

Эффективные оценки параметров Стокса частично поляризованного излучения в условиях нормального аддитивного шума

В. И. Смирнов

Национальный исследовательский университет «МЭИ», Москва, Россия, e-mail: smirnovvi@mpei.ru

Методами параметрической теории информации исследованы минимальные дисперсионные границы оценок параметров Стокса частично поляризованного квазимонохроматического излучения в поляриметрической схеме с анализатором и фазовым компенсатором в условиях нормального аддитивного шума. На основе анализа распределений плотности информации о параметрах Стокса по факторам угла поворота анализатора и фазового сдвига компенсатора найдены оптимальные планы измерений и соответствующие дисперсионные матрицы. Выведены формулы для получения эффективных оценок параметров Стокса. Рассчитаны предельные погрешности оценок параметров поляризации и их распределения по сфере Пуанкаре.

Ключевые слова: поляризационные измерения, эффективные оценки, плотность информации, параметры Стокса, сфера Пуанкаре, степень поляризации.

Широкое применение поляризационных устройств в оптических приборах и системах различного назначения делает актуальной задачу прецизионного измерения характеристик поляризации излучения. Существуют разные способы измерений состояния поляризации [1] и множество реализующих их устройств. Целью настоящей работы является определение эффективности и предельной точности поляризационных измерений на основе теории информации и нелинейного параметрического оценивания [2–6].

Состояние поляризации квазимонохроматической волны можно задавать разными способами. Во многих случаях удобно использовать параметры Стокса – действительные величины одинаковой размерности, наглядно интерпретирующие координаты точки на сфере Пуанкаре [1, 7]. Параметры Стокса широко применяются в оптике, кристаллографии и квантовой физике. Анализ поляризационных измерений целесообразно провести на основе схемы регистрации, содержащей поляризатор и фазовый компенсатор. В этой схеме можно сканировать угол θ поворота поляризатора и вносимую компенсатором фазовую задержку ε . На вход схемы поступает анализируемое излучение, на выходе измеряется интенсивность прошедшей волны. Состояние поляризации будем описывать с помощью параметров Стокса.

Параметрической моделью задачи является функциональная зависимость выходной величины от факторов θ , ε и искоемых параметров Стокса входного излучения. Такую модель нетрудно получить с применением формулы для интенсивности излучения на выходе поляризатора [1]:

$$I(\theta, \varepsilon) = I_{xx} \cos^2 \theta + I_{yy} \sin^2 \theta + I_{xy} e^{-i\varepsilon} \sin \theta \cos \theta + I_{yx} e^{i\varepsilon} \sin \theta \cos \theta. \quad (1)$$

Формула (1) выражает выходную интенсивность для произвольных факторов θ , ε через элементы матрицы когерентности J квазимонохроматического излучения

$$J = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} \\ I_{yx} & I_{yy} \end{pmatrix};$$

$$I_{xx} = \langle E_x E_x^* \rangle; I_{yy} = \langle E_y E_y^* \rangle; I_{xy} = \langle E_x E_y^* \rangle; I_{yx} = \langle E_y E_x^* \rangle,$$

где E_x , E_y – проекции светового вектора на соответствующие оси координат; $\langle \rangle$ – знак статистического усреднения; $*$ – знак комплексного сопряжения.

Связь между параметрами Стокса и элементами матрицы когерентности определяется выражениями

$$S_0 = I_{xx} + I_{yy}; S_1 = I_{xx} - I_{yy}; S_2 = I_{xy} + I_{yx}; S_3 = i(I_{yx} - I_{xy}).$$

Тогда искомая модель примет вид

$$I(\theta, \varepsilon; \mathbf{s}) = \frac{S_0}{2} + \frac{S_1}{2} \cos 2\theta + \frac{S_2}{2} \sin 2\theta \cos \varepsilon + \frac{S_3}{2} \sin 2\theta \sin \varepsilon. \quad (2)$$

Формула (2) задаёт двухфакторную (θ, ε) четырёхпараметрическую (s_0, s_1, s_2, s_3) модель. Качество оценок вектора $\mathbf{s} = (s_0, s_1, s_2, s_3)$ удобно описывать дисперсионной матрицей, диагональные элементы которой характеризуют дисперсии оценок параметров, а недиагональные элементы – взаимную коррелированность соответствующих оценок.

