

(Германия), BEV (Австрия), JV (Норвегия), SP (Швеция), NMC (Сингапур), INMETRO (Бразилия), NPL (Англия), VNIIM (Россия).

В качестве транспортируемого эталона лабораторией-пилотом были представлены одноэлементный ТЭП с номинальной силой тока 10 мА и шунт переменного тока с номинальной силой тока 5 А. Падение напряжения на шунте измеряли одноэлементным ТЭП напряжения с номинальным значением 1 В, также представленного лабораторией-пилотом. Отдельные результаты сличений приведены на рис. 2, 3. Результаты международных ключевых сличений подтверждают достоверность заявленных ВНИИМ метрологических характеристик, а также то, что ГЭТ 88—2014 не уступает уровню национальных эталонов промышленно развитых стран — Англии, Германии и США.

## Литература

1. **Приказ** Федерального агентства по техническому регулированию и метрологии от 14 мая 2015 г. № 575 «Об утверждении Государственной поверочной схемы для средств измерений силы переменного электрического тока от  $1 \cdot 10^{-8}$  до 100 А в диапазоне частот от  $1 \cdot 10^{-1}$  до  $1 \cdot 10^6$  Гц».

2. **Приказ** Федерального агентства по техническому регулированию и метрологии от 29 января 2015 г. № 121 «Об утверждении Государственного первичного специального эталона единицы силы электрического тока в диапазоне частот 20— $1 \cdot 10^6$  Гц».

3. **Рождественская Т. Б.** Электрические компараторы для точных измерений тока, напряжения и мощности. М.: Издательство стандартов, 1964.

Дата принятия 27.04.2015 г.

## ОБЩИЕ ВОПРОСЫ МЕТРОЛОГИИ И ИЗМЕРИТЕЛЬНОЙ ТЕХНИКИ

53.081.1

### Байесовские оценки систематических погрешностей средств измерений

Н. А. БУРМИСТРОВА, А. В. СТЕПАНОВ, А. Г. ЧУНОВКИНА

Всероссийский научно-исследовательский институт метрологии им. Д. И. Менделеева, С.-Петербург, Россия, e-mail: N.A.Burmistrova@vniim.ru

*Рассмотрена задача вычисления расширенной неопределенности измерений при калибровке. Выделены два ее источника, обусловленные неопределенностью опорного значения, получаемого с помощью эталона, и разбросом показаний калибруемого средства измерений. Применен байесовский подход для получения зависимости коэффициента охвата от числа повторных измерений и соотношения названных неопределенностей.*

**Ключевые слова:** систематическая погрешность, расширенная неопределенность, коэффициент охвата, байесовская оценка.

*The problem of expanded uncertainty estimation at calibration of measuring instrument is considered. The two main sources of measurement uncertainty are revealed: the first one is associated with the reference value and the second one with the dispersion of measuring instrument indications. The dependence of coverage factor on a number of repeated indications and a ratio of the above two sources of uncertainties is obtained.*

**Key words:** systematic error, expanded uncertainty, coverage factor, Bayesian estimate.

Концепция неопределенности измерений [1—4] используется в отечественной метрологии наряду с оцениванием погрешностей [5]. Вопрос о том, в каких метрологических задачах предпочтительнее использовать тот или иной подход, остается открытым. Однако в задачах калибровки средств измерений (СИ) вычисление неопределенности получило широкое распространение. При калибровке достаточно часто устанавливается систематическая погрешность СИ как

отклонение показаний от опорного значения измеряемой величины, воспроизводимого или получаемого с помощью соответствующего эталона.

При расчете неопределенности измерения учитывают: неопределенность калибровочных характеристик эталонных измерительных приборов или действительных значений эталонных мер, их нестабильность; нелинейность калибровочной характеристики эталонных измерительных приборов;

случайные погрешности эталонов, калибруемых СИ и методик калибровки; неопределенность поправок на отклонения от нормальных условий, специфичных для каждого вида измерений и методики передачи единицы величины.

