

9. ГОСТ 12635–67. Материалы магнитомягкие высокочастотные. Методы испытаний в диапазоне частот от 10 кГц до 1 МГц.

10. ГОСТ Р 53934–2010. Прокат тонколистовой холодно-

катаный из электротехнической анизотропной стали. Технические условия.

Дата принятия: 15.12.2017.

ОБЩИЕ ВОПРОСЫ МЕТРОЛОГИИ И ИЗМЕРИТЕЛЬНОЙ ТЕХНИКИ

681.2.088+004.67

Интервальный метод бисекции для метрологически обоснованного поиска корней уравнений с неточно заданными исходными данными

К. К. СЕМЁНОВ, А. А. ЦЕЛИЩЕВА

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого,
Санкт-Петербург, Россия, e-mail: semenov.k.k@gmail.com

Представлена модификация метода бисекции для поиска корня нелинейного уравнения. Данная модификация позволяет использовать метод бисекции для решения уравнений косвенных измерений в полном соответствии с метрологическими требованиями, предъявляемыми к результатам косвенных измерений. Показано, что использование сведений о неточности коэффициентов уравнения, являющихся результатами прямых измерений, позволяет ускорить поиск корня и сопроводить его достоверной оценкой характеристик погрешности.

Ключевые слова: поиск корней нелинейных уравнений, бисекция, косвенные измерения, метрологическое автосопровождение вычислений с неточными данными.

This paper presents the modification of bisection method for searching the nonlinear equation's root that is applicable for solving the indirect measurements equations in full accordance with metrological requirements for their roots as indirect measurements results. The information using on the inaccuracy of the equation coefficients that are the direct measurements results allows speeding up the searching the root and supporting it with the reliable estimation of its error characteristics.

Key words: nonlinear equations root searching, bisection, indirect measurements, metrological self-tracking for inaccurate data processing.

Получаемые в ходе измерений результаты всегда являются неточными. Их значения возмущены погрешностями и потому неопределёнными. Любые результаты расчётов с такими данными также неточны, так как наследуют от них погрешность вне зависимости от того, насколько образцово, корректно и методически безошибочно вычисления были организованы и исполнены. Для обоснованного принятия решений по полученным результатам расчётов необходима оценка пределов их возможной погрешности, выполняемая в полном соответствии с метрологическими требованиями. Расчёты, выполняемые с неточными данными, часто сводятся либо к непосредственным вычислениям значений заданных функций, либо к решению поисковых задач, связанных с определением характерных значений: корней уравнений, точек оптимума, коэффициентов аппроксимирующих функций и т. д. Известны методы, позволяющие реализовать метрологическое сопровождение результатов прямых вычислений в полной мере [1–3]. При решении же поисковых задач часто используют специальные подходы, которые требуют учёта специфики этих задач при оценке погрешности результатов, унаследованной от исходных данных.

Задача оценки корней нелинейных уравнений встречается в метрологической практике при выполнении косвенных и совместных измерений. Действительно, многие физические величины не могут быть измерены непосредственно. Тогда необходимо привлечение математических моделей, описывающих исследуемый объект. Использование математических моделей позволяет осуществить необходимые измерения косвенно, когда ряд величин измеряется напрямую, а искомые значения вычисляются по полученным результатам с помощью известных уравнений взаимосвязи. С математической точки зрения подобные вычисления часто представляют собой решение уравнения с коэффициентами, известными неточно. Поиск корней уравнения осуществляется в вычислительном устройстве измерительной системы, реализующей косвенное измерение, и должен быть подвержен метрологическому контролю, как и любая другая измерительная процедура или преобразование [4–6].

На практике для нахождения решений нелинейных уравнений используют различные итерационные методы. Их применение требует предварительного задания начального

приближения значения корня или отрезка, гарантированно содержащего корень. Затем на каждой итерации метода производят уточнение оценки корня вплоть до достижения необходимой точности. При этом достаточно часто погрешность исходных данных (коэффициентов уравнения) во внимание не принимается и не учитывается, что может приводить к искажениям получаемых результатов. Без учёта погрешности, наследуемой ими от исходных данных, нельзя в полной мере провести метрологическое сопровождение процесса получения результата косвенных измерений.