Согласно теореме Рао–Крамера [2, 5] существует нижняя граница дисперсионной матрицы оценок, называемая минимальной дисперсионной матричной границей (МДМГ). Она определяет теоретическую предельную точность совместного оценивания параметров, потенциально достижимую при заданной статистике погрешностей измерений и полном использовании информации, полученной из эксперимента с учётом априорных данных. МДМГ можно найти как матрицу, обратную информационной матрице IM :

$$IM = m_1 \left[\left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{s}} \ln w(I|\mathbf{s}) \right) \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{s}} \ln w(I|\mathbf{s}) \right)^T \right],$$

где m_1 – математическое ожидание; $\left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{s}} \ln w(I|\mathbf{s}) \right)$ – вектор

столбец с элементами $\left(\frac{\partial}{\partial s_i} \ln w(I|\mathbf{s})\right)$; $w(I|\mathbf{s})$ – функция правдоподобия или условная плотность вероятности, рассматриваемая как функция I при фиксированном векторе $\mathbf{s}$.

Результаты измерений можно представить в виде серии оценок (отсчётов) $\hat{I}_{k,l}$ выходной интенсивности, полученных при различных факторах $\theta_k (k=0, 1, \dots, m)$, $\varepsilon_l (l=0, 1, \dots, n)$:

$$\hat{I}_{k,l} = I(\theta_k, \varepsilon_l; \mathbf{s}) + \Delta I_{k,l},$$

где $\Delta I_{k,l}$ – погрешность единичного отсчёта.

Предположим, что погрешности $\Delta I_{k,l}$ для любых точек являются нормально распределёнными случайными величинами с нулевым средним значением и одинаковым стандартным отклонением σ_I , причём различные отсчёты (при $k \neq l$) взаимно не коррелированы. При сделанных предположениях функция правдоподобия примет вид

$$w(I|\mathbf{s}) = \prod_k \prod_l \frac{1}{\sigma_I \sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{[\hat{I}_{k,l} - I(\theta_k, \varepsilon_l; \mathbf{s})]^2}{2\sigma_I^2} \right\}. \quad (3)$$

С учётом (3) для элементов информационной матрицы получим

$$IM_{i,j} = \frac{1}{\sigma_I^2} \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{l=0}^{n-1} \frac{\partial}{\partial s_i} [I(\theta_k, \varepsilon_l; \mathbf{s})] \frac{\partial}{\partial s_j} [I(\theta_k, \varepsilon_l; \mathbf{s})]. \quad (4)$$

Формулы (2), (4) позволяют рассчитать информационную матрицу для любого набора точек в плоскости (θ, ε) . Определим в каких точках необходимо провести измерения, чтобы оценить параметры Стокса с максимальной точностью за минимальное время. Учтём, что для нормального шума квадрат стандартного отклонения $\sigma_I^2 = G/\tau$, где G – плотность мощности шума; τ – время измерения в одной точке. Для корректности сравнения информационных и дисперсионных матриц при различных планах следует ориентироваться на значения этих матриц, приведённые к единому времени $T = N\tau$, N – общее число точек измерения. Поэтому далее оценим нормированные матрицы, приведённые к единичному общему времени измерения T и единичной плотности мощности шума G . Элементы нормированной информационной матрицы оценок параметров Стокса IN определяются выражением

$$IN_{i,j} = \frac{1}{mn} \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{l=0}^{n-1} \frac{\partial}{\partial s_i} [I(\theta_k, \varepsilon_l; \mathbf{s})] \frac{\partial}{\partial s_j} [I(\theta_k, \varepsilon_l; \mathbf{s})]. \quad (5)$$

