519.24

О применении и мощности непараметрических критериев согласия Купера, Ватсона и Жанга

Б. Ю. ЛЕМЕШКО, А. А. ГОРБУНОВА

*Новосибирский государственный технический университет,
Новосибирск, Россия, e-mail: lemeshko@fpm.ami.nstu.ru*

Приведены оценки мощности критериев согласия Купера, Ватсона и трех критериев Жанга с различными статистиками относительно некоторых пар конкурирующих законов при проверке простых и сложных гипотез. Рассматриваемые критерии сравниваются по мощности с критериями Колмогорова, Крамера—Мизеса—Смирнова и Андерсона—Дарлинга.

Ключевые слова: *непараметрические критерии согласия, критерии Купера, Ватсона, Жанга, мощность, простые и сложные гипотезы.*

The estimates of the power of nonparametric goodness-of-fit Kuiper and Watson tests as well as three Zhang tests with different statistics are given relative to some pairs of competing distributions when testing simple and composite hypotheses. The considered tests are compared by power with the Kolmogorov, Cramer—Mises—Smirnov and Anderson—Darling tests.

Key words: *nonparametric goodness-of-fit tests, Kuiper, Watson, Zhang test, power, simple and composite hypotheses.*

Цель данной работы — привлечь внимание к некоторым непараметрическим критериям согласия, которые редко или совсем не используются в работах отечественных специалистов при статистическом анализе результатов экспериментальных данных. Одни, как например, критерии Купера [1] и Ватсона [2, 3], по-видимому, из-за того, что являются развитием и аналогами критериев Колмогорова и Крамера—Мизеса—Смирнова и при этом как будто не имеют явных преимуществ перед последними, другие (предложенные в [4—7]) — в силу ограниченной доступности источников и отсутствия независимых рекомендаций по применению.

Применяя критерии согласия, следует различать проверку простых и сложных гипотез. Простая проверяемая гипотеза имеет вид H_0: $F(x) = F(x, \theta)$, где $F(x, \theta)$ — известная теоретическая функция распределения вероятностей с известным скалярным или векторным параметром θ. При проверке простых гипотез непараметрические критерии согласия являются свободными от распределения, т. е. распределения статистик критериев $G(S|H_0)$ при справедливости проверяемой гипотезы не зависят от вида закона $F(x, \theta)$, с которым проверяется согласие.

При проверке сложных гипотез вида H_0: $F(x) \in \{F(x, \theta), \theta \in \Theta\}$, где оценка $\hat{\theta}$ скалярного или векторного параметра распределения $F(x, \theta)$ вычисляется по той же самой выборке, непараметрические критерии согласия теряют свойство свободы от распределения. При этом условные распределения статистик $G(S|H_0)$ зависят от ряда факторов: вида наблюдаемого закона $F(x, \theta)$, соответствующего справедливой проверяемой гипотезе H_0; типа оцениваемого параметра и числа этих параметров; в некоторых случаях от конкретного значения параметра (например, в случае семейств гамма- и бета-распределений); метода оценивания параметров. Различия в распределениях той же самой статистики при проверке простых и сложных гипотез настолько существенны, что пренебрегать этим, ни в коем случае нельзя.

Подчеркнем, что имеющиеся классические результаты по рассматриваемым в данной работе критериям (распределения статистик критериев или таблицы процентных точек) связаны только с проверкой простых гипотез.

Критерий Купера. В [1] Купер предложил расширенную статистику критерия типа Колмогорова для проверки гипотезы, что случайная выборка принадлежит закону с непрерывной функцией распределения $F(x, \theta)$. Статистика V_n критерия определяется как

$$V_n = \sup_{-\infty < x < \infty} \{F_n(x) - F(x, \theta)\} - \inf_{-\infty < x < \infty} \{F_n(x) - F(x, \theta)\},$$

где $F_n(x)$ — эмпирическая функция распределения, и используется в виде

$$V_n = D_n^+ + D_n^-, \qquad (1)$$

$$D_n^+ = \max\{i/n - F(x_i, \theta)\}; \; D_n^- = \max\{F(x_i, \theta) - (i-1)/n\},$$

$i = \overline{1, n}$, n — объем выборки; x_i — здесь и далее элементы вариационного ряда, построенного по выборке (упорядоченной по возрастанию).

Существенным недостатком критерия со статистикой (1) является зависимость ее распределения от объема выборки n. Такую зависимость распределений $G(V_n|H_0)$ статистики при справедливости простой проверяемой гипотезы H_0 иллюстрирует рис. 1, на котором приведены результаты моделирования.