В данной статье принята упрощенная модель систематической погрешности  $B$  калибруемого СИ:

$$B = X - X_{\text{ref}}, \quad (1)$$

где  $X$  — среднее показание калибруемого средства при числе повторных измерений, стремящемся к бесконечности;  $X_{\text{ref}}$  — опорное значение измеряемой величины.

Для конкретного вида измерений и методики калибровки модель (1) усложняется введением поправок на влияющие величины, и рассматриваемый далее подход можно обобщить для каждого конкретного случая.

При выполнении измерений с помощью эталона получают оценку измеряемой величины с соответствующей неопределенностью  $\{x_{\text{ref}}, u(x_{\text{ref}})\}$  или с указанием границ погрешности  $\{x_{\text{ref}}, \theta\}$ . В первом случае информацию об измеряемой величине можно представить плотностью нормального распределения  $p_{\text{ref}}(x)$  с математическим ожиданием  $x_{\text{ref}}$  и стандартным отклонением  $u(x_{\text{ref}})$ , а во втором — в виде равномерного закона распределения с центром  $x_{\text{ref}}$  и симметричными границами  $\pm \theta$  [6].

Обычно при калибровке выполняют многократные измерения  $x_1, \dots, x_n$ , чтобы оценить суммарную случайную погрешность, обусловленную применяемыми эталонами, калибруемыми СИ и методикой калибровки. При этом предполагается, что единичные показания СИ распределены по нормальному закону с неизвестными параметрами  $\{X_{\text{ref}} + B, \sigma\}$ , где  $\sigma$  — параметр прецизионности (повторяемости) результатов измерений при калибровке. Таким образом, в данной задаче имеются три неизвестных параметра  $X_{\text{ref}}, B, \sigma$ . Совместную плотность распределения значений этих параметров находят, используя теорему Байеса, на основе имеющейся априорной информации, а также полученной при измерениях. Данные параметры считаем независимыми; дополнительно предполагаем, что априорная информация о смещении показаний СИ и прецизионности измерений отсутствует и описывается неинформативной априорной плотностью распределения этих параметров  $p(b, \sigma) \propto \sigma^{-1}$  (символ  $\propto$  означает равенство с точностью до нормирующей константы).

Рассмотрим указанный выше первый случай. При этом апостериорная совместная плотность распределения задается выражением

$$p(x, b, \sigma | x_1, \dots, x_n, x_{\text{ref}}, u(x_{\text{ref}})) \propto \sigma^{-(n+1)} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \sum (x_i - b - x)^2 \right\} \times \exp \left\{ -\frac{(x - x_{\text{ref}})^2}{2u^2(x_{\text{ref}})} \right\}.$$

Интегрирование по мешающим параметрам позволяет найти апостериорную плотность распределения систематической погрешности:

$$p(b | x_1, \dots, x_n, x_{\text{ref}}, u(x_{\text{ref}})) = \int p(x, b, \sigma | x_1, \dots, x_n, x_{\text{ref}}, u(x_{\text{ref}})) d\sigma dx.$$

После несложных вычислений получаем

$$p(b) = \frac{1}{2^{(n-1)/2} \pi} \frac{((n-1)S^2)^{(n-1)/2}}{u(x_{\text{ref}})} \frac{\Gamma(n/2)}{\Gamma(n-1/2)} \frac{1}{\sigma^{n+1}} \times \int_{-\infty}^{\infty} \left( n(b + x - \bar{x})^2 + (n-1)S^2 \right)^{-n/2} \exp \left\{ -\frac{(x - x_{\text{ref}})^2}{2u^2(x_{\text{ref}})} \right\} dx; \quad (2)$$

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_1^n (x_i - \bar{x})^2, \quad \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_1^n x_i,$$

где  $\Gamma(n/2)$ ,  $\Gamma(n-1/2)$  — гамма-функции;  $\bar{x}$  — среднее значение для конечной выборки.

