \gamma_k + R_k)^{-1}.$$

Тогда уравнение (1) примет вид:

$$\hat{\mathbf{X}}_{k+1} - \Phi_k \hat{\mathbf{X}}_k = \gamma_k (H_k \gamma_k + R_k)^{-1} (\mathbf{Z}_k - H_k \hat{\mathbf{X}}_k). \quad (5)$$

Уравнение (5) относительно матрицы  $\mu_k$ , входящей в матрицу  $\gamma_k$ , представляет собой векторное уравнение, решение которого традиционными численными методами требует многократного применения процедуры обращения матрицы. Для возможности аналитического решения уравнения (5) проведём следующие построения. Так как по условиям задачи  $\hat{\mathbf{X}}_{k+1} = \mathbf{X}_{k+1}$ , то введя обозначения  $\mathbf{X}_{k+1} - \Phi_k \hat{\mathbf{X}}_k = \mathbf{X}_*$ ,  $\mathbf{Z}_k - H_k \hat{\mathbf{X}}_k = \mathbf{Z}_*$ , представим уравнение (5) как

$$\mathbf{X}_* = \gamma_k (H_k \gamma_k + R_k)^{-1} \mathbf{Z}_*. \quad (6)$$

Умножив обе части уравнения (6) на обратную матрицу

$[\gamma_k (H_k \gamma_k + R_k)^{-1}]^{-1}$ , запишем

$$(H_k \gamma_k + R_k) \gamma_k^{-1} \mathbf{X}_* = \mathbf{Z}_*$$

или

$$R_k \gamma_k^{-1} \mathbf{X}_* = \mathbf{Z}_* - H_k \mathbf{X}_*. \quad (7)$$

Продолжив умножение обеих частей уравнения (7) на матрицу  $\gamma_k R_k^{-1}$ , приведём его к линейному виду относительно  $\gamma_k$ , а следовательно, и относительно  $\mu_k$ :

$$\mathbf{X}_* = \gamma_k R_k^{-1} (\mathbf{Z}_* - H_k \mathbf{X}_*). \quad (8)$$

Для окончательного решения уравнения (8) относительно  $\mu_k$  раскроем выражение (4). В этом случае получим

$$\mathbf{X}_* = (\mu_k \Phi_k P_{k-1} \Phi_k^T H_k^T R_k^{-1} + Q_k H_k^T R_k^{-1}) (\mathbf{Z}_* - H_k \mathbf{X}_*). \quad (9)$$

Для упрощения последующего вывода введём обозначения:

$$\Phi_k P_{k-1} \Phi_k^T H_k^T R_k^{-1} = \Delta_{k,k-1};$$

$$Q_k H_k^T R_k^{-1} = U_k.$$

Уравнение (9) представим в виде

$$\mathbf{X}_* = \mu_k \Delta_{k,k-1} (\mathbf{Z}_* - H_k \mathbf{X}_*) + U_k (\mathbf{Z}_* - H_k \mathbf{X}_*). \quad (10)$$

Обозначив векторы

$$\Delta_{k,k-1} (\mathbf{Z}_* - H_k \mathbf{X}_*) = \Delta_*, \quad U_k (\mathbf{Z}_* - H_k \mathbf{X}_*) = \mathbf{U}_*,$$

приведём уравнение (10) к следующей форме:

$$\mathbf{X}_* - \mathbf{U}_* = \mu_k \Delta_*. \quad (11)$$

Уравнение (11) допускает аналитическое решение относительно всех элементов диагональной матрицы  $\mu_k$  при учёте возможности представления произведения  $\mu_k \Delta_*$  в виде  $\Delta_{*diag} \mu_{k\text{ vect}}$ , где

$$\mu_{k\text{ vect}} = \begin{bmatrix} \mu_{k1} \\ \mu_{k2} \\ \vdots \\ \mu_{kn} \end{bmatrix},$$

$\Delta_{*i}, \mu_{ki}, i=1, \dots, n$  – элементы вектора  $\Delta_*$  и матрицы  $\mu_k$ , соответственно.

