

Оценка средней мощности сигнала с флуктуацией фаз составляющих гармонических колебаний при апертурной неопределённости аналого-цифрового преобразователя

С. А. Засыпкин, О. Ю. Розина

Уральский научно-исследовательский институт метрологии, Екатеринбург, Россия, e-mail: rozina@uniim.ru

Приведены результаты исследований оценки средней мощности сигнала с флуктуацией фаз составляющих гармонических колебаний. Исследования проведены с учётом спектрального состава сигнала, характеристик фазовых флуктуаций, апертурной неопределённости и частоты дискретизации аналого-цифрового преобразователя. Получены аналитические выражения для числовых характеристик распределения указанной оценки для нормального закона распределения вероятностей случайных величин при некоррелированных случайных процессах.

Ключевые слова: сигнал, спектр, гармонические колебания, флуктуации фаз, средняя мощность, дискретизация, апертурная неопределённость, оценка, ковариация.

Современные достижения в области создания высокоскоростных аналого-цифровых преобразователей (АЦП) позволили расширить частотный диапазон цифровых средств измерений (СИ) энергетических характеристик сигналов и учесть влияние шумов в измерительных цепях. Для обеспечения требуемой точности измерений в необходимом частотном диапазоне нужно правильно исследовать оценки энергетических характеристик сигналов, поэтому актуальность таких исследований постоянно возрастает.

В статье приведены результаты исследований оценки средней мощности сигнала с флуктуацией фаз составляющих гармонических колебаний при апертурной неопределённости АЦП, используемого для преобразования сигнала. Цель данной работы – получить аналитические выражения для числовых характеристик распределения (далее – характеристик) оценки средней мощности исследуемого сигнала с учётом его спектрального состава, характеристик флуктуаций фаз, апертурной неопределённости и частоты дискретизации АЦП.

Исследуемый процесс представляет собой сигнал $x(t)$ в виде ограниченной суммы детерминированных и случайных составляющих. Детерминированные составляющие являются гармоническими колебаниями с фиксированными параметрами, а случайные составляющие – некоррелированными друг с другом гармоническими колебаниями с флуктуациями фаз. Случайные составляющие сигнала $x(t)$ представляют собой случайные функции с фиксированными амплитудами, частотами и начальными фазами. При этом фазовый угол гармонического колебания включает случайную составляющую – флуктуацию фазы [1]. Частоты всех составляющих сигнала $x(t)$ кратны частоте ω основного гармонического колебания.

В общем случае выражение для k -й составляющей $x_k(t)$ можно записать как

$$x_k(t) = \rho_k \cos(k\omega t - \varphi_{0k} + \Delta\varphi_{kt}), \quad k = 1, \dots, q, \quad (1)$$

где ρ_k , φ_{0k} – соответственно амплитуда и начальная фаза со-

ставляющей $x_k(t)$; $\omega = 2\pi/T$ – основная частота сигнала $x(t)$, T – период основного гармонического колебания сигнала $x(t)$; $\Delta\varphi_{kt}$ – флуктуация фазы в радианах в виде случайного отклонения фазы составляющей $x_k(t)$ в момент времени t от идеального значения, равного $k\omega t - \varphi_{0k}$; q – порядок последней составляющей сигнала $x(t)$.

Для центрированной случайной величины $\Delta\varphi_{kt}$ укажем нормальное распределение с математическим ожиданием $E[\Delta\varphi_k] = 0$ и средним квадратическим отклонением (СКО) $\sigma[\Delta\varphi_k]$. Зададим условие для СКО флуктуации фазы:

$$0 \leq \sigma[\Delta\varphi_k] \leq \sigma_{\max}[\Delta\varphi_k],$$

где $\sigma_{\max}[\Delta\varphi_k]$ – наибольшее значение СКО флуктуации фазы составляющей $x_k(t)$, принятое в конкретной измерительной задаче.

Пусть $\{\Delta\varphi_{kt}\}, k = 1, \dots, q, 0 \leq t \leq T$ – стационарный случайный процесс, параметры которого не зависят от времени, при этом $\Delta\varphi_{kt}$ – независимые случайные величины, у которых отсутствует корреляция как между случайными отклонениями фаз разных составляющих сигнала $x(t)$, так и между случайными отклонениями фаз одной и той же составляющей этого сигнала в разные моменты времени t . Если флуктуации фазы k -й составляющей сигнала $x(t)$ отсутствуют, а $E[\Delta\varphi_k] = 0$, $\sigma[\Delta\varphi_k] = 0$, то выражение (1) примет вид гармонического сигнала с фиксированными амплитудой, частотой и начальной фазой:

$$x_k(t) = \rho_k \cos(k\omega t - \varphi_{0k}). \quad (2)$$

С учётом изложенного выше модель исследуемого сигнала $x(t)$ опишем следующим образом:

$$x(t) = \sum_{k=1}^q \rho_k \cos(k\omega t - \varphi_{0k} + \Delta\varphi_{kt}). \quad (3)$$

Модель, представленная выражением (3), широко применяется на практике для оценки мощности фазовых шумов при исследованиях энергетических процессов в измерительных цепях [2, 3]. Подробное изучение данной модели позволит расширить класс исследуемых сигналов с учётом взаимного влияния составляющих колебаний.