Таким образом, при байесовском подходе систематическая погрешность описывается случайной величиной  $B$  с плотностью распределения (2), математическое ожидание и стандартное отклонение которой являются оценкой систематической погрешности и стандартной неопределенности, соответственно. Оценку систематической погрешности можно получить, подставив оценки входных величин в (1):

$$\hat{b} = \bar{x} - x_{\text{ref}}.$$

Согласно [1] соответствующую стандартную неопределенность вычисляют по формуле

$$u^2(b) = u_A^2(\bar{x}) + u_B^2(x_{\text{ref}}) = S^2/n + u^2(x_{\text{ref}}). \quad (3)$$

Однако байесовский подход приводит к другой формуле для стандартной неопределенности [7]:

$$\tilde{u}^2(b) = (n-1)S^2/[(n-3)n] + u^2(x_{\text{ref}}). \quad (4)$$

Выражение (4) имеет смысл только при  $n > 3$ . Интересно отметить, что в [8] под многократными измерениями также понимают измерения при  $n > 3$ . С ростом  $n$  выражение (4), монотонно убывая, стремится к (3), при достаточно больших  $n$  формулы (3) и (4) практически совпадают.

Цель данной статьи — вычисление расширенной неопределенности измерений при вероятности  $P$  (уровне доверия), которая выражается произведением суммарной стандартной неопределенности на коэффициент охвата  $k$ :

$$U_p(b) = k\tilde{u}(b).$$

Для оговоренных выше случаев ( $B, \sigma$  независимы; отсутствует априорная информация о их возможных значениях) найдено выражение для  $k$  при  $P = 0,95$ . На практике в этом случае, как правило, принимают  $k = 2$ . В статье анализируются различия в оценках неопределенности, полученных при использовании  $k = 2$  и его точного значения.

Рассмотрим преобразованную случайную величину

$$\tilde{B} = [B - (\bar{X} - X_{\text{ref}})]\sqrt{n}/S.$$

Плотность распределения  $\tilde{B}$  определена преобразованием (2) для величины  $B$ :

$$p(\tilde{b}) = \frac{1}{\pi\sqrt{2(n-1)}} \frac{\Gamma(n/2)}{\Gamma((n-1)/2)} \times \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{1}{n-1} \left( z \frac{\sqrt{nu(x_{\text{ref}})} }{S} + \tilde{b} \right)^2 + 1 \right)^{-n/2} \exp\left\{-\frac{z^2}{2}\right\} dz. \quad (5)$$

Выражение (5) является сверткой нормального распределения и масштабированного распределения Стюдента с  $(n-1)$ -й степенями свободы, которая зависит от параметра  $\gamma = \sqrt{nu(x_{\text{ref}})}/S$ . При  $\gamma \rightarrow 0$  распределение (5) сходится к распределению Стюдента, а при  $\gamma \rightarrow \infty$  оно стремится к нормальному распределению. Параметр  $\gamma$  является отношением стандартной неопределенности, обусловленной применяемым эталоном, к выборочному стандартному отклонению усредненного результата, которое характеризует случайную погрешность измерений при передаче единицы величины. Очевидно, на практике значения параметра всегда ограничены.

В данной работе для разных значений  $\gamma$ ,  $n$  и симметричных интервалов вероятности при  $P = 0,95$  были вычислены процентные точки  $\alpha_{0,95}$  распределения (5). Соответственно расширенная неопределенность исходной величины  $B$  рассчитывается по формуле