Таблицы процентных точек для случая проверки простых гипотез по критерию со статистикой (1) можно найти в [8, 9]. В качестве предельного распределения $G\left(\sqrt{n}V_n \middle| H_0\right)$ статистики $\sqrt{n}V_n$ Купером [1] дана следующая функция распределения [9]:

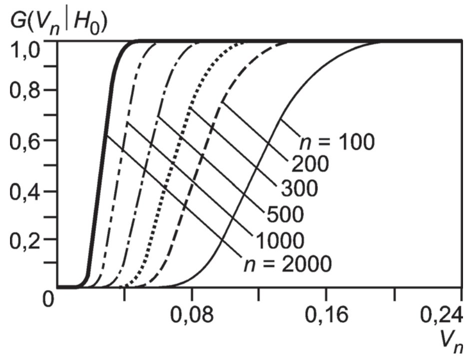

Рис. 1. Распределения статистики (1) критерия Купера $G\left(V_n|H_0\right)$ в зависимости от объема выборки n при проверке простой гипотезы

$$G\left(s|H_0\right)=1-\sum_{m=1}^{\infty}2\left(4m^2s^2-1\right)e^{-2m^2s^2}.$$

В [10] для модификации статистики

$$V=V_n\left(\sqrt{n}+0{,}155+0{,}24/\sqrt{n}\right), \qquad (2)$$

распределение которой уже не так сильно зависит от n, приведены процентные точки в табличной форме (здесь и далее α — вероятность ошибки 1-го рода).

α	0,15	0,10	0,05	0,01
V_n^{mod}	1,537	1,620	1,747	2,001

Зависимостью распределения статистики (2) от объема выборки можно пренебречь при $n \geq 20$, так как отклонение ее реального распределения от предельного незначительно и практически не влияет на результаты статистического вывода.

Предлагаем применять в критерии Купера статистику в следующей модификации:

$$V_n^{\text{mod}}=\sqrt{n}\left(D_n^{+}+D_n^{-}\right)+1/\left(3\sqrt{n}\right), \qquad (3)$$

где правомерность использования такой поправки естественно вытекает из выражения для статистики критерия согласия Смирнова [11, стр. 81]. Зависимостью распределения статистики (3) от объема выборки можно пренебречь при $n \geq 30$. Процентные точки распределения этой статистики также приведены в табличной форме и практически совпадают с процентными точками статистики (2).

α	0,15	0,10	0,05	0,01
V_n^{mod}	1,537	1,619	1,747	2,000

Статистики (2) и (3) имеют одно и то же предельное распределение. При малых n различие между их распределениями достаточно существенное. Однако при $n \geq 20$ в области принятия решения (при значениях функций $G(V|H_0) > 0{,}9$ и $G\left(V_n^{\text{mod}}|H_0\right) > 0{,}9$) эти распределения практически совпадают.

В качестве модели предельного распределения статистики (3) можно использовать бета-распределение 3-го рода с плотностью

$$f(x)=\frac{\theta_2^{\theta_0}}{\theta_3 \mathrm{B}(\theta_0,\theta_1)}\left(\frac{x-\theta_4}{\theta_3}\right)^{\theta_0-1}\times$$

$$\times\left(1-\frac{x-\theta_4}{\theta_3}\right)^{\theta_1-1}\left[1+(\theta_2-1)\frac{x-\theta_4}{\theta_3}\right]^{-\theta_0-\theta_1}$$

и вектором параметров $\boldsymbol{\theta}=(7{,}8624;\, 7{,}6629;\, 2{,}6927;\, 2{,}6373;\, 0{,}495)^{\text{т}}$. Данному распределению соответствуют следующие процентные точки (в табличной форме).

α	0,15	0,10	0,05	0,01
V_n^{mod}	1,537	1,620	1,747	1,993

Модель описывает распределение статистики на всей области определения, ее, как и предельное распределение, можно применять при вычислении достигаемого уровня значимости $P\{S > S^*|H_0\}$: вероятности того, что при справедливости проверяемой гипотезы H_0 статистика S критерия превысит значение статистики S^*, вычисленное по выборке.