С учётом флуктуации фаз составляющих гармонических колебаний определим среднюю мощность P сигнала $x(t)$ за время, равное периоду T основного гармонического колебания сигнала [4]:

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T x^2(t) dt. \quad (4)$$

В интервале времени $0-T$ математическое ожидание $E[P]$ и дисперсия $D[P]$ при некоррелированных случайных величинах $\Delta\varphi_{kt}$ примут вид [5]:

$$\left. \begin{aligned} E[P] &= 0,5 \sum_{k=1}^q \rho_k^2; \\ D[P] &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

При цифровом методе измерений, в основу которого положено выражение (4), осуществляется дискретизация и преобразование сигнала с помощью АЦП. При дискретизации возникают систематические смещения и случайные отклонения времени отсчёта от заданного значения. Такие отклонения могут приводить к значительным искажениям в сигналах и называются апертурной неопределённостью [6, 7]. Последовательности цифровых отсчётов сигнала $x(t)$ используют для вычисления оценки P^* его средней мощности в интервале времени $0-T$:

$$P^* = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x^2(t_n). \quad (6)$$

Цифровой отсчёт сигнала $x(t)$, найденный при апертурной неопределённости в результате его дискретизации и аналого-цифрового преобразования, представим в виде

$$x(t_n) = \sum_{k=1}^q \rho_k \cos(k\omega t_n - \varphi_{0k} + \Delta\varphi_{kn}), \quad (7)$$

где $t_n = n\Delta t + \tau_n$, $n=0, \dots, N-1$; $N \geq 2q+1$ – число отсчётов за время, равное периоду T ; $\Delta t = 2\pi/(\omega N)$ – интервал дискретизации, кратный периоду T ; τ_n – апертурная неопределённость в виде случайного отклонения момента времени n -го отсчёта от идеального значения, равного $n\Delta t$.

Зададим нормальное распределение с математическим ожиданием $E[\tau_n]=0$ и СКО $\sigma[\tau_n]$ для центрированной случайной величины τ_n при $n=0, \dots, N-1$. При этом $\{\tau_n\}$ объявим независимыми случайными величинами. Отклонения фаз $\Delta\varphi_{kn}$, $k=1, \dots, q$, $n=0, \dots, N-1$ принадлежат реализации случай-

ного процесса $\{\Delta\varphi_{kn}\}$ с параметрами распределения $E[\Delta\varphi_k]$, $\sigma[\Delta\varphi_k]$ и свойствами процесса, указанными выше. Примем, что параметры отклонений τ_n , $\Delta\varphi_{kn}$ находятся в следующих пределах:

$$\begin{aligned} 0 &\leq \sigma[\tau_n] < \Delta t; \\ 0 &\leq \sigma[\Delta\varphi_k] < 2\pi/N. \end{aligned}$$

Укажем также, что случайные отклонения фаз $\Delta\varphi_{kn}$, $k=1, \dots, q$ составляющих исследуемого процесса $x_k(t)$ и апертурная неопределённость τ_n , обусловленная свойствами АЦП, в момент времени t_n будут являться независимыми случайными величинами. Оценка средней мощности P^* сигнала $x(t)$, вычисленная по формуле (6) на основании последовательностей цифровых отсчётов $x(t_n)$ из выражения (7), тоже является случайной величиной. Следовательно, оценку средней мощности можно описать с помощью характеристик случайной величины – математического ожидания $E[P^*]$ и дисперсии $D[P^*]$ [8].

Для модели (3) исследуемого сигнала $x(t)$ при независимости флуктуаций фаз и апертурной неопределённости АЦП с учётом указанных выше параметров (5) получим соответствующие выражения:

$$\begin{aligned} E[P^*] &= E\left[\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x^2(t_n)\right] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{k=1}^q \sum_{l=1}^q E[x_k(t_n)x_l(t_n)] = \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=1}^q \sum_{n=0}^{N-1} \rho_k^2 E[\cos^2(k\omega(n\Delta t + \tau_n) - \varphi_{0k} + \Delta\varphi_{kn})] = \\ &= 0,5 \sum_{k=1}^q \rho_k^2; \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} D[P^*] &= D\left[\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x^2(t_n)\right] = \frac{1}{N^2} \sum_{n=0}^{N-1} D[x^2(t_n)] = \\ &= \frac{1}{N^2} \sum_{k=1}^q \sum_{l=1}^q \sum_{m=1}^q \sum_{r=1}^q \sum_{n=0}^{N-1} \text{cov}[x_k(t_n)x_l(t_n); x_m(t_n)x_r(t_n)] = \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=1}^q \sum_{l=1}^q \sum_{m=1}^q \sum_{r=1}^q \rho_k \rho_l \rho_m \rho_r \times \\ &\quad \times \overline{\text{cov}[\cos\Phi_k \cos\Phi_l; \cos\Phi_m \cos\Phi_r]}, \end{aligned} \quad (9)$$