Условие нормировки означает, что след информационной матрицы постоянен и равен $\text{tr}(IN) = 0.5$. Физический смысл состоит в том, что интенсивность излучения на выходе из поляризатора равна половине интенсивности на его входе. Нормированная МДМГ определяется как матрица, обратная матрице IN :

$$DN = (IN)^{-1}. \quad (6)$$

Рассмотрим сначала планы измерений с равномерным шагом по углам θ и фазовым задержкам ε в точках $\theta_k = \pi k/m$, $k=0, \dots, m-1$ и $\varepsilon_l = \pi l/n$, $l=0, \dots, n-1$. Расчёты по формулам (5), (6) для любых $m \geq 3$, $n \geq 2$ в этом случае дают один и тот же результат:

$$DN = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Согласно (7) оценки являются некоррелированными, определитель этой матрицы $|DN| = 8192$. В частности, при $m=3$, $n=2$ необходимо выполнить шесть измерений выходной интенсивности $I(\theta, \varepsilon)$:

$$\begin{aligned} I_1 &= I(0, 0); \quad I_2 = I(\pi/2, 0); \quad I_3 = I(\pi, 0); \\ I_4 &= I(0, \pi/2); \quad I_5 = I(\pi/2, \pi/2); \quad I_6 = I(\pi, \pi/2). \end{aligned} \quad (8)$$

Согласно модели (2) в отсутствие шумов при таком равномерном шеститочечном плане измерений можно определить четыре параметра Стокса из системы шести уравнений:

$$\left. \begin{aligned} I_1 &= s_0/2 + s_1/2; \\ I_2 &= s_0/2 - s_1/4 + s_2\sqrt{3}/4; \\ I_3 &= s_0/2 - s_1/4 - s_2\sqrt{3}/4; \\ I_4 &= I_1; \\ I_5 &= s_0/2 - s_1/4 + s_3\sqrt{3}/4; \\ I_6 &= s_0/2 - s_1/4 - s_3\sqrt{3}/4. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Из системы (9), взяв в качестве решения средневзвешенные значения, получим оценки параметров Стокса

$$\left. \begin{aligned} \hat{s}_0 &= (\hat{I}_1 + \hat{I}_2 + \hat{I}_3 + \hat{I}_4 + \hat{I}_5 + \hat{I}_6)/3; \\ \hat{s}_1 &= (2\hat{I}_1 - \hat{I}_2 - \hat{I}_3 + 2\hat{I}_4 - \hat{I}_5 - \hat{I}_6)/3; \\ \hat{s}_2 &= (\hat{I}_2 - \hat{I}_3)2\sqrt{3}/3; \\ \hat{s}_3 &= (\hat{I}_5 - \hat{I}_6)2\sqrt{3}/3. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

По формулам для расчёта погрешностей косвенных измерений можно найти нормированную дисперсионную матрицу оценок параметров Стокса. Результат идентичен DN (см. формулу (7)), т. е. по формулам (10) можно вычислить наилучшие оценки параметров Стокса из возможных в рамках планов с постоянным шагом.

При непрерывном сканировании с постоянной скоростью точек измерения по параметрам θ и ε в течение времени $T=1$ с элементы нормированной информационной матрицы (5) можно представить в интегральном выражении:

$$IN_{i,j} = \frac{1}{\pi^2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^\pi \frac{\partial}{\partial s_i} [I(\theta, \varepsilon; \mathbf{s})] \frac{\partial}{\partial s_j} [I(\theta, \varepsilon; \mathbf{s})] d\theta d\varepsilon. \quad (11)$$

С учётом формулы (6) из выражения (11) следует, что результат DN совпадёт с матрицей (7). Кроме того, необходимо указать, что для оптимизации выбора числа и координат точек измерений при их произвольном расположении полезно

$$\text{ввести понятие плотности информации } ws_i(\theta, \varepsilon) = \left[\frac{\partial I(\theta, \varepsilon; \mathbf{s})}{\partial s_i} \right]^2$$