Уравнения косвенных измерений для большинства метрологических задач, как правило, имеют единственное решение, так как уравнения взаимосвязи между величинами, измеряемыми косвенно и напрямую, задают однозначное соответствие между ними. При поиске корней обычно не возникает сложностей, за исключением выбора начального приближения. В метрологии в первую очередь применяют методы, позволяющие гарантированно получить корень уравнения. Поскольку коэффициенты решаемых уравнений представляют собой результаты прямых измерений и поэтому неточны, то стоит ожидать, что после некоторого количества итераций численная процедура поиска корня перестанет уточнять результат, поскольку последний будет также неточен, так как унаследует неопределённость исходных данных. В таких условиях, начиная с некоторого шага, выполнение новых итераций не приведёт к улучшению результатов. Следовательно, при неточных исходных данных итерационный процесс следует завершать раньше.

В настоящей работе, посвящённой метрологически обоснованному решению уравнений косвенных измерений, авторы предлагают использовать модификацию метода бисекции. Вносимые в метод изменения позволяют учесть погрешности исходных данных выполняемых расчётов при оценке корня и обоснованно назначить момент завершения итерационного процесса.

Метод бисекции для поиска корней уравнений косвенных измерений. При поиске корней уравнений часто используют метод бисекции, позволяющий гарантированно получить оценку корня с заданной точностью [7]. В этом методе корень уравнения $f(x)=0$ находят путём дробления отрезка $I_1=[a_1, b_1]$, локализирующего корень, и отбрасыванием частей отрезка, которые гарантированно корень не содержат. Такие процедуры позволяют итерационно уточнять область локализации корня вплоть до необходимых размеров. Однако требуется, чтобы функция f на границах интервала I_1 принимала значения разных знаков ($f(a_1)f(b_1)<0$). В измерительных задачах функция f обычно является монотонной в пределах интервала I_1 и имеет единственный корень на данном отрезке. На каждом шаге алгоритма текущий интервал локализации корня делится на две равные части и из них определяется та, что содержит корень. Для этого вычисляется знак значения функции в середине интервала локализации. Таким образом, на каждой итерации интервал локализации корня сужается вдвое.

Пусть интервал локализации на i -м итерационном шаге есть $I_i=[a_i, b_i]$, а $f(x)$ – функция, корень которой требуется найти.

Если знаки функции f на левой границе интервала I_i и в его середине совпадают ($f(a_i)f(c_i)>0$, где $c_i=(a_i+b_i)/2$), то корня в этой половине интервала I_i нет. Тогда в качестве интервала I_{i+1} локализации корня на следующем шаге следует взять правую половину интервала I_i , т. е. $I_{i+1}=[c_i, b_i]$. В случае, когда $f(a_i)f(c_i)<0$, в качестве интервала I_{i+1} необходимо выбрать левую половину интервала I_i , т. е. $I_{i+1}=[a_i, c_i]$. Такая процедура позволяет корректно получить оценку корня, а её точность определяется шириной интервала локализации на последнем выполненном шаге.

Проблемы в применении метода возникают при учёте погрешностей исходных данных, так как возможность определить, какую именно часть интервала I_i следует отбросить, исчезает, когда из-за погрешностей коэффициентов функции $f(x)$ нельзя определённо сказать, какое из представленных выше неравенств выполнено. Возможна ситуация, при которой действительный корень уравнения может потенциально содержаться как в левой, так и в правой половине интервала I_i . На рис. 1 приведён пример одной итерации метода бисекции поиска корня уравнения $f(x)=0$, коэффициенты которого заданы неточно. Введены обозначения: 1 – $f(x)$; 2 – $(f(x)-\Delta f(x))$; 3 – $(f(x)+\Delta f(x))$, где $\Delta f(x)$ – предел модуля абсолютной погрешности значения функции $f(x)$ в точке x . Поиск корня ведётся на интервале локализации $[a_i, b_i]$, но при этом оба значения в паре $f(a_i)\pm\Delta f(a_i)$ и в паре $f(b_i)\pm\Delta f(b_i)$ имеют одинаковые знаки, а значения в паре $f(c_i)\pm\Delta f(c_i)$ при $c_i=(a_i+b_i)/2$ – разные. На рис. 1 показана область возможных значений некоторой функции $f(x)$ при различных коэффициентах, обусловленных погрешностями при их измерениях. Из-за этих погрешностей функция $f(x)$ в середине интервала локализации I_i может в действительности принимать как положительное, так и отрицательное значение. Выбрать, какую именно половину интервала I_i надлежит в такой ситуации отбросить, не представляется возможным.