где $\text{cov}[x_k(t_n)x_l(t_n); x_m(t_n)x_r(t_n)]$ – ковариации произведений соответствующих составляющих сигнала $x(t)$ в момент времени t_n ;

$$\begin{aligned} \overline{\text{cov}[\cos\Phi_k \cos\Phi_l; \cos\Phi_m \cos\Phi_r]} &= \\ &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \text{cov}[\cos\Phi_k(t_n)\cos\Phi_l(t_n); \cos\Phi_m(t_n)\cos\Phi_r(t_n)] \end{aligned}$$

– средние за период T ковариации произведений соответствующих тригонометрических функций; $\Phi_k(t_n)$,

Формулы для вычисления ковариаций

k, l, m, r	φ_{0klmr}	Ковариации $\overline{\cos\Phi_k \cos\Phi_l; \cos\Phi_m \cos\Phi_r}$ с учётом действия случайного фактора		
		Флуктуация фаз	Апертурная неопределённость	Флуктуация фаз и апертурная неопределённость
$k=l=m=r,$ $\eta=2k$	0	$(1-\beta_{\eta\varphi}^2)/8$	$(1-\beta_{\eta\tau}^2)/8$	$(1-\beta_{\eta\varphi}^2\beta_{\eta\tau}^2)/8$
$\eta=l-k=\pm(r-m)$ и одновременно $\xi=l+k=(r+m),$ $k=m, l=r$	для η : $-\varphi_{0l} + \varphi_{0k} \pm (\varphi_{0r} - \varphi_{0m})$ для ξ : $-\varphi_{0l} - \varphi_{0k} + \varphi_{0r} + \varphi_{0m}$	$(1-\alpha_{k\varphi}^2\alpha_{l\varphi}^2)/4$	$(1-\beta_{(l-k)\tau}^2)/8 +$ $+(1-\beta_{(l+k)\tau}^2)/8$	$(1-\alpha_{k\varphi}^2\alpha_{l\varphi}^2\beta_{(l-k)\tau}^2)/8 +$ $+(1-\alpha_{k\varphi}^2\alpha_{l\varphi}^2\beta_{(l+k)\tau}^2)/8$
$k=l=m, r=3k, \eta=2k$	$-\varphi_{0k} - \varphi_{0l} - \varphi_{0m} + \varphi_{0r}$	$\alpha_{r\varphi}(\beta_{3k\varphi} - \alpha_{k\varphi}\beta_{\eta\varphi})\cos\varphi_{0klmr}/8$	$(1-\beta_{\eta\tau}^2)\cos\varphi_{0klmr}/8$	$\alpha_{r\varphi}(\beta_{3k\varphi} - \alpha_{k\varphi}\beta_{\eta\varphi}\beta_{\eta\tau}^2)\cos\varphi_{0klmr}/8$
$\eta=l+k=\pm(r-m),$ $l=r, k \neq m$	$-\varphi_{0l} - \varphi_{0k} \pm (\varphi_{0r} - \varphi_{0m})$	$\alpha_{k\varphi}\alpha_{m\varphi}(\beta_{(l+r)\varphi} - \alpha_{l\varphi}^2)\cos\varphi_{0klmr}/8$	$(1-\beta_{\eta\tau}^2)\cos\varphi_{0klmr}/8$	$\alpha_{k\varphi}\alpha_{m\varphi}(\beta_{(l+r)\varphi} - \alpha_{l\varphi}^2\beta_{\eta\tau}^2)\cos\varphi_{0klmr}/8$
$\eta=l+k=\pm(r-m),$ $l=k$	$-\varphi_{0l} - \varphi_{0k} \pm (\varphi_{0r} - \varphi_{0m})$	0	$(1-\beta_{\eta\tau}^2)\cos\varphi_{0klmr}/8$	$\alpha_{m\varphi}\alpha_{r\varphi}\beta_{\eta\varphi}(1-\beta_{\eta\tau}^2)\cos\varphi_{0klmr}/8$
$\eta=l+k=r+m,$ $l=k$	$-\varphi_{0l} - \varphi_{0k} + \varphi_{0r} + \varphi_{0m}$	0	$(1-\beta_{\eta\tau}^2)\cos\varphi_{0klmr}/8$	$\alpha_{m\varphi}\alpha_{r\varphi}\beta_{\eta\varphi}(1-\beta_{\eta\tau}^2)\cos\varphi_{0klmr}/8$
$\eta=l-k=\pm(r-m)$	$-\varphi_{0l} + \varphi_{0k} \pm (\varphi_{0r} - \varphi_{0m})$	0	$(1-\beta_{\eta\tau}^2)\cos\varphi_{0klmr}/8$	$\alpha_{k\varphi}\alpha_{l\varphi}\alpha_{m\varphi}\alpha_{r\varphi}(1-\beta_{\eta\tau}^2)\cos\varphi_{0klmr}/8$
$\eta=\pm(l-k)=r+m$	$\pm(\varphi_{0k} - \varphi_{0l}) + \varphi_{0r} + \varphi_{0m}$	0	$(1-\beta_{\eta\tau}^2)\cos\varphi_{0klmr}/8$	$\alpha_{k\varphi}\alpha_{l\varphi}\alpha_{m\varphi}\alpha_{r\varphi}(1-\beta_{\eta\tau}^2)\cos\varphi_{0klmr}/8$
$\eta=l+k=\pm(r-m)$	$-\varphi_{0l} - \varphi_{0k} \pm (\varphi_{0r} - \varphi_{0m})$	0	$(1-\beta_{\eta\tau}^2)\cos\varphi_{0klmr}/8$	$\alpha_{k\varphi}\alpha_{l\varphi}\alpha_{m\varphi}\alpha_{r\varphi}(1-\beta_{\eta\tau}^2)\cos\varphi_{0klmr}/8$
$\eta=l+k=r+m$	$-\varphi_{0l} - \varphi_{0k} + \varphi_{0r} + \varphi_{0m}$	0	$(1-\beta_{\eta\tau}^2)\cos\varphi_{0klmr}/8$	$\alpha_{k\varphi}\alpha_{l\varphi}\alpha_{m\varphi}\alpha_{r\varphi}(1-\beta_{\eta\tau}^2)\cos\varphi_{0klmr}/8$
В остальных случаях	—	0	0	0

