

4. **Потенциальное** экономическое влияние Договоренности о взаимном признании МКМВ. Заключительный отчет. МБМВ, Севр, Франция, KPMG Consulting, 2002. [Электрон. версия] http://www.bipm.org/utis/common/pdf/KPMG_report.pdf (дата обращения 18.10.2014 г.)

5. **Договоренность** о взаимном признании национальных измерительных эталонов и сертификатов калибровки и измерений, выдаваемых национальными метрологическими институтами (Mutual Recognition Arrangement — MRA). Севр, Франция. 1999.

6. **Федеральный** закон Российской Федерации от 26 июня 2008 года № 102-ФЗ «Об обеспечении единства измерений».

7. **Приказ** Минпромторга РФ от 17 июня 2009 года № 529 «Об утверждении Стратегии обеспечения единства измерений в России до 2015 года».

8. **Распоряжение** Правительства РФ от 27 декабря 2012 г. № 2539-р о государственной программе РФ «Развитие промышленности и повышение ее конкурентоспособности». Подпрограмма 12 «Развитие системы технического регулирования, стандартизации и обеспечения единства измерений».

9. **Приказ** Росстандарта от 19.09.2014 № 1360 «Об утверждении ведомственной целевой программы «Проведение фундаментальных исследований в области метрологии, разработки государственных (в том числе первичных) эталонов единиц величин».

10. **Слаев В. А., Балалаев В. А., Синяков А. И.** Теория систем воспроизведения единиц и передачи их размеров / Под ред. В. А. Слаева. СПб.: Профessional, 2004.

Дата принятия 18.12.2014 г.

519.853.62:006.015.7

Комбинированный алгоритм оптимизации и его применение к решению метрологических задач

Ю. С. СЫСОВЕВ

Волгодонский инженерно-технический институт — филиал Национального исследовательского ядерного университета «МИФИ»,
Волгодонск, Россия, e-mail: sysoev2004@mail.ru

Представлен комбинированный алгоритм оптимизации, аналогичный алгоритму покоординатного спуска (не по одномерным пространствам, а по подпространствам различной размерности) и методу градиентного спуска. Выбор подпространств, по которым осуществляется спуск, определяется абсолютным значением координат градиента в очередной итерационной точке.

Ключевые слова: оптимизация, метод градиентного спуска, итерации, эффект оврагов.

The combined optimization algorithm combining an analogue of coordinated lowering algorithm (not by one-dimensional spaces, but by the different dimension under-spaces) and of a method of gradient lowering are presented. The choice of under-spaces on which the lowering is made is determined by absolute value of gradient coordinates in the regular iterative point.

Key words: optimization, gradient lowering method, iterations, ravine method.

Решение целого ряда метрологических задач связано с поиском оптимальных значений тех или иных параметров [1—4]. При этом приходится искать минимальные (или максимальные) значения гладких целевых функций $y = f(\mathbf{x})$ многих переменных $\mathbf{x} = (x^1, x^2, \dots, x^n)$, заданных в евклидовом пространстве H с системой координат, определенной ортонормированным базисом. Поскольку целевые функции в указанных работах имели сильно выраженную овражную структуру, то стандартные методы градиентного спуска из-за их медленной сходимости не позволяли получить искомые оптимальные значения параметров с заданной точностью. Поэтому для нахождения результата с требуемой точностью приходилось для каждой целевой функции строить индивидуальный алгоритм оптимизации.

Суть построения алгоритмов сводили к разовому выбору нескольких вложенных друг в друга подпространств, строго фиксированных на всем периоде работы алгоритма [1—4]. По этим подпространствам последовательно проводили оптимизацию на каждом шаге итерационного процесса. Подпространства выбирали на основе предварительного анализа формул, задающих целевую функцию, или визуальной оценки скорости изменения целевой функции по различным параметрам. Однако для многих целевых функций этот процесс достаточно сложен, требует трудоемкого анализа и не всегда приводит к нужному результату. Задача существенно усложняется, когда требуется учитывать соотношения между скоростями изменения функции по разным переменным, зависящие от итерационной точки, в которой рассматрива-

ется функция. Таким образом, необходимо создать гибкий алгоритм оптимизации, предусматривающий операции по определению указанных подпространств на каждом шаге оптимизации. Такая процедура позволит не только отказаться от «угадывания» этих подпространств, но и разрешит изменять их в процессе оптимизации.