$$\Delta_{0,95} = \alpha_{0,95} S / \sqrt{n}.$$

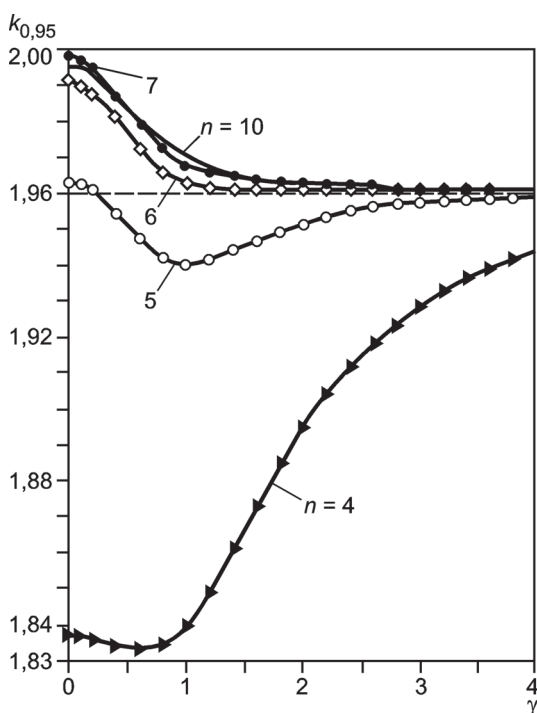


Рис. 1. Зависимости  $k_{0,95}(\gamma, n)$  для случая, когда имеется опорное значение и соответствующая неопределенность

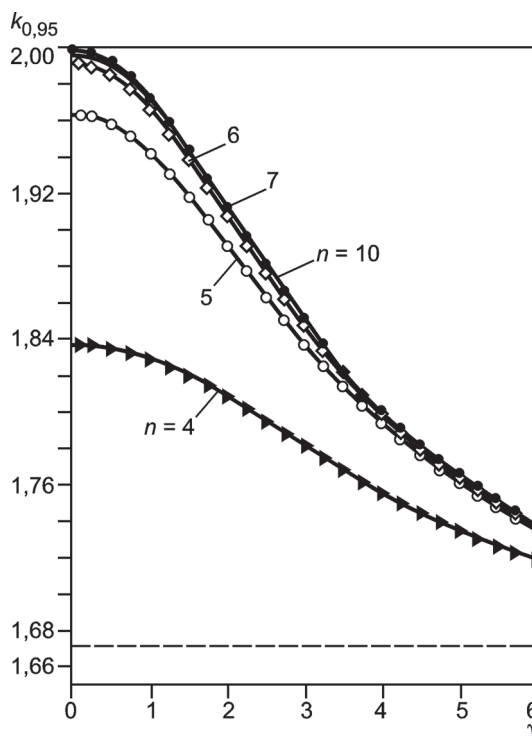


Рис. 2. Зависимости  $k_{0,95}(\gamma, n)$  для случая, когда имеется опорное значение и предел допускаемой погрешности

Конечной целью являлось получение зависимостей  $k(\gamma, n)$ , которые позволяют переходить от стандартной к расширенной неопределенности измерения. При  $n > 3$  для стандартной неопределенности справедлива формула (4), и соответственно коэффициент  $k$  вычисляется как

$$k_{0,95} = \alpha_{0,95} [\gamma^2 + (n-1)/(n-3)]^{-1/2}.$$

На рис. 1 представлены значения  $k_{0,95}$  в зависимости от параметра  $\gamma$  для разных  $n$ .

Значение  $k = 2$  является оценкой сверху при  $P = 0,95$ , если стандартная неопределенность измерений вычисляется в соответствии с (4), причем для  $n > 5$  отличие  $k$  от 2 не превышает 2 %. Аналогичные вычисления  $k$  были проведены для случая, когда известны оценка опорного значения и предел его допускаемой погрешности  $\{x_{\text{ref}}, \theta\}$ . При этом информация о значении измеряемой величины формализуется в виде равномерного закона распределения с центром  $x_{\text{ref}}$  и симметричными границами  $\pm \theta$ . Также были получены значения  $k$  для вычисления расширенной неопределенности:

$$U_p(b) = k\tilde{u}(b), \quad \tilde{u}^2(b) = (n-1)S^2/[(n-3)n] + \theta^2/3. \quad (6)$$

Зависимости  $k_{0,95}$  от  $n$  и  $\gamma = \sqrt{n}\theta/S$  для  $P = 0,95$  приведены на рис. 2. В отличие от предыдущего случая значения  $k$  существенно отличаются для разных  $\gamma$ . Однако стоит отметить, что для  $P = 0,95$  и  $n > 4$  зависимости  $k(\gamma)$  практически совпадают для разных  $n$ .