В этом случае запишем искомое выражение вектора элементов коэффициента адаптации в виде

$$\Delta_{*diag}^{-1} (\mathbf{X}_* - \mathbf{U}_*) = \mu_{k\text{ vect}}, \quad (12)$$

где  $\Delta_{*diag}^{-1}$  – обратная матрица, легко вычисляемая аналитически в силу диагональности:

$$\Delta_{*diag}^{-1} = \begin{bmatrix} 1/\Delta_{*1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1/\Delta_{*2} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1/\Delta_{*n} \end{bmatrix}.$$

Таким образом, найденное решение нелинейного векторного уравнения (5) в виде (12) позволяет аналитически решить поставленную задачу адаптации калмановского алгоритма оценки по точным измерениям. После определения текущего значения матрицы  $\mu_k$  возникает возможность альтернативного использования полученного результата: или сохранить её значение в выражении (3) неизменным до получения следующего вектора точных измерений, или, учитывая, что значение матрицы  $P_k$  уже скорректировано, оставить матрицу  $\mu_k$  единичной также до получения нового вектора точных измерений. Очевидно, что для каждого конкретного объекта этот вопрос должен решаться с учётом особенностей этого объекта.

В приведённом ниже примере, иллюстрирующем общую эффективность предложенного подхода, рассмотрим первый вариант адаптации.

*Пример.* При решении задачи измерения текущих параметров движения объекта используемые уравнения движения его центра масс по сфере Земли имеют вид:

$$\dot{\varphi} = v_y / (r + h); \quad (13)$$

$$\dot{\lambda} = v_x / [(r + h) \cos \varphi], \quad (14)$$

где  $\varphi, \lambda$  – географические широта и долгота объекта, соответственно;  $r$  – радиус Земли;  $v_y, v_x$  – проекции скорости объекта на соответствующие оси географической системы координат;  $h$  – высота объекта.

Будем полагать, что объект в течение времени 0–1000 с движется из точки с координатами  $\varphi_0 = 0,8$  рад,  $\lambda_0 = 0,3$  рад и имеет постоянную скорость  $v = 20$  м/с. Объект движется по поверхности Земли по локсодромической траектории с азимутальным углом  $A = 0,2$  рад. Рельеф поверхности приводит к случайному изменению высоты объекта  $h$  с нулевым математическим ожиданием и дисперсией  $Q = (0,15 \text{ м})^2$ . В этом случае проекции скорости объекта на оси географической системы координат можно записать как

$$v_x = v \sin A; \quad v_y = v \cos A.$$

Навигационная система объекта – комплексированная, на базе слабой интеграции инерциальной и спутниковой навигационных систем. С интервалами 20, 15 и 30 с в навигационную систему поступают спутниковые измерения, считающиеся точными, в остальные моменты времени с тактом  $\tau = 0,1$  с используются измерения инерциальной навигационной системы по каналам  $\lambda, \varphi$ . Для этих каналов матрица шумов измерений примет вид

$$R_k = \begin{bmatrix} 4,2 \cdot 10^{-10} & 0 \\ 0 & 9,5 \cdot 10^{-10} \end{bmatrix}.$$

В силу характера движения объекта изменения его координат на заданном интервале времени незначительные, что позволяет применять линеаризованный вариант уравнений навигации (13), (14):

$$\dot{\varphi}(t) = \frac{v_y(r + 2h_0)}{(r + h_0)^2} - \frac{v_y}{(r + h_0)^2} h; \quad (15)$$

$$\dot{\lambda}(t) = \frac{v_x}{(r + h_0) \cos \varphi_0} \left[ \frac{r + 2h_0}{r + h_0} - \frac{\sin \varphi_0 \varphi_0}{\cos \varphi_0} \right] - \frac{v_x}{(r + h_0)^2 \cos \varphi_0} h + \frac{v_x \sin \varphi_0}{(r + h_0) \cos^2 \varphi_0} \varphi. \quad (16)$$

Для оценки погрешностей линеаризации было проведено сравнительное моделирование уравнений (13)–(16). Погрешности линеаризации по широте и долготе не превысили по модулю значения  $2 \cdot 10^{-12}$  рад, что подтверждает