Если пренебречь наличием у коэффициентов уравнения $f(x)=0$ погрешности, то подобных затруднений не возникнет, но будет неизвестно, насколько точна полученная оценка корня. Игнорировать данное обстоятельство нельзя, поскольку это может привести к занижению погрешности оценки корня, что недопустимо. Поэтому для преодоления возникшего затруд-

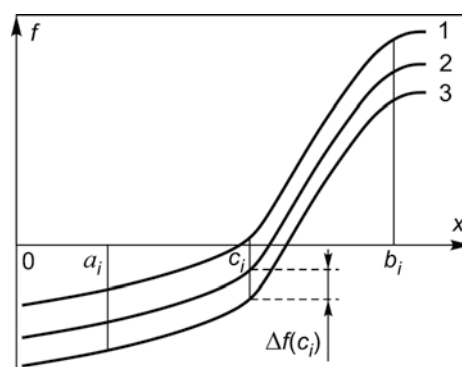


Рис. 1. Пример итерации метода бисекции для поиска корня уравнения $f(x)=0$, коэффициенты которого заданы неточно:
1 – $f(x)$; 2 – $(f(x)-\Delta f(x))$; 3 – $(f(x)+\Delta f(x))$

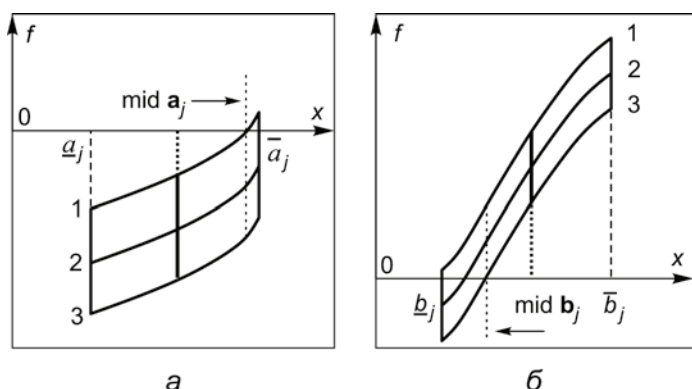


Рис. 2. Поиск левой (а) и правой (б) границ возможных значений корня уравнения $f(x)=0$: 1 – $f(x)$; 2 – $(f(x)-\Delta f(x))$; 3 – $(f(x)+\Delta f(x))$

нения авторы предлагают модифицировать метод бисекции с помощью метода метрологического автосопровождения вычислений с неточными данными [2]. Это позволит получить итоговую оценку корня в виде интервала всех его потенциально возможных значений с учётом погрешности исходных данных, что соответствует всем требованиям действующих метрологических норм. Такая модификация позволит метрологически сопроводить численную процедуру поиска корня и гарантировать достоверность его оценки. При этом алгоритм решения уравнения не вносит никакой методической погрешности в итоговые результаты, чего может и не быть при использовании других методов поиска корней.

Для учёта неточности коэффициентов уравнения использован метод из работы [2], построенный на автоматическом дифференцировании и таком описании погрешностей исходных данных, которое одновременно учитывает их систематические и случайные составляющие [8]. Данная комбинация обладает важным свойством – возможностью учитывать погрешности исходных данных и выполнять достоверную оценку погрешностей результатов расчётов в темпе нахождения корня решаемого уравнения. В дальнейшем такую комбинацию будем называть методом метрологического автосопровождения [2]. С помощью метода метрологического автосопровождения для значений функции f предлагается определять пределы погрешности. Указанная погрешность возникает вследствие неточности коэффициентов решаемого уравнения. Это позволяет надёжно оценить пределы возможных значений корня x , пределы его унаследованной погрешности и обойти затруднение, проиллюстрированное на рис. 1.