и рассмотреть распределения $ws_i(\theta, \varepsilon)$, $i=0, 1, 2, 3$. Поскольку $ws_0=1/4$ не зависит от θ, ε , любая точка одинаково информативна по параметру s_0 . Плотность информации $ws_1 = [\cos(2\theta)]^2/4$ не зависит от ε и имеет максимумы при $\theta=0; \pi/2$. Плотность информации $ws_2 = [\sin(2\theta)\cos\varepsilon]^2/4$ принимает максимальные значения в точках с координатами $(\pi/4, 0)$, $(3\pi/4, 0)$, а плотность $ws_3 = [\sin(2\theta)\sin\varepsilon]^2/4$ – в точках с координатами $(\pi/4, \pi/2)$, $(3\pi/4, \pi/2)$. Таким образом, оптимальный с точки зрения максимальной информативности шеститочечный план примет вид

$$I_1 = I(0, 0); I_2 = I(\pi/2, 0); I_3 = I(\pi/4, 0); \\ I_4 = I(3\pi/4, 0); I_5 = I(\pi/4, \pi/2); I_6 = I(\pi/4, \pi/2). \quad (12)$$

В соответствии с планом (12) рассчитаем нормированную МДМГ по алгоритмам (5), (6):

$$DN = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}. \quad (13)$$

Согласно (13) оценки являются некоррелированными, определитель $|DN|=6912$. В рамках модели (2) при отсутствии шумов из плана (12) следует система шести уравнений для определения четырёх параметров Стокса:

$$\left. \begin{aligned} I_1 &= s_0/2 + s_1/2; \\ I_2 &= s_0/2 - s_1/2; \\ I_3 &= s_0/2 + s_2/2; \\ I_4 &= s_0/2 - s_2/2; \\ I_5 &= s_0/2 + s_3/2; \\ I_6 &= s_0/2 - s_3/2. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Решим систему (14), выберем из нескольких решений средневзвешенные значения и найдём оценки параметров Стокса

$$\left. \begin{aligned} \hat{s}_0 &= (\hat{I}_1 + \hat{I}_2 + \hat{I}_3 + \hat{I}_4 + \hat{I}_5 + \hat{I}_6)/3; \\ \hat{s}_1 &= \hat{I}_1 - \hat{I}_2; \\ \hat{s}_2 &= \hat{I}_3 - \hat{I}_4; \\ \hat{s}_3 &= \hat{I}_5 - \hat{I}_6. \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

По формулам для вычисления погрешностей при косвенных измерениях можно убедиться, что нормированная дисперсионная матрица (15) идентична матрице DN (13). Это

означает, что из решения системы (14) можно получить эффективные оценки параметров Стокса.

Анализ показывает, что именно план (12) и оценки (15) позволяют провести измерения параметров Стокса с максимальной точностью за минимальное время. Отметим, что этот план описан в классической монографии [1], однако приведённая там формула $\hat{s}_0 = \hat{I}_1 + \hat{I}_2$ для оценки нулевого параметра не учитывает в полном объёме информацию, содержащуюся в отсчётах (14), и это уменьшает точность измерений. Нормированная дисперсионная матрица, полученная по формулам из [1], и её определитель имеют вид соответственно

$$DN = \begin{pmatrix} 12 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}; |DN| = 20736. \quad (16)$$