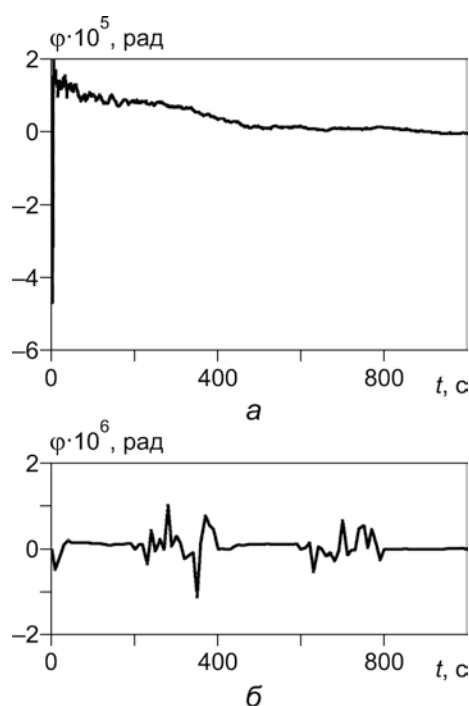


Рис. 1. График погрешностей оценивания широты без адаптации (а) и с адаптацией (б)

возможность адекватного использования в данном примере линеаризованных уравнений (15), (16).

Дискретный фильтр, построенный по уравнениям объекта (15), (16), в принятых обозначениях имеет вид:

$$\hat{X}_{k+1} = \Phi_k \hat{X}_k + \Omega_k + K_k (Z_k - H_k \hat{X}_k), \quad (17)$$

$$\text{где } \hat{X}_k = \begin{bmatrix} \hat{\phi} \\ \hat{\lambda} \end{bmatrix}; \Phi_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \tau v_x \operatorname{tg} \varphi_0 & 1 \end{bmatrix}; \Omega_k = \begin{bmatrix} \tau v_y / r \\ \tau v_x (1 - \varphi_0 \operatorname{tg} \varphi_0) \end{bmatrix};$$

$$Q_k = \begin{bmatrix} \left( \tau \frac{v_y}{r^2} 0,15 \right)^2 & \frac{v_y}{r^2} \frac{v_x}{r^2 \cos \varphi_0} (0,15 \tau)^2 \\ \frac{v_y}{r^2} \frac{v_x}{r^2 \cos \varphi_0} (0,15 \tau)^2 & \left( 0,15 \tau \frac{v_x}{r^2 \cos \varphi_0} \right)^2 \end{bmatrix};$$

$$H_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Графики погрешностей оценивания, полученные при непосредственной реализации фильтра (17) (без адаптации по спутниковым измерениям,  $\mu_k$  – единичная матрица) представлены на рис. 1, а и 2, а, где показаны существенные ошибки процесса оценивания (не менее 60 м по широте и 70 м – по долготе). При организации адаптивного фильтра в соответствии с приведённым выше алгоритмом погрешности оценивания имеют вид, представленный на рис. 1, б и 2, б. Применение

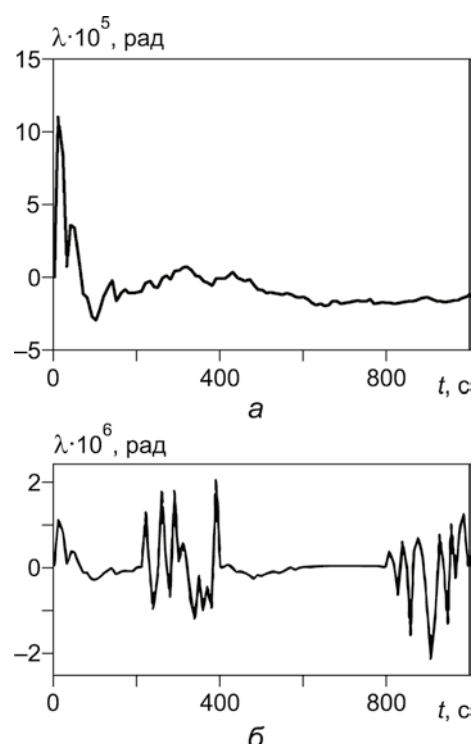


Рис. 2. График погрешностей оценивания долготы без адаптации (а) и с адаптацией (б)

предложенного алгоритма позволяет обеспечить уровень погрешностей оценивания (до 0,3 м по широте и 2,5 м – по долготе), удовлетворяющий требованиям не только к современным, но и к перспективным навигационно-измерительным комплексам.

**Заключение.** Из сравнения уровней погрешностей оценивания, обеспечиваемых алгоритмами традиционной и предложенной адаптивной фильтрации, следует вывод о преимуществах последнего, несмотря на некоторое увеличение объёма вычислительных затрат (весьма незначительное по отношению к общим затратам для традиционного фильтра). Простота и точность предложенного алгоритма позволяют эффективно применять его для широкого класса информационно-измерительных систем.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты №№ 18-07-00126, 16-07-00032).