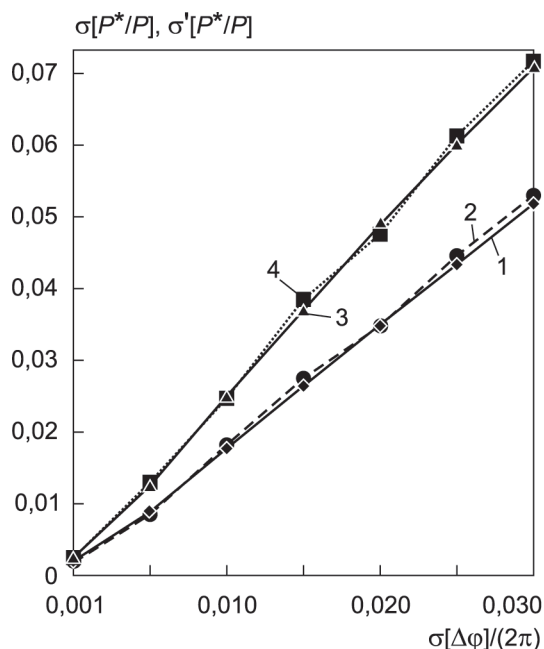


Рис. 1. Теоретическое $\sigma[P^*/P]$ (1, 3) и экспериментальное $\sigma'[P^*/P]$ (2, 4) средние квадратические отклонения оценки средней мощности: 1, 2 – при гармоническом колебании с флуктуацией фазы $\sigma[\Delta\varphi]/(2\pi)$; 3, 4 – при гармоническом колебании с флуктуацией фазы $\sigma[\Delta\varphi]/(2\pi)$ и апертурной неопределённости $\sigma[\tau_n]/T = \sigma[\Delta\varphi]/(2\pi)$; $\Delta t/T = 0,04$

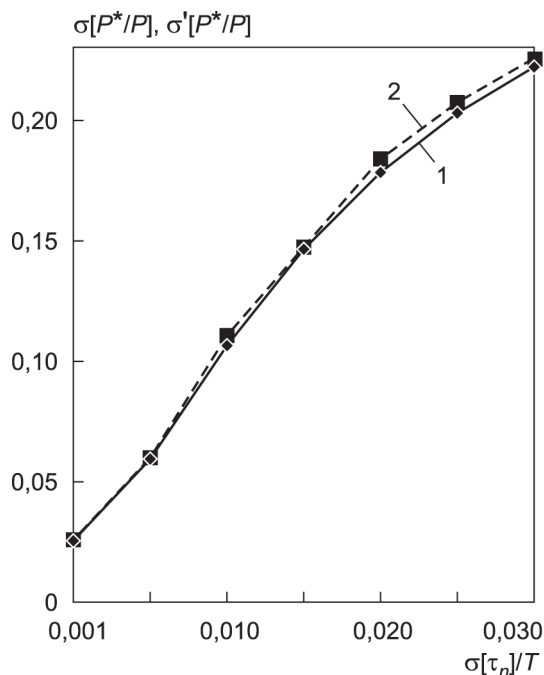


Рис. 2. Теоретическое $\sigma[P^*/P]$ (1) и экспериментальное $\sigma'[P^*/P]$ (2) средние квадратические отклонения оценки средней мощности сигнала с флуктуацией фаз составляющих гармонических колебаний: $\sigma[\Delta\varphi_k]/(2\pi) = 0,005$, $k=1$; $\sigma[\Delta\varphi_l]/(2\pi) = 0,01$, $l=3$; $\sigma[\Delta\varphi_m]/(2\pi) = 0,015$; $m=7$; $\Delta t/T = 0,04$; при апертурной неопределённости $\sigma[\tau_n]/T$