Определитель матрицы (16) в три раза больше определителя матрицы (13). Поэтому для получения эффективного результата требуется использовать ещё две независимые оценки параметра s_0 : $\hat{s}_0' = \hat{I}_3 + \hat{I}_4$; $\hat{s}_0'' = \hat{I}_5 + \hat{I}_6$. В принципе для определения четырёх параметров достаточно и пяти, и даже четырёх отсчетов. Однако в случае применения таких четырёх- и пятиточечных планов возникает коррелированность оценок параметров Стокса, МДМГ теряет диагональный вид, а определитель $|DN|$ существенно увеличивается. Например, для плана (12) без точки 2 и без точек 2 и 5 имеем соответственно

$$DN = \begin{pmatrix} 5 & -5 & 0 & 0 \\ -5 & 25 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}; |DN| = 10000.$$

$$DN = \begin{pmatrix} 8 & -8 & 0 & -8 \\ -8 & 24 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 24 \end{pmatrix}; |DN| = 16384.$$

Любой параметр поляризации можно выразить как некоторую функцию параметров Стокса: $p = f(s_0, s_1, s_2, s_3)$. Минимальную дисперсию $(\sigma p)_{\min}^2$ вычислим по правилам расчёта погрешности косвенных измерений. Для МДМГ диагонального вида нормированную минимальную дисперсию оценки параметра p найдём по формуле

$$DN\{\hat{p}\} = \sum_{i=0}^3 \left(\frac{\partial p}{\partial s_i} \right)^2 DN_{i,i}. \quad (17)$$

Эффективность оценки в данном случае определим как [5]:

$$Ep = DNp^* / DN\{\hat{p}\}, \quad (18)$$

где DNp^* – нормированная дисперсия оценки, полученной по оптимальному плану (12).

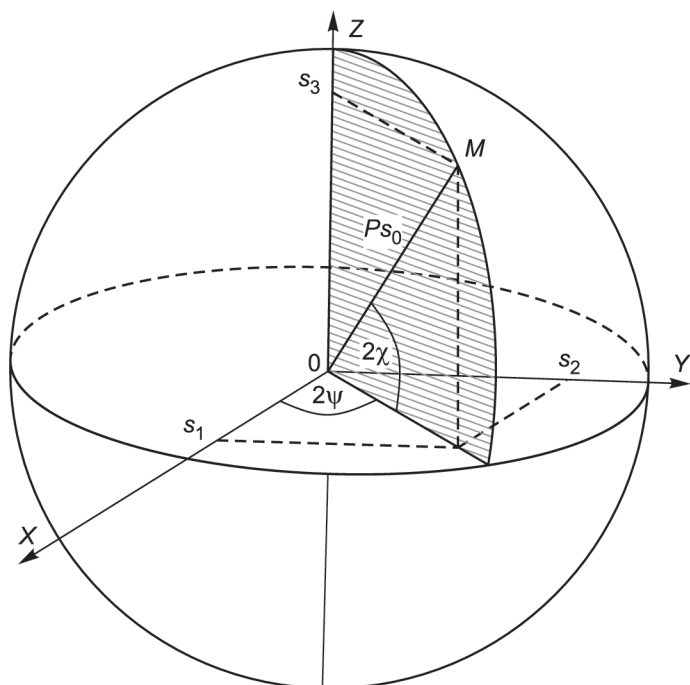


Рис. 1. Сфера Пуанкаре для поляризованной части частично поляризованного излучения ($OM=Ps_0$, где P – степень поляризации)

В качестве примера рассмотрим оценки степени P поляризации через параметры Стокса:

$$P = \sqrt{s_1^2 + s_2^2 + s_3^2} / s_0. \quad (19)$$

С учётом соотношения (19) формула (17) примет вид

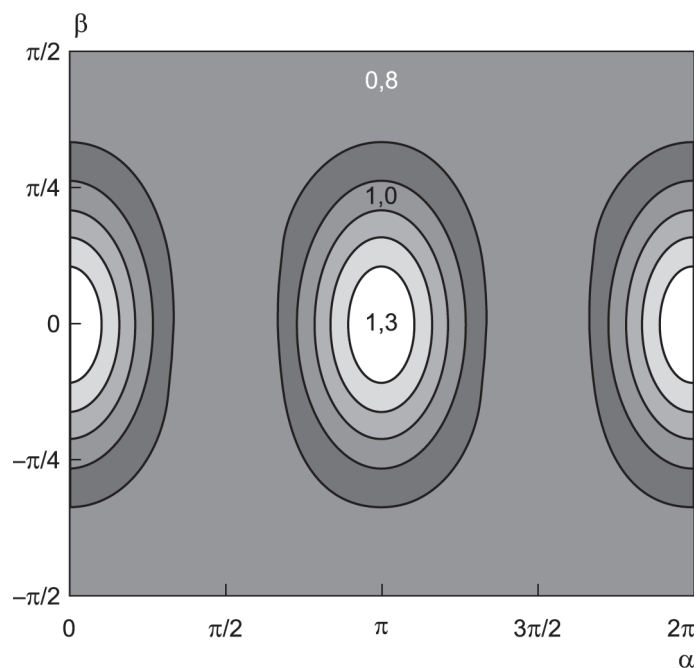


Рис. 2. Распределение эффективности оценки степени поляризации по сфере Пуанкаре при равномерном плане ($\alpha=2\psi$, $\beta=2\chi$)

$$DN\{\hat{P}\} = \frac{DN_{0,0}P^2}{s_0^2} + \frac{DN_{1,1}s_1^2 + DN_{2,2}s_2^2 + DN_{3,3}s_3^2}{s_0^2(s_1^2 + s_2^2 + s_3^2)}. \quad (20)$$

Для частично поляризованного излучения оценки параметров Стокса определяются выражениями

$$s_1 = s_0 P \cos 2\psi \cos 2\chi;$$

$$s_2 = s_0 P \sin 2\psi \cos 2\chi;$$

$$s_3 = s_0 P \sin 2\chi.$$

Здесь 2ψ , 2χ – соответственно координаты угловых долготы и широты на сфере Пуанкаре (рис. 1). Координаты ψ , χ связаны с параметрами эллипса поляризации и его ориентацией относительно выбранных осей координат. Угол ψ – угол между большой осью эллипса поляризации и осью X. Угол χ определяется соотношением $\tan \chi = b/a$, где a , b – длины большой и малой полуосей эллипса поляризации. Положим в формуле (20) $s_0 = 1$ и получим

$$DN\{\hat{P}\} = DN_{0,0}P^2 + DN_{1,1}[\cos 2\psi \cos 2\chi]^2 + DN_{2,2}[\sin 2\psi \cos 2\chi]^2 + DN_{3,3}[\sin 2\chi]^2. \quad (21)$$

Для оптимального плана (12) с дисперсионной матрицей (13) из (21) следует, что $DN\{\hat{P}\}$ одинакова во всех точках сферы Пуанкаре и нормированная дисперсия оценки равна

$$DNP^* = 4P^2 + 12. \quad (22)$$

Для равномерного плана (8) с дисперсионной матрицей (7) формула (21) показывает существенную зависимость $DN\{\hat{P}\}$ от координат ψ , χ . Карта распределения эффективности $EP = DNP^* / DN\{\hat{P}\}$ этой оценки по сфере Пуанкаре, полученная по формуле (18), показана на рис. 2, где для наглядности сферическая поверхность представлена прямоугольной плоскостью (по осям абсцисс и ординат отложены соответственно долгота $\alpha=2\psi$ и широта $\beta=2\chi$). При такой трансформации необходимо учесть искажение масштаба областей от экватора к полюсам, в частности, меридианы примут вид вертикальных линий $\alpha=\text{const}$, а полюсные точки – горизонтальных линий $\beta=\pm\pi/2$. На карте распределения эффективности есть области повышенной ($EP>1$) и пониженной ($EP<1$) эффективности. Анализ показывает, что положение таких областей можно изменять, варьируя соотношения между дисперсионными коэффициентами. Наиболее удобно это сделать, если в оптимальном плане (12) перейти к неравноточным измерениям. Для этого в случае нормального белого шума достаточно изменить время τ измерения в отдельных точках при фиксированном общем времени. Диагональный вид и нормировка дисперсионной матрицы не нарушатся, если выполнить условия

$$\left. \begin{aligned} \tau_1 = \tau_2 = T_1/2; \\ \tau_3 = \tau_4 = T_2/2; \\ \tau_5 = \tau_6 = T_3/2; \\ T_1 + T_2 + T_3 = 1. \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