Алгоритм, предложенный в настоящей работе, удовлетворяет всем указанным требованиям. Он является комбинированным, сочетающим аналог алгоритма покоординатного спуска (организованный не только по одномерным, но и по многомерным пространствам различной размерности) и метода градиентного спуска. Выбор подпространств спуска определяется абсолютным значением координат градиента в очередной итерационной точке. При таком подходе в процессе реализации алгоритма на каждом его шаге будет меняться набор подпространств спуска, поскольку в рекомендуемом автором процессе оптимизации учитывается скорость изменения целевой функции по различным переменным в соответствующей итерационной точке. Следовательно, алгоритм получится более гибким, чем приведенные в [1—4], и позволит добиться высокой точности при решении оптимизационных задач.

Одной из основных проблем, которую приходится решать при построении любого итерационного метода оптимизации функций многих переменных, является выбор направления спуска. В этой работе алгоритм строится так, чтобы в течение одного шага оптимизации направление могло изменяться несколько раз. Подобная последовательность направлений спуска на каждом конкретном шаге определяет вложенные подпространства.

Поскольку задача нахождения максимума функции сводится к нахождению ее минимума (и наоборот), то в дальнейшем будем рассматривать только минимизацию функции.

Выбор направления спуска должен осуществляться таким образом, чтобы на нем можно было получить точку, значение функции в которой не больше значения в исходной точке. Такое направление назовем допустимым, а вектор, его определяющий, будем считать допустимым вектором. Как и в любом итерационном процессе минимизации, построим последовательность точек $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \dots$, при которой соответствующая последовательность $f(\mathbf{x}_1), f(\mathbf{x}_2), f(\mathbf{x}_3), \dots$ значений функции будет монотонно невозрастающей. Процесс перехода от предыдущей итерационной точки к последующей обозначим как итерационный шаг или шаг оптимизации.

Рассмотрим произвольный вектор $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3, \dots, a_n)$, и заменим в нем какие-нибудь координаты нулями. Для определенности будем считать, что это будут две первые координаты a_1, a_2 . Получим новый вектор $\mathbf{a}_1 = (0, 0, a_3, \dots, a_n)$. Тогда определим косинус угла между векторами:

$$\begin{aligned} \cos \varphi &= \frac{\sum_{j=3}^n (a_j)^2}{\left[\sqrt{\sum_{j=1}^n (a_j)^2} \sqrt{\sum_{j=3}^n (a_j)^2} \right]} = \\ &= \frac{\sqrt{\sum_{j=3}^n (a_j)^2}}{\sqrt{\sum_{j=1}^n (a_j)^2}}. \end{aligned} \quad (1)$$

Из (1) следует, что чем большие по модулю координаты в векторе $\mathbf{a}$ будут заменены нулевыми значениями, тем меньше будет значение $\cos \varphi$ и тем ближе к $\pi/2$ угол между вектором $\mathbf{a}$ и вновь полученным вектором. Таким образом, чтобы

получить вектор, имеющий ближайший к $\pi/2$ угол с вектором $\mathbf{a}$, нужно заменить нулями две его наибольшие по модулю координаты. Аналогичное утверждение можно сформулировать не только для двух координат вектора $\mathbf{a}$, но и для любого другого их количества.

Опишем основные принципы построения одного шага итераций от точки $\mathbf{x}_k$ к $\mathbf{x}_{k+1}$, так как традиционные части алгоритма оптимизации представлены в [5, 6].

Описание шага оптимизации. Найдем градиент функции $\mathbf{z}_k = \nabla f(\mathbf{x}_k)$ в точке $\mathbf{x}_k$ и проведем один шаг градиентного спуска [5] с дроблением шага исходя из точки $\mathbf{x}_k$. Для этого воспользуемся равенством [5]:

$$\mathbf{x}_k^1 = \mathbf{x}_k - \alpha_k \nabla f(\mathbf{x}_k), \quad (2)$$

где α_k — некоторое положительное число.

При необходимости уменьшив в два раза последовательное положительное число α_k , при некотором значении α_k^1

получим новую точку $\mathbf{x}_k^1 = \mathbf{x}_k - \alpha_k^1 \nabla f(\mathbf{x}_k)$, для которой будет выполняться неравенство $f(\mathbf{x}_k^1) \leq f(\mathbf{x}_k)$.