$\Phi_l(t_n)$, $\Phi_m(t_n)$, $\Phi_r(t_n)$ – случайные фазы соответствующих составляющих сигнала $x(t)$ в момент времени t_n с порядками k, l, m, r .

Для случайной фазы k -й составляющей сигнала $x(t)$ для момента времени t_n справедливо следующее выражение:

$$\Phi_k(t_n) = k\omega t_n - \varphi_{0k} + \Delta\varphi_{kn} = k\omega(n\Delta t + \tau_n) - \varphi_{0k} + \Delta\varphi_{kn}.$$

Расчётные формулы для ковариаций $\text{cov}[\cos\Phi_k \cos\Phi_l; \cos\Phi_m \cos\Phi_r]$ приведены в таблице, где рассмотрены частные случаи применения выражения (9):

действия флуктуаций фаз составляющих сигнала $x(t)$;

действия детерминированных составляющих сигнала $x(t)$ с учётом влияния апертурной неопределённости АЦП;

совместные действия флуктуаций фаз и апертурной неопределённости АЦП.

В таблице приведены величины η , ξ для указания соотношений между порядками k, l, m, r составляющих сигнала $x(t)$. Также приведены выражения для величин φ_{0klmr} определённых в виде сумм начальных фаз соответствующих гармонических составляющих сигнала $x(t)$. Частные случаи рассмотрены в таблице в целях их сравнения, а приведённые выражения для величин $\text{cov}[\cos\Phi_k \cos\Phi_l; \cos\Phi_m \cos\Phi_r]$ предусматривают указанные выше случаи действующих фазовых шумов в рамках определения модели (7) при соответствующих соотношениях между порядками k, l, m, r составляющих сигнала $x(t)$. Отметим, что максимальное влияние фазового спектра измеряемого сигнала $x(t)$ наблюдается при $\cos(\varphi_{0klmr}) = 1$.

Параметры $\alpha_{k\varphi}$, $\beta_{\eta\varphi}$, $\alpha_{k\tau}$, $\beta_{\eta\tau}$ (согласно соотношениям между порядками составляющих $1 \leq k \leq q$, η), входящие в выражения для ковариаций $\text{cov}[\cos\Phi_k \cos\Phi_l; \cos\Phi_m \cos\Phi_r]$ (см. таблицу) вычисляются по формулам:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{k\tau} &= \exp[-0,5(k\omega\sigma[\tau_n])^2]; \\ \beta_{\eta\tau} &= \exp[-0,5(\eta\omega\sigma[\tau_n])^2]; \\ \alpha_{k\varphi} &= \exp[-0,5(k\omega\sigma[\Delta\varphi_k])^2]; \\ \beta_{\eta\varphi} &= \exp[-0,5(\eta\omega\sigma[\Delta\varphi_k])^2]. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Из выражений (10) следует, что величины $\alpha_{k\varphi}$, $\beta_{\eta\varphi}$, $\alpha_{k\tau}$, $\beta_{\eta\tau}$ определяются параметрами $\sigma[\Delta\varphi_k]$, $\sigma[\tau_n]$ случайных флуктуаций фазы и апертурной неопределённости АЦП, соответственно, а также частотами составляющих сигнала $x(t)$. Таким образом, при неограниченном уменьшении параметров $\sigma[\Delta\varphi_k] \rightarrow 0$, $\sigma[\tau_n] \rightarrow 0$ получим $\alpha_{k\varphi} \rightarrow 1$, $\beta_{\eta\varphi} \rightarrow 1$ и $\alpha_{k\tau} \rightarrow 1$, $\beta_{\eta\tau} \rightarrow 1$, соответственно.