Пусть, как и прежде, решается уравнение $f(x)=0$ и задан начальный интервал локализации корня $I_1=[a_1, b_1]$. На каждом i -м шаге определяется значение $c_i=(a_i+b_i)/2$ середины текущего отрезка $I_i=[a_i, b_i]$ локализации корня, $i=1, 2, \dots$. Во время каждой итерации предлагаемого алгоритма оценивается величина $\Delta f(c_i)$ – предел допускаемой погрешности значения функции f в точке c_i , унаследованной от неточности коэффициентов уравнения. Если значения $(f(c_i)-\Delta f(c_i))$, $(f(c_i)+\Delta f(c_i))$ имеют одинаковый знак, то интервал локализации корня для следующей итерации определяется точно так же, как для классического метода бисекции: $I_{i+1}=[c_i, b_i]$, если $f(a_i)f(c_i)>0$ и $I_{i+1}=[a_i, c_i]$,

если $f(c_i)f(b_i)>0$. Если же значения $(f(c_i)-\Delta f(c_i))$, $(f(c_i)+\Delta f(c_i))$ имеют разные знаки (см. рис. 1), то нельзя определённо сказать, в какой половине текущего интервала локализации I_i находится корень и какую его половину следует отбросить. Следовательно, c_i следует считать потенциально возможным значением корня уравнения (функция f может иметь нулевое значение в точке c_i). При выполнении условия $(f(c_i)-\Delta f(c_i))(f(c_i)+\Delta f(c_i))<0$ происходит переход к определению границ интервала возможных значений корня, обусловленных погрешностями коэффициентов решаемого уравнения, что составляет второй этап предлагаемого метода.

На последней итерации, предшествующей выполнению условия $(f(c_i)+\Delta f(c_i))(f(c_i)-\Delta f(c_i))<0$, интервал I_i локализации корня был уточнён до границ $[a_i, b_i]$. В составе данного отрезка необходимо выделить ту его часть J , любая точка из которой может являться корнем уравнения при некоторых возможных значениях неточных коэффициентов уравнения. Для левой половины $[a_i, c_i]$ интервала локализации I_i применяется следующее правило. Обозначим как $a_j=[a_i, \bar{a}_j]$ промежуток, содержащий левую границу интервала J возможных значений корня уравнения $f(x)=0$ на j -й итерации второго этапа предлагаемого алгоритма. Естественно, что при $j=1$ данный интервал совпадает с левой частью интервала I_i , т. е. $a_1=[a_i, c_i]$. Если в середине $\text{mid } a_j=(a_j+\bar{a}_j)/2$ интервала a_j значения $(f(\text{mid } a_j)-\Delta f(\text{mid } a_j))$, $(f(\text{mid } a_j)+\Delta f(\text{mid } a_j))$ имеют один знак, то отбрасывается его левая половина и $a_{j+1}=[\text{mid } a_j, \bar{a}_j]$. Здесь $\Delta f(\text{mid } a_j)$ – оценка возможных значений погрешности значения функции f в точке $\text{mid } a_j$. В противном случае отбрасывается правая половина и $a_{j+1}=[a_j, \text{mid } a_j]$. Данное правило сужения интервала показано на рис. 2, а: на первом шаге будет отброшена левая часть отрезка a_1 ; искомое значение левой границы интервала J стремится к границе, отмеченной пунктирной линией. Введены обозначения: 1 – $f(x)$; 2 – $(f(x)-\Delta f(x))$; 3 – $(f(x)+\Delta f(x))$, где $\Delta f(x)$ – предел модуля абсолютной погрешности значения функции $f(x)$ в точке x .

Для правой половины $[c_i, b_i]$ интервала локализации I_i применяется аналогичное правило. Пусть $b_j=[b_j, \bar{b}_j]$ – интервал локализации правой границы искомого интервала J возможных значений корня уравнения $f(x)=0$ на j -й итерации второго этапа предлагаемого алгоритма. При $j=1$ этот интервал совпадает с правой частью интервала I_i , т. е. $b_1=[c_i, b_i]$. Если в середине $\text{mid } b_j=(b_j+\bar{b}_j)/2$ интервала b_j значения $(f(\text{mid } b_j)-\Delta f(\text{mid } b_j))$, $(f(\text{mid } b_j)+\Delta f(\text{mid } b_j))$ имеют один знак, то отбрасывается его левая половина и $b_{j+1}=[b_j, \text{mid } b_j]$.

Иначе отбрасывается правая половина и $b_{j+1}=[\text{mid } b_j, \bar{b}_j]$. Данное правило иллюстрирует рис. 2, б: на первом шаге будет отброшена правая часть интервала b_1 ; искомое значение правой границы интервала J стремится к границе, отмеченной пунктирной линией.