При овражной структуре целевой функции из-за малости шагов спуска в направлениях антиградиентов часто не удается получить результат требуемой точности. Поэтому следующий спуск на этом же шаге оптимизации осуществим в направлении допустимого вектора, имеющего угол с вектором $\nabla f(\mathbf{x}_k)$, ближайший к $\pi/2$. Из изложенного следует, что этот вектор можно получить из $\nabla f(\mathbf{x}_k)$ заменой наибольших по модулю координат, имеющих одинаковый порядок (выделенные координаты), нулевыми значениями. Рассмотрим подпространство H_1 пространства H , полученное при замене у всех векторов H нулевыми значениями тех координат, номера которых совпадают с номерами выделенных координат.

Через H_1^0 обозначим подпространство H , которое получается заменой нулевыми значениями тех координат векторов этого пространства, номера которых не совпадают с номерами выделенных координат. Подпространство H_1^0 будет ортогональным дополнением к H_1 в пространстве H . В дальнейшем все элементы подпространства пространства H , включая H_1, H_1^0 , будем рассматривать как элементы H , дополняя соответствующие координаты нулями. Это позволит совершать операции сложения и вычитания векторов из разных подпространств. Обозначим P_1, P_1^0 операторы проектирования, заданные на пространстве H и действующие в подпространства H_1, H_1^0 , соответственно. Применив введенные обозначения, запишем равенство, определяющее продолжение операции спуска в пределах рассматриваемого шага оптимизации:

$$\mathbf{x}_k^2 = \mathbf{x}_k - \alpha_k P_1[\nabla f(\mathbf{x}_k)] - P_1^0(\mathbf{x}_k) + P_1^0(\mathbf{x}_k^1). \quad (3)$$

Направления спуска, определяемые формулами (2), (3), являются допустимыми. Выберем в равенстве (3) началь-

ное значение α_k в 2^5 раз больше, чем начальное значение α_k^1 (можно также использовать α_k , равноеначальному значению α_k из (2), однако при этом время работы алгоритма может увеличиться). При необходимости уменьшив последовательно в два раза α_k в (3) и сравнив значения функции во вновь полученных точках со значением $f(\mathbf{x}_k^1)$, получим точку $\mathbf{x}_k^2$, для которой будет справедливо неравенство $f(\mathbf{x}_k^2) \leq f(\mathbf{x}_k^1)$.

Будем считать подпространство H_1 исходным. Тогда применив $P_1[\nabla f(\mathbf{x}_k)]$ вместо $\nabla f(\mathbf{x}_k)$, как и в предыдущем случае, найдем новое подпространство H_2 пространства H_1 , а значит, и пространства H . Определим подпространство H_2^0 как ортогональное дополнение к H_2 в пространстве H , а также новые операторы P_2, P_2^0 проектирования на подпространства H_2, H_2^0 , и продолжим процедуру спуска в новом допустимом направлении, используя равенство

$$\mathbf{x}_k^3 = \mathbf{x}_k - \alpha_k P_2 [\nabla f(\mathbf{x}_k)] - P_2^0(\mathbf{x}_k) + P_2^0(\mathbf{x}_k^2).$$

Повторив описанный процесс, закончим его, когда переберем все координаты вектора $\nabla f(\mathbf{x}_k)$, т. е. на последнем подпространстве H_j . При этом последнюю найденную точку $\mathbf{x}_k^j$ объявим точкой $\mathbf{x}_{k+1}$, определив $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k^j$. На этом один итерационный шаг алгоритма оптимизации закончим.

В качестве тестовых примеров для оценки предложенного алгоритма рассмотрим следующие задачи:

нахождение параметров базового среднего цилиндра при определении отклонения от цилиндричности поверхностей деталей машин [1—3];

вычисление параметров смеси нормальных распределений [4], характеризующих состояния сварочного процесса при сварке плавящимся электродом;

определение групповой стратегии экспертной группы при проведении субъективных измерений.