Далее приведены результаты исследований нормированной оценки P^*/P средней мощности сигнала $x(t)$ с флуктуациями фаз $\Delta\varphi_{kp}$ единичными амплитудами и нулевыми начальными фазами составляющих этого сигнала. В качестве нормирующего значения P согласно (8)

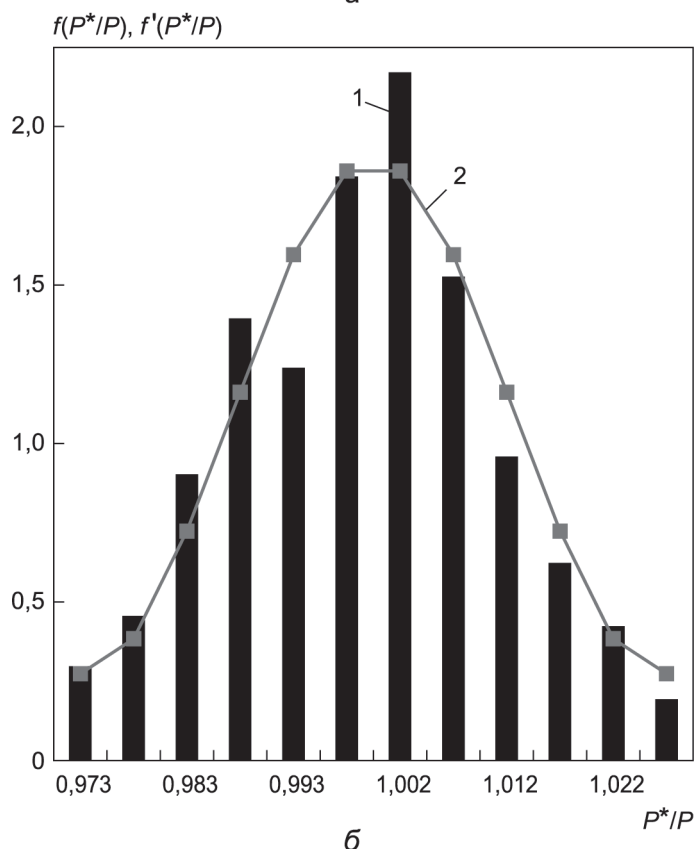
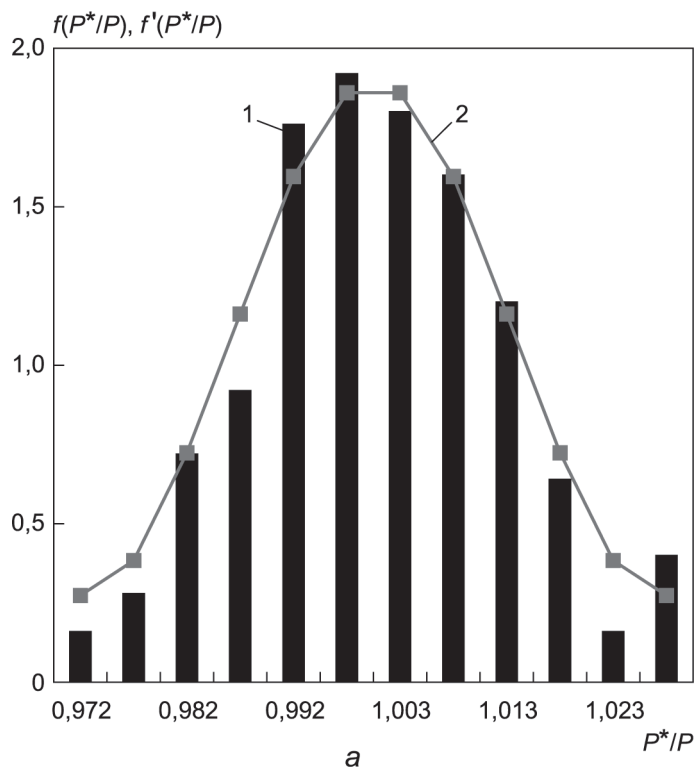


Рис. 3. Проверки гипотезы о соответствии статистического распределения вероятностей оценки P^*/P нормальному закону при флуктуации фазы гармонического колебания $\sigma[\Delta\varphi_k/(2\pi)] = 0,005$ и апертурной неопределённости $\sigma[\tau_n/T] = 0,005$; $\Delta t/T = 0,04$ (а) и при флуктуациях фаз составляющих гармонических колебаний $\sigma[\Delta\varphi_k/(2\pi)] = 0,001$, $k=1$; $\sigma[\Delta\varphi_l/(2\pi)] = 0,002$, $l=3$; $\sigma[\Delta\varphi_m/(2\pi)] = 0,003$, $m=7$; апертурной неопределённости $\sigma[\tau_n/T] = 0,001$; $\Delta t/T = 0,04$ (б):

1, 2 – статистическая и теоретическая $f(P^*/P)$ соответственно

принято математическое ожидание оценки P^* :

$$P = E[P^*] = 0,5 \sum_{k=1}^q \rho_k^2.$$

Тогда для математического ожидания нормированной оценки P^*/P справедливо выражение $E[P^*/P] = 1$. На рис. 1, 2 показаны теоретические σ и экспериментальные σ' зависимости СКО оценки P^*/P от параметров случайных величин, обуславливающих случайных характер исследуемого процесса:

относительного значения СКО флуктуации фазы гармонического колебания $\sigma[\Delta\varphi_k]/(2\pi)$;

относительного значения СКО апертурной неопределённости АЦП $\sigma[\tau_n]/T$.