На первый взгляд, поиск корня решаемого уравнения $f(x)=0$ следует производить до тех пор, пока оба значения в парах $f(\text{mid } a_j) \pm \Delta f(\text{mid } a_j)$ и $f(\text{mid } b_j) \pm \Delta f(\text{mid } b_j)$ имеют одинаковые знаки. Авторы для остановки итерационного процесса предлагают применить следующее правило, согласованное с метрологическими требованиями к результату косвенного

измерения. На каждом j -м шаге второго этапа надо вычислять оценки левой $\underline{a}_j$ и правой $\bar{b}_j$ границ искомого интервала (минимальное и максимальное значения в интервалах $\mathbf{a}_j$, $\mathbf{b}_j$ соответственно). Величина $\Delta_j = (\bar{b}_j - \underline{a}_j)/2$ будет оценивать предел возможной погрешности корня уравнения. В силу того, что погрешность погрешности не оценивается и не нормируется, нет необходимости знать значение Δ_j очень точно (а значит, и сами границы $\underline{a}_j$, $\bar{b}_j$). Величина Δ_j округляется в большую сторону до одной или максимум двух значащих цифр в соответствии с правилами метрологии. Обозначим округлённое значение как $\lceil \Delta_j \rceil$. Если результат округления $\lceil \Delta_j \rceil$, полученный на текущем шаге алгоритма, совпадает с результатом округления $\lceil \Delta_{j-1} \rceil$, найденным на предыдущем шаге, то итерационный процесс останавливается. В противном случае происходит переход к следующей итерации уточнения границ $\underline{a}_j$, $\bar{b}_j$ искомого интервала J .

Предложенный алгоритм можно записать в виде псевдокода, представленного ниже.

Исходные данные: уравнение $f(x, \mathbf{p})=0$, корень которого должен быть найден, $\mathbf{p}=(p_1, p_2, \dots, p_k)$ – вектор коэффициентов уравнения, $\Delta \mathbf{p}=(\Delta p_1, \Delta p_2, \dots, \Delta p_n)$ – вектор пределов возможной абсолютной погрешности коэффициентов $\mathbf{p}$.

Алгоритм состоит из следующих шагов.

1. Задание интервала $I_1=[a_1, b_1]$ локализации корня $f(x, \mathbf{p})=0$.
2. Присвоение i значения, равного 1.
3. Вычисление значения $c_i = \text{mid } I_i$ середины интервала I_i .
4. Нахождение предела $\Delta f(c_i, \mathbf{p})$ возможной абсолютной погрешности значения $f(c_i, \mathbf{p})$, унаследованной от неточности значений коэффициентов $\mathbf{p}$ уравнения. Для этого следует использовать метод метрологического автосопровождения либо, в зависимости от характера погрешностей $\Delta \mathbf{p}$, – одну из формул для погрешности результата косвенных измерений:

$$\Delta f(c_i, \mathbf{p}) = \sum_{k=1}^n \left| \frac{\partial f(c_i, \mathbf{p})}{\partial p_k} \right| \Delta p_k \text{ или } \sqrt{\sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial f(c_i, \mathbf{p})}{\partial p_k} \Delta p_k \right)^2}.$$

5. Проверка условия:
если $|f(c_i, \mathbf{p})| > \Delta f(c_i, \mathbf{p})$, то

$$I_{i+1} = [a_{i+1}, b_{i+1}] = \begin{cases} [c_i, b_i], & \text{если } f(c_i, \mathbf{p}) f(a_i, \mathbf{p}) > 0; \\ [a_i, c_i], & \text{если } f(c_i, \mathbf{p}) f(a_i, \mathbf{p}) \leq 0, \end{cases}$$

присвоить i значения $(i+1)$ и перейти к пункту 3.