Применение данного алгоритма к решению первых двух задач показало, что погрешность их решений не превосходит погрешности, полученные при использовании специально разработанных (для каждой задачи своего) алгоритмов. Следовательно, необходимость подготовки алгоритмов, адаптированных к решению только одной конкретной задачи для указанных и некоторых других случаев, исчезла.

Рассмотрим более подробно третью задачу.

Определение групповой стратегии экспертной группы.

При использовании группы из m экспертов для балльных оценок n альтернатив возможны два подхода получения этих оценок. Первый подход основан на прямом анализе каждой альтернативы, при этом получится m наборов интересных оценок. В основу второго способа положен принцип сравнения альтернатив. В этом случае каждый эксперт, сравнивая каждую пару альтернатив, указывает во сколько раз одна альтернатива превосходит другую.

Оба метода оценок эквивалентны [7], однако получение балльных оценок с помощью парных сравнений имеет пре-

имущество по сравнению с прямым методом, которое состоит в том, что от каждого эксперта имеется не один, а n наборов оценок, т. е. m экспертов предоставят нам nm соответствующих наборов. Такое увеличение оценок каждой альтернативы позволит использовать для принятия решения и стохастические оценки, и статистические методы. Более того, при проведении парных сравнений можно формально оценить, насколько квалифицировано выставляет оценки каждый эксперт (рассогласование соответствующей матрицы парных сравнений не должно превосходить 10 % [8]). Описанные варианты повышают надежность принимаемых решений.

Рассмотрим оценки, сделанные при парных сравнениях.

Если бы эксперты одинаково оценивали качество альтернатив и не допускали погрешностей, то результаты привели бы к единой согласованной обратно симметричной матрице парных сравнений [8]:

$$\Delta = \begin{pmatrix} v_1/v_1 & v_1/v_2 & \dots & v_1/v_n \\ v_2/v_1 & v_2/v_2 & \dots & v_2/v_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ v_n/v_1 & v_n/v_2 & \dots & v_n/v_n \end{pmatrix}, \quad (4)$$

где $v_i, i = \overline{1, n}$ — фактические оценки альтернатив.

Однако даже при работе с одним экспертом редко удастся получить согласованную матрицу парных сравнений. В рассматриваемом примере будет m обратно симметричных матриц:

$$\nabla^{(r)} = \begin{pmatrix} \alpha_{11}^{(r)} & \alpha_{12}^{(r)} & \dots & \alpha_{1n}^{(r)} \\ \alpha_{21}^{(r)} & \alpha_{22}^{(r)} & \dots & \alpha_{2n}^{(r)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1}^{(r)} & \alpha_{n2}^{(r)} & \dots & \alpha_{nn}^{(r)} \end{pmatrix}, \quad (5)$$

где $\nabla^{(r)}$ — матрица, построенная по оценкам r -го эксперта,

$r = 1, 2, \dots, m$, в которой $\alpha_{ij}^{(r)}$ указывает, во сколько раз i -я альтернатива по мнению r -го эксперта «лучше» j -й ($\alpha_{11}^{(r)} = \alpha_{22}^{(r)} = \dots = \alpha_{nn}^{(r)} = 1$). Каждая из этих матриц, как правило,

не является согласованной. Задача состоит в том, чтобы по матрицам (4), (5), основываясь на методе наименьших квадратов (МНК), найти соответствующий вектор $(v_1^0, v_2^0, \dots, v_n^0)$.

Непосредственное применение МНК с использованием элементов (4), (5) некорректно, поскольку элементы столбцов этих матриц определяют оценки анализируемых альтернатив в различных единицах измерения [9]. Чтобы прийти к единому масштабу оценок альтернатив, пронормируем столбцы этих матриц, разделив каждый элемент столбца на сумму его элементов. В этом случае все нормированные столбцы согласованной матрицы (4) окажутся одинаковы и будут иметь вид следующего вектора-столбца (для сокращения записи он представлен в виде вектора-строки):

$$\left(v_1 / \sum_{k=1}^n v_k, v_2 / \sum_{k=1}^n v_k, \dots, v_n / \sum_{k=1}^n v_k \right).$$

Следовательно, этот вектор согласованно с вектором $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ ранжирует альтернативы. Предположим, что все столбцы матриц (5) пронормированы, и запишем целевую функцию

$$y = \sum_{r=1}^m \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left[\alpha_{ij}^{(r)} - \left(v_i / \sum_{k=1}^n v_k \right) \right]^2. \quad (6)$$