Для теоретических зависимостей СКО оценки P^*/P определяется как

$$\sigma[P^*/P] = \sqrt{D[P^*]}/P,$$

а дисперсия $D[P^*]$ рассчитывается из выражения (9). Значения указанных величин авторы рассчитали с помощью формул для ковариаций (см. таблицу) и параметров $\alpha_{k\varphi}$, $\beta_{n\varphi}$, $\alpha_{k\tau}$, $\beta_{n\tau}$ при заданных значениях параметров $\sigma[\Delta\varphi_k]/(2\pi)$, $\sigma[\tau_n]/T$ и относительном значении интервала дискретизации $\Delta t/T = 0,04$. Экспериментальные зависимости получили методом статистического моделирования сигнала $x(t)$ с использованием модели (3) и выражения (7) для цифрового отсчёта этого сигнала. Для этого задали параметры исходных статистических процессов $\sigma[\Delta\varphi_k]/(2\pi)$ и $\sigma[\tau_n]/T$, значения $\Delta t/T$ и порядки составляющих колебаний k , l , m с последующим вычислением оценки P^* по формуле (6). Экспериментальные значения СКО σ' вычислили по выборкам оценок P^*/P при объёме выборки случайных данных $G=1000$. При моделировании и определении значений нормально распределённых случайных величин $\Delta\varphi_{kn}$, τ_n применяли генератор случайных чисел нормального распределения, описанный в работе [9].

Результаты проверки гипотез о соответствии статистических распределений оценки P^*/P нормальному закону с целью построения доверительного интервала нормированной оценки средней мощности [8, 9] приведены на рис. 3, а для гармонического колебания с флуктуацией фазы, а на рис. 3, б – для сигнала с флуктуацией фаз составляющих гармонических колебаний при апертурной неопределённости АЦП. Теоретическая плотность $f(P^*/P)$ вероятности нормального распределения зависит от параметров $E[P^*/P] = 1$, $\sigma[P^*/P]$, вычисленных по формулам (8), (9). Статистические плотности $f[P^*/P]$ вероятности статистических распределений оценки P^*/P определили по формуле

$$f'[P^*/P] = v/(G\Delta x),$$

где v – количество результатов наблюдения в заданном ин-

тервале; $G=300$ — объём выборки случайных данных; Δx — ширина интервала.

Гипотезу проверили при математическом ожидании $E[P^*/P]=1$ и СКО $\sigma[P^*/P]=0,013$. При этом флуктуация фазы гармонического колебания $\sigma[\Delta\varphi_k]/(2\pi)=0,005$, апертурная неопределённость $\sigma[\tau_n]/T=0,005$, отношение $\Delta t/T=0,04$. При числе степеней свободы 11 и уровне значимости 0,05 выборочная статистика $X^2=2,89$ не превышала $\chi^2_{1, 0,05}=19,68$ (см. рис. 3, а). Верхнюю и нижнюю доверительные границы для нормированной оценки P^*/P гармонического колебания с флуктуацией фазы с учётом влияния значимой апертурной неопределённости АЦП при доверительной вероятности 0,95 вычислили следующим образом:

$$\delta_{в,н} = E[P^*/P] \pm z_{0,95} \sigma[P^*/P]$$

Для процентной точки стандартного нормального распределения $z_{0,95}=2,0$ верхняя и нижняя доверительные границы составили 1,026 и 0,974, соответственно [8].

Результаты исследований (см. рис. 3, б) закона распределения оценки P^*/P для сигнала с флуктуациями фаз составляющих колебаний и параметрами $\sigma[\Delta\varphi_k]/(2\pi)=0,001$, $k=1$; $\sigma[\Delta\varphi_l]/(2\pi)=0,002$, $l=3$; $\sigma[\Delta\varphi_m]/(2\pi)=0,003$, $m=7$; апертурной неопределённости $\sigma[\tau_n]/T=0,001$, $\Delta t/T=0,04$ и проверки соответствия этого закона нормальному закону с параметрами распределения $E[P^*/P]=1$ и $\sigma[P^*/P]=0,012$ оказались следующие:

выборочная статистика $X^2=2,65$ не превысила значение $\chi^2_{1, 0,05}=19,68$ при числе степеней свободы 11 и уровне значимости 0,05;

верхняя и нижняя доверительные границы для нормированной оценки P^*/P сигнала с флуктуациями фаз составляющих колебаний с учётом влияния значимой апертурной неопределённости АЦП при доверительной вероятности 0,95 составили 1,024 и 0,976, соответственно.