#### Л и т е р а т у р а

1. Литвин А. М., Малюгина А. А., Миллер А. Б., Степанов А. Н., Чиркин Д. Е. Типы ошибок в инерциальных навигационных системах и методы их аппроксимации // Информационные процессы. 2014. Т. 14. № 4. С. 326–339.
2. Резниченко В. И., Малеев П. И., Смирнов М. Ю. Спутниковая коррекция параметров ориентации морских объектов // Навигация и гидрография. 2008. Т. 27. С. 25–32.
3. Луни М. Оптимизация навигационных характеристик мобильного робота // Компоненты и технологии. 2012. № 1. С. 48–50.

4. **Цыплаков А. А.** Введение в моделирование в пространстве состояний // Квантиль. 2011. № 9. С. 1–24.

5. **Шилина В. А.** Система инерциальных датчиков для навигации внутри помещений // Молодежный научно-технический вестник. МГТУ им. Н. Э. Баумана. 2015. № 4. [Электрон. журнал]: <http://sntbul.bmstu.ru/doc/778220.html> (дата обращения: 01.08.2017).

6. **Полякова М. В., Соколова О. И.** Повышение точности адаптивной фильтрации на основе использования непе-

риодических точных наблюдений // Технологии разработки информационных систем ТРИС. 2016. С. 61–64.

7. **Великанова Е. П., Ворошилин Е. П.** Адаптивная фильтрация координат маневрирующего объекта при изменениях условий передачи в радиолокационном канале // Доклады Томского государственного университета систем управления и радиоэлектроники. 2012. № 2 (26). Ч. 1. С. 29–35.

Дата принятия: 05.10.2017.

## **ЛИНЕЙНЫЕ И УГЛОВЫЕ ИЗМЕРЕНИЯ**

621.9.08: 531.7

### **Оценка погрешности координатных измерений геометрических параметров деталей на основе априорных данных**

**М. Ф. ДАНИЛОВ, А. П. ИВАНОВА, А. А. САВЕЛЬЕВА**

*Научно-исследовательский институт оптико-электронного приборостроения,  
Сосновый Бор, Ленинградская обл., Россия, e-mail: DanilovMF@nioer.ru*

*Предложен способ оценки погрешности координатных измерений геометрических параметров деталей на основе информации, содержащейся в конструкторской и технологической документации. Априорная оценка погрешности координатных измерений необходима для оптимизации методик измерений и планирования измерений.*

**Ключевые слова:** координатно-измерительная машина, планирование измерений.

*The method of error evaluation of coordinate measurements of parts geometrical parameters based on the data, containing in design and technological documentation is proposed. An a priori evaluation of error of coordinate measurements is required for optimizing of measurement procedures and for scheduling of measurements.*

**Key words:** coordinate measuring machine, scheduling of measurements.

Для уменьшения случайных погрешностей обычно осуществляют многократные измерения геометрических параметров деталей. В действующем стандарте [1] описана общая методика выполнения многократных измерений и обработки их результатов. При этом в [1] не определяется требуемое число измерений и рекомендуется устанавливать необходимость прямых многократных измерений в конкретных методиках измерений (МИ). При разработке соответствующих МИ и планировании измерений желательно заранее знать оценки погрешности определения контролируемых параметров. В настоящей работе предлагается способ оценки погрешности на основе априорной информации, содержащейся в конструкторской и технологической документации.

Кратко рассмотрим основные случаи, когда возникает необходимость многократных измерений: во-первых, для определения погрешности измерения; во-вторых, при решении так называемых плохо обусловленных, или неустойчивых,

задач [2], незначительные погрешности исходных данных которых приводят к большим погрешностям результатов расчётов. В данном случае под исходными данными подразумеваются координаты точек на контролируемой поверхности детали.

Примером плохо обусловленной задачи служит измерение геометрических размеров малых сегментов окружностей, цилиндров и сферических поверхностей [2]. На практике чаще всего встречается плохо обусловленная задача измерения соосности двух цилиндров, когда высота  $h$  одного (базового) много меньше его радиуса  $R$ . Это приводит к большой погрешности определения углового положения оси этого цилиндра и, соответственно, к большой погрешности измерения соосности цилиндров. Таким образом, неустойчивые задачи измерения геометрических параметров деталей определяются крупномасштабной геометрией контролируемых поверхностей, задаваемой в конструкторской документации.