6. Задание интервалов $\mathbf{a}_1=[a_1, c_1]$, $\mathbf{b}_1=[c_1, b_1]$.
7. Присвоение j значения, равного 1.
8. Вычисление значений $\text{mid } \mathbf{a}_j$, $\text{mid } \mathbf{b}_j$ середин интервалов $\mathbf{a}_j$, $\mathbf{b}_j$.
9. Нахождение пределов $\Delta f(\text{mid } \mathbf{a}_j, \mathbf{p})$, $\Delta f(\text{mid } \mathbf{b}_j, \mathbf{p})$ возможных абсолютных погрешностей значений $f(\text{mid } \mathbf{a}_j, \mathbf{p})$, $f(\text{mid } \mathbf{b}_j, \mathbf{p})$, унаследованных от неточностей значений коэффициентов $\mathbf{p}$ уравнения.
10. Проверка условия:
если $|f(\text{mid } \mathbf{a}_j, \mathbf{p})| > \Delta f(\text{mid } \mathbf{a}_j, \mathbf{p})$, то надо присвоить $\mathbf{a}_{j+1}$ пределы левой половины $\mathbf{a}_j$. В противном случае – пределы пра-

вой половины $\mathbf{a}_j$.

11. Проверка условия:

если $|f(\text{mid } \mathbf{b}_j, \mathbf{p})| > \Delta f(\text{mid } \mathbf{b}_j, \mathbf{p})$, то следует присвоить $\mathbf{b}_{j+1}$ пределы правой половины $\mathbf{b}_j$. В противном случае – пределы левой половины $\mathbf{b}_j$.

12. Вычисление полуширины Δ_{j+1} интервала J_{j+1} , образованного левой границей $\mathbf{a}_{j+1}$ и правой границей $\mathbf{b}_{j+1}$.

13. Округление значения Δ_{j+1} в большую сторону до одной значащей цифры либо до двух, если первая окажется «1», «2» или «3», а вторая – «5». Запись результата в $\lceil \Delta_{j+1} \rceil$.

14. Проверка условия:

если $j < 2$, то надо присвоить j значение $(j+1)$ и перейти к пункту 8.

15. Проверка условия:

если $\lceil \Delta_{j+1} \rceil$ и $\lceil \Delta_j \rceil$ равны, то следует присвоить j значение $(j+1)$ и перейти к пункту 8.

16. Возвращение в качестве оценки корня значения $\text{mid } J_{j+1}$, а в качестве предела его возможной абсолютной погрешности – значения $\lceil \Delta_{j+1} \rceil$.

Практическое применение метода. Предложенная модификация метода бисекции была использована для косвенного определения температуры в диапазоне $-200 \dots 0$ °C по значению сопротивления платинового термопреобразователя класса АА. Уравнением косвенных измерений при этом являлось уравнение Каллендара–Ван Дьюзерна [9]:

$$R_T = R_0 [1 + AT + BT^2 + CT^3(T - 100)], \quad (1)$$

где R_T , R_0 – измеренное и номинальное сопротивления термопреобразователя при температурах T , 0 °C, соответственно.

Коэффициенты данной зависимости нормированы в документах [9, 10]: $A=3,9083 \cdot 10^{-3}$ °C⁻¹, $B=-5,775 \cdot 10^{-7}$ °C⁻², $C=-4,183 \cdot 10^{-12}$ °C⁻⁴. Требовалось определить температуру T по измеренному значению сопротивления R_T .

Были выполнены расчёты для следующих условий: $R_T=60,26$ Ом, при этом допуски $\pm \Delta R_T$ возможных отклонений данного значения составляли $\pm 0,04$ Ом; $R_0=100$ Ом, при этом предел его относительной погрешности не превосходил 0,05 %; пределы погрешности коэффициентов A , B , C выбраны равными половине разряда, следующего за последним приведённым в нормативных документах, т. е. $\Delta A=\pm 0,00005 \cdot 10^{-3}$ °C⁻¹, $\Delta B=\pm 0,0005 \cdot 10^{-7}$ °C⁻², $\Delta C=\pm 0,0005 \cdot 10^{-12}$ °C⁻⁴; решаемое уравнение представлено в виде $f(T)=R_T(T)-R_T=0$, где зависимость $R_T(T)$ определяется по формуле (1); интервал локализации значения температуры T (корня уравнения) для метода бисекции взят равным $[-200, -50]$.

Последовательности полученных приближений корня и границ интервала его погрешности, унаследованной от исходных данных, представлены в табл. 1.

Точное значение искомой температуры (корня решаемого уравнения), указанное в таблицах стандарта [9], составляет $T^*=-100$ °C при $R_T=60,26$ Ом.