Элементы нормированной дисперсионной матрицы и оценок параметров Стокса при этом примут вид соответственно

$$\left. \begin{aligned} DN_{0,0} &= 4; \quad DN_{1,1} = 4/T_1; \\ DN_{2,2} &= 4/T_2; \quad DN_{3,3} = 4/T_3; \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

$$\hat{s}_0 = (\hat{I}_1 + \hat{I}_2)T_1 + (\hat{I}_3 + \hat{I}_4)T_2 + (\hat{I}_5 + \hat{I}_6)T_3;$$

$$\hat{s}_1 = \hat{I}_1 - \hat{I}_2;$$

$$\hat{s}_2 = \hat{I}_3 - \hat{I}_4;$$

$$\hat{s}_3 = \hat{I}_5 - \hat{I}_6.$$

В случае измерений степени поляризации конфигурация и положение областей эффективности оценок на сфере Пуанкаре с учётом (23), (24) определяются двумя независимыми параметрами, например

$$d = DN_{1,1}/DN_{2,2} = T_2/T_1;$$

$$f = DN_{3,3}/DN_{3,3}^* = T_3^*/T_3,$$

где T_3^* соответствует оптимальному равнооточному плану (12).

Картинки областей эффективности оценки степени поляризации на сфере Пуанкаре в координатах (α, β) для ряда значений параметров d, f показаны на рис. 3. Видно, что подбором параметров d, f можно изменять положение этих областей, отдавая предпочтение в точности оценок для экваториальной или полярной области сферы Пуанкаре. Другими словами, при наличии априорной информации можно получать оценки степени поляризации повышенной эффективности ($EP > 1$) в области состояний, близких к линейным или круговым.

Приведём пример численной оценки. Допустим, из физического содержания эксперимента ясно, что эллиптичность поляризованной составляющей излучения соответствует условию $|\beta| \geq \pi/4$. Тогда, как показывают расчёты, выигрыш в эффективности будет максимальным при $d=1, f=0,49$ и в среднем составит 41 %.

В пределе при экстремальных значениях параметров d, f можно уменьшить дисперсию оценки степени поляризации в три раза по сравнению с DNP^* (22). При этом область повышенной эффективности стягивается в точки на экваторе или на полюсах сферы Пуанкаре, и оценивается степень поляризации в частном случае круговой либо линейной поляризации поляризованной составляющей излучения.

Аналогичным образом можно исследовать оценки любых параметров поляризации: азимута, эллиптичности и других, с применением выражения (17) и формул, связывающих данный параметр с параметрами Стокса.

Полученные в настоящей работе результаты можно использовать для оптимизации алгоритмов обработки сигналов и повышения эффективности работы оптико-электронных приборов и систем широкого профиля: от лазерных