Представляет интерес сопоставление найденных оценок расширенной неопределенности с доверительными границами погрешности, приведенными в [8]:

$$\Delta_p = \sqrt{\frac{S^2}{n} + \frac{\theta^2}{3}} \times \left[ t_p(n-1) \frac{S}{\sqrt{n}} + \theta \right] \times \left[ \frac{S}{\sqrt{n}} + \frac{\theta}{\sqrt{3}} \right]^{-1}. \quad (7)$$

Обозначим  $r$  — отношение расширенной неопределенности измерений по (6) к доверительным границам погрешности по (7). На рис. 3 представлены зависимости  $r$  от  $n$  и  $\gamma = \sqrt{n}\theta/S$  для  $p = 0,95$ . Как следует из рис. 4, различие двух оценок точности может достигать 10 %. При  $0 < \gamma < 2$  формула (7) дает заниженную оценку

точности по сравнению с байесовской оценкой (6), а при  $\gamma > 2$  ситуация противоположная.

В заключение рассмотрим пример оценивания неопределенности измерений при калибровке жидкостного термометра. Были получены следующие результаты измерений температуры калибруемым термометром: {40,01; 40,018; 40,020; 40,017; 40,014; 40,011; 40,016; 40,011; 40,017},  $\bar{x} = 40,016$ . С помощью эталона найдено значение измеряемой величины  $x_{\text{ref}} = 39,999$  с пределом допускаемой погрешности  $\theta = 0,01$ . Систематическую погрешность термометра вычисляли по формуле  $b = \bar{x} - x_{\text{ref}}$ , она составила  $b = 0,017$ . Формальное применение [1] дает

$$u_A^2(\bar{X}) = S^2/n = 0,00307^2/10 = 9,4 \cdot 10^{-6};$$

$$u_B^2(\bar{X}) = \theta^2/n = 0,01^2/3 = 3,33 \cdot 10^{-5};$$

$$u_\Sigma^2(b) = u_A^2(\bar{X}) + u_B^2(\bar{X}) = 3,4 \cdot 10^{-5};$$

$$U_{0,95}^{[1]} = 2\sqrt{u_A^2(\bar{X}) + u_B^2(\bar{X})} = 0,012.$$

При использовании подхода с  $k = 2$  для  $b$  определен интервал охвата (0,005; 0,29). Выбор  $k = 2$  соответствует предположению о нормальном законе распределения для описания систематической погрешности СИ. На рис. 4 представлена плотность нормального закона 1. При использовании байесовского оценивания систематической погрешности интервал охвата составляет (0,006; 0,027). Кривая 2 на рис. 4 соответствует плотности распределения вероятностей для систематической погрешности. Точки на кривых 1, 2 указывают на соответствующие интервалы охвата; подход в соответствии с [1] приводит к более широкому интервалу охвата. Его можно получить, используя зависимость на рис. 3 при  $\gamma = 10,29$ ,  $n = 10$ . При этих значениях  $k = 1,7$  и соответствующий интервал охвата равен (0,006; 0,027), что демонстрирует совпадение с интервалом, полученным с применением байесовского подхода. Наконец, применение (7) дает интервал для систематической погрешности термометра (0,006; 0,028). В то же время при формальном применении [1] оценка неопределенности измерений оказывается завышенной.