На десятом шаге итерационного процесса было получено приближение значения измеряемой температуры T , при котором значение функции $f(T)=R_T(T)-R_T$ в середине теку-

Т а б л и ц а 1

Приближение корня уравнения и пределы его возможной погрешности

Номер итерации n		Приближе- ние корня на n -м шаге	Оценка границ интервала возможных значений корня	
первый этап, i	второй этап, j		левой	правой
1	—	–125,0000	–200,0000	–50,0000
2	—	–87,50000	–125,0000	–50,0000
3	—	–106,2500	–125,000	–87,5000
4	—	–96,87500	–106,2500	–87,5000
5	—	–101,5625	–106,2500	–96,8750
6	—	–99,21880	–101,5625	–96,8750
7	—	–100,3906	–101,5625	–99,2188
8	—	–99,80470	–100,3906	–99,2188
9	—	–100,0977	–100,3906	–99,8047
10	—	–99,95120	—	—
—	1	—	–100,2441	–99,8047
—	2	—	–100,1709	–99,8047

щего интервала локализации корня могло иметь как положительный, так и отрицательный знак из-за погрешности, вносимой неточностью коэффициентов уравнения. После этого был выполнен переход ко второму этапу описанного выше алгоритма. Были найдены пределы возможных значений корня (за два шага). Оценка корня с учётом его погрешности, унаследованной от неточности исходных данных, составила $T=(-100,0\pm0,2)$ °С. Данный результат содержит точное значение корня T^* . Подобная своевременная остановка итерационного процесса поиска корня уравнения с неточными коэффициентами позволяет не только согласовать процедуру поиска с точностью исходных данных, но и уменьшить число выполняемых итераций.

На примере представленного выше уравнения косвенных измерений для тех же исходных данных было выполнено исследование временных характеристик работы метода бисекции: как с учётом неточности исходных данных, так и без него (классический метод бисекции).

Моделирование проводилось на компьютере с процессором Intel Core i5-3410M 2,30 ГГц, ОЗУ 4 Гб. Время, затраченное на оценку корня уравнения с помощью того или иного варианта метода бисекции, было получено путём оценки длительности многократного выполнения одинаковых расчё-

Т а б л и ц а 2

Время работы метода бисекции при разных его модификациях

Метод бисекции	Время работы t , мс	Число итераций
Классический (остановка по условию $ T_{k+1}-T_k \leq 10^{-10}$)	0,7	41
Классический (остановка по условию $ f(T) \leq 10^{-10}$)	1,0	59
Модифицированный	1,5	12

тов с последующим его усреднением на число выполненных повторов (10^5). Результаты представлены в табл. 2. Используются обозначения: T_k – оценка корня решаемого уравнения $f(T)=0$, достигнутая на k -м шаге.

Время выполнения модифицированного метода бисекции по сравнению с классическим методом бисекции, в котором применяются два традиционных правила остановки, но без учёта погрешности исходных данных, увеличилось примерно в 1,5–2 раза. Вместе с тем при работе классического варианта метода бисекции количество итераций составило в 4–5 раз больше, чем при работе модифицированного метода бисекции.

Предложенная авторами модификация метода бисекции уменьшила количество итераций, что соответствует более раннему прекращению поиска корня решаемого уравнения. Учёт погрешностей исходных данных позволил согласовать точность полученных результатов косвенных измерений с точностью результатов прямых измерений, используемых в качестве исходных данных. Вместе с тем необходимость оценки характеристик погрешности в целом увеличивает время работы.

Закключение. Предложенная в данной работе модификация метода бисекции для получения корня нелинейных уравнений с неточными коэффициентами позволяет найти достоверный интервал всех возможных значений корня с учётом погрешности исходных данных, что соответствует всем требованиям действующих метрологических норм. Процедура оценки корня не вносит никакой методической погрешности в получаемые результаты. Своевременная остановка итерационного процесса оценки корня, согласованная с точностью исходных данных, позволяет ускорить процесс вычислений за счёт выполнения меньшего числа итераций.