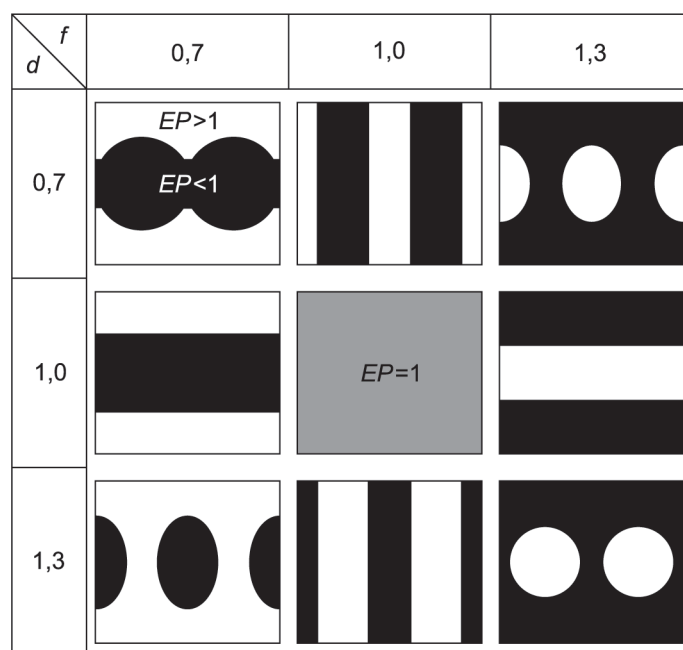


Рис. 3. Картинки областей эффективности оценок степени поляризации на сфере Пуанкаре в координатах α, β при различных параметрах $d = T_2/T_1, f = T_3^*/T_3$

доплеровских измерителей скорости потоков [8] и квантово-оптических систем наведения [9, 10] до астрономических систем 3D-интерферометрии [11, 12].

Л и т е р а т у р а

1. Борн М., Вольф Э. Основы оптики. М.: Наука, 1973.
2. Бард Й. Нелинейное оценивание параметров. М.: Статистика, 1979.
3. Смирнов В. И. Фундаментальные ограничения точности совместных измерений параметров оптических полей // Измерительная техника. 2010. № 9. С. 26–31.
4. Смирнов В. И. Соотношение неопределенностей и соотношение погрешностей в оптических измерениях // Измерительная техника. 2014. № 7. С. 15–19.
5. Мудров В. И., Кушко В. Л. Методы обработки измерений. М.: Сов. Радио, 1983.
6. Ринкевичюс Б. С. Лазерная диагностика потоков. М.: Изд-во МЭИ, 1990.
7. Ищенко Е. Ф., Соколов А. Л. Поляризационный анализ. М.: Знак, 1998.
8. Ринкевичюс Б. С. Лазерная доплеровская анемометрия. М.: Кнорус, 2017.
9. Актентьев А. С., Соколов А. Л., Садовников М. А., Симонов Г. В. Поляризационный анализ системы наведения квантово-оптических систем // Оптика и спектроскопия. 2017. Т. 122. № 6. С. 1044–1050.
10. Sokolov A. L. Optical vortices with axisymmetric polarization structure // Opt. Eng. 2017. No. 56 (1). P. 014109.
11. Ахметов И. И., Фролов П. Н., Ринкевичюс Б. С., Киселёв А. В., Тавров А. В. Ахроматический 3D-интерферометр

для контроля и анализа качества волнового фронта // Измерительная техника. 2013. № 8. С. 28–30.

12. Фролов П. Н., Ананьева В. И., Ксанфомалити Л. В., Тавров А. В. Наблюдение фазовых кривых экзопланет с по-

мощью звездного коронографа // Астрономический вестник. 2015. Т. 49. № 6. С. 448.

Дата принятия: 06.04.2018.

Effective estimation of the Stokes parameters of a partially polarized radiation at the normal additive noise

V. I. Smirnov

National research University "MEI", Moscow, Russia, e-mail: smirnovvi@mpei.ru

Parametric information theory is applied for investigation of the minimum variance boundary of the Stokes parameter estimates of a partially polarized quasi-monochromatic radiation in a polarimetric scheme with the analyzer and phase compensator at the normal additive noise. Based on the analysis of the information density distributions in the factors of the rotation angle and the phase shift the optimal measurement plans and the associated dispersion matrixes are found. The formulas for obtaining effective estimates are derived. The error limits of the various polarization parameters and their distributions over the Poincare sphere are calculated.

Key words: polarization measurements, effective estimates, information density, Stokes parameters, Poincare sphere, degree of polarization.