Таким образом, в данной статье рассмотрена задача оценивания неопределенности измерений при калибровке, когда уравнение измерений имеет вид (1). Рассмотрены многократные измерения и два способа представления информации об опорном значении измеряемой величины. Рассчитаны значения коэффициентов охвата  $k$  и расширенные неопределенности измерений в случае байесовского подхода. Приведенные результаты сопоставлены с результатами использования подхода в [1] и расчетами по [8]. Сформулированы условия применимости  $k = 2$  для стандартной суммарной неопределенности, вычисленной в соответствии с байесовским подходом.

В заключение следует отметить, что полученные результаты вычисления расширенной неопределенности определения систематической погрешности СИ при калибровке можно применить при расчете неопределенности измерений в ситуации, когда имеется следующая измерительная

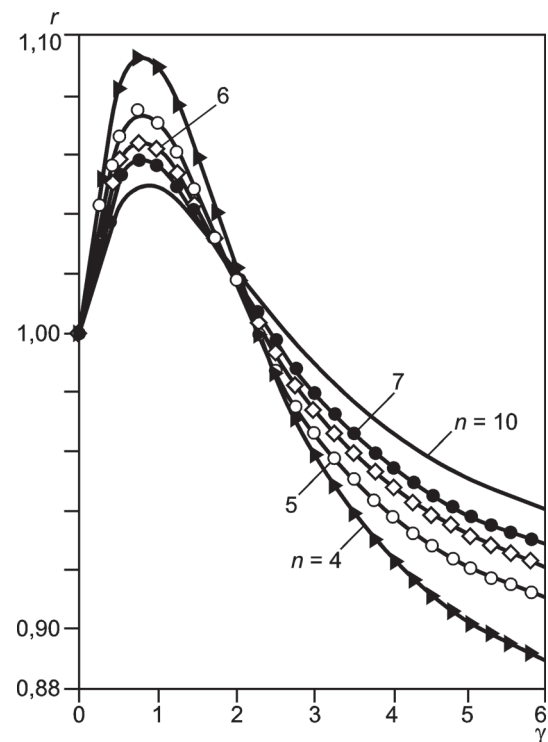


Рис. 3. Зависимости отношения  $r$  расширенной неопределенности измерений, вычисленной по (6), к доверительным границам погрешности, вычисленным по (7), от  $n$  и  $\gamma = \sqrt{n}\theta/S$  для  $P = 0,95$

информация: результаты более трех повторных показаний СИ; априорная информация о точности используемого СИ, которую можно представить инструментальной неопределенностью  $u_B$  или пределом погрешности измерений  $\theta$ . В этом случае требуется найти плотность распределения измеряемой величины, которую можно получить аналогично с проведенными вычислениями [9].

Следует подчеркнуть, что в рассмотренной ситуации с двумя источниками неопределенности формула (7) для доверительных границ суммарной погрешности [8] совпадает в пределах 10 % с байесовской оценкой расширенной неопределенности измерения (6).

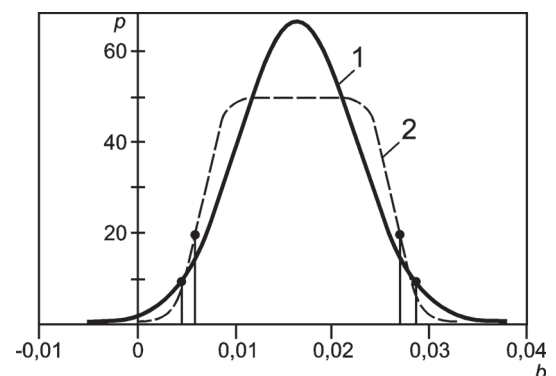


Рис. 4. Плотность распределения вероятностей для нормально распределенной систематической погрешности  $b$  (1) и плотность ее распределения при байесовском подходе (2)