Л и т е р а т у р а

1. Шокин Ю. И. Интервальный анализ. Новосибирск: Наука, 1981.
2. Семенов К. К., Солопченко Г. Н. Исследование комбинированного метода метрологического автосопровождения программ обработки результатов измерений // Измерительная техника. 2011. № 4. С. 14–19.
3. Крейнович В. Я., Павлович М. И. Оценка погрешности результата косвенных измерений с помощью вычислительного эксперимента // Измерительная техника. 1985. № 3. С. 11–13.
4. Слаев В. А., Чуновкина А. Г. Аттестация программного обеспечения, используемого в метрологии: справочная книга. СПб.: Профессионал, 2009.
5. Солопченко Г. Н. Принципы нормирования, определения и контроля характеристик погрешности вычислений в ИИС // Измерительная техника. 1985. № 3. С. 9–11.
6. Кудяров Ю. А., Лукашов Ю. Е., Сатановский А. А. Метрологическая аттестация программного обеспечения средств измерений (состояние и перспективы) // Законодательная и прикладная метрология. 2003. № 4. С. 39–44.
7. Турчак Л. И. Основы численных методов. М.: Наука, 1987.
8. Griewank A. On Automatic Differentiation // In:

Mathematical Programming. Recent Developments and Applications / Edited by M. Iri, K. Tanabe. Kluwer Academic Publisher, 1989. P. 83–108.

9. **ГОСТ 6651–2009.** Термопреобразователи сопротивления из платины, никеля, меди и никеля.

10. **МЭК 60751:2008.** Термометры сопротивления промышленные платиновые и платиновые температурные датчики.

Дата принятия: 13.06.2017.

629.7.05.621.398

Фильтрация измерительных данных при структурно-алгоритмических преобразованиях

В. И. КУЗНЕЦОВ, С. С. КУКУШКИН

Федеральный центр науки и высоких технологий «Специальное научно-производственное объединение «Элерон», Москва, Россия, e-mail: info@eleron.ru

Представлены результаты исследований нетрадиционного представления данных образами-остатками при различных вариантах их вхождения в состав слов-измерений. Исследовано влияние зашумляющей помехи на информативность выборки данных телеизмерений. Показан уровень влияния искажений при реализации различных структур формирования передаваемых сообщений. Рассмотрены варианты применения методов фильтрации в решении задач обработки и анализа данных о результатах измерений. Описана возможность повышения временной плотности контроля измеряемого параметра, уменьшения погрешностей оценок, получаемых из анализа данных о результатах измерений, предъявлены требования к пропускной способности канала передачи данных.

Ключевые слова: информация, искажение, помеха, потери, телеметрия.

The results of the study of non-traditional presentation of data images of residues in different variants of its entry into the word-dimensions. The effect of noise on the information content of the sample data telemetry. It shows the level of influence of distortions in the implementation of the various structures of formation of the transmitted messages. Reviewed applications of filtering techniques in solving problems of processing and analysis of measurement data. The possibility of obtaining a number of advantages: a temporary increase in the density control parameter being measured, reducing error estimates obtained from the analysis of measurement data, the immutability of the requirements for data throughput of the channel.

Key words: information, distortion, noise, losses, telemetry.

Повышение сложности функционирования современных технических средств и комплексов, рост числа нештатных ситуаций и аварий при их эксплуатации приводит к необходимости совершенствования систем телеизмерений, увеличению числа контролируемых параметров и событий. В результате растут объёмы данных и скорости их передачи по каналам связи. При ограниченной пропускной способности радиоканалов передачи данных это приводит к ухудшению показателей достоверности получаемой измерительной информации. Возникающее противоречие ещё более обостряется при наличии помех, количество источников которых только увеличивается. Возможности традиционных методов, которые можно было бы использовать для противодействия подобным кризисным явлениям, не безграничны. Поэтому нужны новые резервы для разрешения отмеченного противоречия. Возможности их поиска, как показали ранее проведённые исследования, определяются уровнем разработки прикладных математических методов и

расширенным внедрением этих методов в практику. Такую возможность предоставляет конструктивная теория конечных полей, которая является модифицированным вариантом одноимённой классической теории Э. Галуа, но при этом лишена многих её недостатков [1, 2]. В настоящее время существуют многочисленные результаты апробации нового математического аппарата для формирования информационных сообщений, передачи, обработки и комплексного анализа измерительных данных, ориентированные на применение с учётом особенностей реализуемых на практике процессов эксплуатации технических средств и комплексов.

В последние годы наиболее востребованы в практике телеизмерений и передачи информации методы структурно-алгоритмических преобразований (САП) цифровых сообщений. Данные методы базируются на выводах и практических рекомендациях конструктивной теории конечных полей [1]. Их основу составляют образы-остатки (b_i), $i \in (1, n)$, которые получаются при делении исходных значений параметров (y)