Точка $(v_1^0, v_2^0, \dots, v_n^0)$ минимума этой функции позволит получить групповую стратегию экспертной группы

$$\left(v_1^0 / \sum_{k=1}^n v_k^0, v_2^0 / \sum_{k=1}^n v_k^0, \dots, v_n^0 / \sum_{k=1}^n v_k^0 \right). \quad (7)$$

Вектор, определяющий стратегию экспертной группы, чтобы избежать неоднозначности представлен в нормированном виде, так как умножение всех координат на любое положительное число приведет к стратегии, ранжирующей альтернативы так же, как и вектор (7).

Целевая функция (6) использована как тестовая для сравнения предложенного алгоритма с методом градиентного спуска. Для этого двумя способами была найдена групповая стратегия для наборов из разного количества обратно симметричных матриц различных размеров. Во всех без исключения случаях рассмотренный алгоритм имеет существенные преимущества по длительности времени поиска оптимального решения. Например, при нахождении групповой стратегии по наборам из шести обратно симметричных матриц размером 5×5 , представленным в [9], и их некоторым модификациям применение метода градиентного спуска потребовало более 20000 вычислений целевой функции, в отдельных случаях — около 50000, а при использовании комбинированного алгоритма для решения тех же задач — не более 200. Время нахождения оптимального решения первым методом составляет около 10 мин, вторым — 1–2 с, что указывает на преимущества предлагаемого метода.

Л и т е р а т у р а

1. **Сысоев Ю. С., Магдеев В. Ш.** Методика измерений отклонений от цилиндричности крупногабаритных деталей // Измерительная техника. 1990. № 11. С. 27–29; **Sysoev Yu. S., Magdeev V. Sh.** Method of measuring deviations from the cylindrical form of large-scale workpieces // Measurement Techniques. 1990. V. 33. N. 11. P. 1104–1108.

2. **Сысоев Ю. С., Магдеев В. Ш., Шпонарская С. Н., Карташева И. Ю.** Определение среднего цилиндра при неравномерном распределении контролируемых точек на поверхности крупногабаритных цилиндрических изделий // Измерительная техника. 1997. № 11. С. 21–27; **Sysoev Yu. S., Magdeev V. Sh., Shponarskaya S. N., Kartasheva I. Yu.** Determination of the dimensions of the middle cylinder with a nonuniform distribution of control points on the surface of large cylindrical products // Measurement Techniques. 1997. V. 40. N. 11. P. 1056–1064.

3. **Сысоев Ю. С., Кривин В. В., Бекетов В. Г.** Использование смесей распределения при стохастической идентификации многовариантных объектов // Измерительная техника. 2007. № 6. С. 9–13; **Sysoev Yu. S., Krivin V. V., Becetov V. G.** Use of distribution mixtures with stochastic identification of multivariant objects // Measurement Techniques. 2007. V. 50. N. 6. P. 575–580.

4. **Сысоев Ю. С.** Координатные методы контроля геометрии поверхностей изделий машиностроения (пространственные методы контроля поверхностей деталей машин) // Справочник. Инженерный журнал. 2007. № 5. С. 16–22.

5. **Деннис Дж., Шнабель Р.** Численные методы безусловной оптимизации и решения нелинейных уравнений. М.: Мир, 1988.

6. **Химмельблау Д.** Прикладное нелинейное программирование. М.: Мир, 1975.

7. **Сысоев Ю. С., Магдеев В. Ш., Воронин Е. П.** Исследования восприятия текстовой информации со световых взрывозащищенных табло методами субъективных измерений // Пожаровзрывобезопасность. 2012. № 6. С. 43–49.

8. **Саати Т.** Принятие решений. Метод анализа иерархий. М.: Радио и связь, 1993.

9. **Сысоев Ю. С., Гилт И. Ю., Винниченко С. М.** Использование метода оптимальных групповых стратегий для согласования результатов субъективных измерений // Измерительная техника. 2006. № 2. С. 20–22; **Sysoev Yu. S., Gil't I. Yu., Vinichenko S. M.** The optimal group strategies method for matching subjective measurements // Measurement Techniques. 2006. V. 49. N. 2. P. 122–126.

Дата принятия 05.08.2014 г.