Литература

1. **ГОСТ Р 54500.3—2011.** Руководство ИСО/МЭК 98-3: 2008. Неопределенность измерения. Ч. 3. Руководство по выражению неопределенности измерений.
2. **ГОСТ Р 54500.1—2011.** Руководство ИСО/МЭК 98-1: 2009. Неопределенность измерения. Ч. 1. Введение в руководство по выражению неопределенности измерения.
3. **ГОСТ Р 54500.3.1—2011.** Руководство ИСО/МЭК 98-3: 2008 / Дополнение 1:2008. Неопределенность измерения. Ч. 3. Руководство по выражению неопределенности измерений. Дополнение 1. Трансформирование распределений с использованием метода Монте-Карло.
4. **ГОСТ Р 54500.3.2—2013.** Руководство ИСО/МЭК 98-3: 2008 / Дополнение 2:2011. Неопределенность измерения. Ч. 3. Руководство по выражению неопределенности измерений. Дополнение 2. Обобщение на случай произвольного числа выходных величин.

5. **PMГ 29—2013.** ГСИ. Метрология. Основные термины и определения.

6. **Вёреп В.** Информация об измеряемой величине как основа формирования функции плотности вероятности // Измерительная техника. 2003. № 9. С. 3—8.

7. **Lira I., Wöger W.** Comparison between the conventional and Bayesian approaches to evaluate measurement data // Metrologia. 2006. V. 43. P. 249—259.

8. **ГОСТ Р 8.736—2011.** ГСИ. Измерения прямые многократные. Методы обработки результатов измерений. Основные положения.

9. **Stepanov A., Burmistrova N., Chunovkina A.** Calculation of coverage intervals: Some study cases // Advanced Mathematical and Computational Tools in Metrology and Testing: Proc. conf., 2014. St. Petersburg, 2015. P. 132—139.

Дата принятия 17.02.2015 г.

681.3.08

## Минимизация погрешности аналогового тракта системы сбора геофизических данных

М. Н. КУЛИГИН

Муромский институт Владимирского государственного университета  
им. Столетовых,  
Муром, Россия, e-mail: kaf-eivt@yandex.ru

*Показана возможность исключения из обработки результатов измерений погрешностей, связанных с нестабильностью смещения нуля (температурным дрейфом) и разбросом коэффициента передачи в аналоговых трактах систем сбора данных, реализованных на базе микроконтроллера.*

**Ключевые слова:** микроконтроллер, цифровой эквивалент, нестабильность смещения нуля, аналоговый тракт.

*The possibility of exception from processing of results of measurements of errors coupled with instability of the zero shift (the temperature drift) and with the spread of transfer factor in analog tract of microcontroller based data collection systems is shown.*

**Key words:** microcontroller, digital equivalent, zero shift instability, analog tract.

Разработка эффективных и надежных систем сбора и обработки геофизической информации очень важна. Современная цифровая система регистрации и обработки геомагнитных сигналов представляет сложный программно-аппаратный комплекс устройств [1]. При выборе рабочего диапазона частот 0,002—3 Гц аппаратуры для исследовательских целей необходимо учитывать неравномерность амплитудного спектра измеряемого входного сигнала, достигающую 40—50 дБ, и его ширину, т. е. частотный диапазон для отдельных видов геомагнитных пульсаций Земли [2].

Проанализировав параметры исследуемых геомагнитных полей и условия проведения геофизических экспериментов, можно сформулировать общие требования, предъявляемые к аппаратной части системы сбора и обработки геомагнитных сигналов [3—5]:

при синхронной регистрации компонентов поля все измерительные каналы должны быть идентичны по параметрам, а их передаточные характеристики стабильны в течение длительного периода работы;

необходимо принять меры для защиты от возможных помех при измерениях, так как сигнал помехи, как правило, многократно превышает полезный, и обеспечить стабильность амплитудно-частотных характеристик измерительных трактов регистрации геомагнитного поля, а также минимальное время переходных процессов при воздействии внешних импульсных возмущений, перегружающих измерительные тракты;

согласовать динамический диапазон геомагнитных пульсаций во всем диапазоне частот с параметрами измерительных трактов и регистрирующей микропроцессорной системы.