Заключение: В результате проведённых исследований получены выражения для характеристик оценки средней мощности сигнала с флуктуацией фаз составляющих гармонических колебаний при апертурной неопределённости АЦП, используемого для преобразования сигнала. Выражения для математического ожидания и дисперсии приведены в аналитической форме и устанавливают зависимости между характеристиками исходных случайных процессов и характеристиками найденной оценки с учётом спектрального состава сигнала и частоты дискретизации АЦП. В данной работе частота дискретизации представлена количеством отсчётов N или в виде относительного значения интервала дискретизации $\Delta t/T$. Исследования, проведённые при условии независимости центрированных случайных величин $\Delta\varphi_{kn}$, τ_n от времени

и между собой, показали, что $E[P^*]=0,5 \sum_{k=1}^q \rho_k^2 = P$, т. е.

оценка P^* является несмещённой оценкой средней мощности P сигнала $x(t)$ в интервале времени $0-T$. Дисперсия $D[P^*]$ стремится к нулю при неограниченном уменьшении фазо-

вых флуктуаций и апертурной неопределённости. По мере увеличения количества отсчётов N дисперсия уменьшается при условии, что параметры отклонений $\Delta\varphi_{kn}$, τ_n находятся в пределах $0 \leq \sigma[\Delta\varphi_k] < 2\pi/N$; $0 \leq \sigma[\tau_n] < \Delta t$, установленных для исследуемой модели сигнала. Необходимо отметить, что случайные факторы, определённые в рассматриваемой модели (7), по разному воздействуют на рассеяние оценки P^* , что находит отражение не только в выражениях, но и в составе ковариаций, указанных в приведённой таблице для разных случаев применения выражения (9). Представленные на рис. 1, 2 результаты статистического моделирования исходных случайных процессов с последующим вычислением статистических характеристик результирующего распределения оценки средней мощности сигнала по выборке случайных данных подтвердили справедливость аналитических выражений (8), (9). Результаты исследований закона распределения оценки средней мощности сигнала с применением указанных выражений можно использовать, когда необходимо указать доверительные границы оценки средней мощности сигнала с флуктуацией фаз составляющих гармонических колебаний и учесть влияние характеристик АЦП. Если границы интервала неопределённости оценки средней мощности заданы, то выражения (8), (9) можно применять для нахождения оптимальных соотношений между параметрами флуктуаций фаз и апертурной неопределённости.

Результаты настоящих исследований могут быть использованы в области цифровых методов измерений энергетических характеристик сигналов при необходимости учёта влияния на результат измерений фазовых шумов.

Л и т е р а т у р а

1. Коваленко И. Н., Гнеденко Б. В. Теория вероятностей. К.: Выща школа, 1990.
2. Патюков В. Г., Патюков Е. В., Силантьев А. А. Оценка отношения сигнал-шум на основе фазовых флуктуаций сигнала // Журнал радиоэлектроники. 2013. № 4. С. 1–10.
3. Бельчиков С. Н. Фазовый шум в анализаторе спектра: как спуститься ниже -120 дБн/Гц на отстройке 10 кГц в диапазоне частот до 14 ГГц, или борьба за децибелы // Компоненты и технологии. 2009. № 5. С. 139–146.
4. Макс Ж. Методы и техника обработки сигналов при физических измерениях: в 2-х т. Т. 1. М.: Мир, 1983.
5. Пугачев В. С. Теория случайных функций и её применение к задачам автоматического управления. М.: Физматгиз, 1962.
6. Розина О. Ю., Дидик Ю. И. Погрешность алгоритма вычисления результата измерения активной мощности в электрической цепи при полигармонических процессах // Измерительная техника. 1995. № 7. С. 38–42.
7. Розина О. Ю. Влияние апертурной неопределённости аналого-цифрового преобразователя на ре-

зультат измерений активной мощности периодического несинусоидального тока // Метрология. 2014. № 8. С. 33–48.

8. Бендат Дж., Пирсол А. Прикладной анализ случайных данных. М.: Мир, 1989.

9. Идье В., Драйард Д., Джеймс Ф., Садуле Б. Стати-

стические методы в экспериментальной физике. М.: Атомиздат, 1976.

10. Крамер Г. Математические методы статистики. Мир, 1975.

Дата принятия: 29.05.2018.

Estimation of the average signal power with a phase fluctuation of the harmonic oscillation components with the aperture uncertainty of the analog-to-digital converter

S. A. Zasytkin, O. Yu. Rozina

Ural research Institute of Metrology, Yekaterinburg, Russia, e-mail: rozina@uniim.ru

The results of studies of the estimation of the average power of the signal with phase fluctuations of harmonic components with a view to the spectral composition of the signal, characteristics of the phase fluctuations, the aperture uncertainty, and the sampling frequency of the analog-to-digital converter are presented. Analytic expressions are obtained for the numerical characteristics of the distribution of the above estimate for the normal probability distribution of random variables for uncorrelated random processes.

Key words: signal, spectrum, harmonic oscillations, phase fluctuations, average power, sampling, aperture jitter, estimation, covariance.