Критерий Ватсона. Статистика критерия Ватсона [2, 3] имеет вид

$$U_n^2=n\int_{-\infty}^{\infty}\left\{F_n(x)-F(x,\theta)-\int_{-\infty}^{\infty}\left(F_n(y)-F(y,\theta)\right)dF(y,\theta)\right\}^2 dF(x,\theta)$$

и используется в удобной для расчетов форме

$$U_n^2=\sum_{i=1}^{n}\left(F(x_i,\theta)-\frac{i-0{,}5}{n}\right)^2-n\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}F(x_i,\theta)-0{,}5\right)^2+\frac{1}{12n}. \qquad (4)$$

Процентные точки статистики U_n^2 при проверке простой гипотезы можно найти в [2, 12]. Предельное распределение $G\left(U_n^2|H_0\right)$ статистики U_n^2 приведено в [2, 3] в виде

$$G\left(s|H_0\right)=1-2\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m-1}e^{-2m^2\pi^2 s}.$$

Модификации критериев Купера и Ватсона были рассмотрены в [13], критерия Ватсона — в [14]. В [13] процентные точки приведены для распределений модифицированных статистик. В частности, верхние процентные точки для модифицированной статистики Ватсона в форме

$$U_n^{2*}=\left(U_n^2-0{,}1/n+0{,}1/n^2\right)(1+0{,}8/n)$$

принимают значения [13] (в табличной форме).

α	0,15	0,10	0,05	0,01
U_n^{2*}	0,131	0,152	0,187	0,267

Практически те же значения верхних процентных точек имеются для распределения статистики (4).

α	0,15	0,10	0,05	0,01
U_n^2	0,131	0,151	0,187	0,268

Следует подчеркнуть, что зависимость распределения статистики (4) от объема выборки выражена слабо. При $n \geq 20$ отличием распределения статистики (4) от предельного распределения можно пренебречь.

Предельное распределение статистики (4) по всей области определения приближается моделью обратного гауссового закона с плотностью

$$f(x) = \frac{1}{\theta_2}\left(\theta_0 \Big/ \left[2\pi\left(\frac{x-\theta_3}{\theta_2}\right)^3\right]\right)^{1/2} \times$$

$$\times \exp\left(-\theta_0\left(\left(\frac{x-\theta_3}{\theta_2}\right)-\theta_1\right)^2 \Big/ \left[2\theta_1^2\left(\frac{x-\theta_3}{\theta_2}\right)\right]\right)$$

и вектором параметров $\boldsymbol{\theta}$ = (0,2044; 0,08344; 1,0; 0,0)^т. Это распределение (наряду с предельным) можно использовать для вычисления достигаемого уровня значимости.

Отметим, что асимптотическая эффективность критерия Ватсона исследована в [15].

Критерии Жанга. В [4] и в последовавших затем работах [5—7] были предложены непараметрические критерии согласия, статистики которых имеют вид

$$Z_K = \max_{1 \le i \le n}\left((i-0{,}5)\log\left\{\frac{i-0{,}5}{nF(x_i,\theta)}\right\} +\right.$$

$$\left. + (n-i+0{,}5)\log\left[\frac{n-i+0{,}5}{n\{1-F(x_i,\theta)\}}\right]\right); \qquad (5)$$

$$Z_A = -\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\log\{F(x_i,\theta)\}}{n-i+0{,}5} + \frac{\log\{1-F(x_i,\theta)\}}{i-0{,}5}\right]; \qquad (6)$$

$$Z_C = \sum_{i=1}^{n}\left[\log\left\{\frac{[F(x_i,\theta)]^{-1}-1}{(n-0{,}5)/(i-0{,}75)-1}\right\}\right]^2. \qquad (7)$$

В справедливости утверждений автора [4] о более высокой мощности предложенных критериев по сравнению с критериями Колмогорова, Крамера—Мизеса—Смирнова и Андерсона—Дарлинга убедились несколько ранее [16]. Однако от рекомендации широкого применения критериев остановила сильная зависимость распределений статистик (5)— (7) от объема выборки n. Например, такую зависимость для статистики Z_A иллюстрирует рис. 2, где представлены смоделированные распределения статистики. Данная зависимость осложняет использование критериев. Естественно, зависимость от n сохраняется и при проверке сложных гипотез.

Сравнительный анализ мощности критериев. Исследование мощности критериев практически нереально без использования компьютерных технологий и статистического моделирования распределений статистик критериев. В рассматриваемом случае для исследования распределений статистик при справедливости проверяемой $G(S|H_0)$ и конкурирующей $G(S|H_1)$ гипотез был использован тот же развиваемый подход [17]. При этом результаты статистического моделирования обеспечивали точность построения распределений статистик $G(S|H_i)$, $i = \overline{0,1}$ порядка $\pm 10^{-3}$ с доверительной вероятностью 0,9. Эта величина определяет максимальную длину доверительного интервала, накрывающего истинное значение функции распределения в точке. Такого значения он достигает в районе медианы.

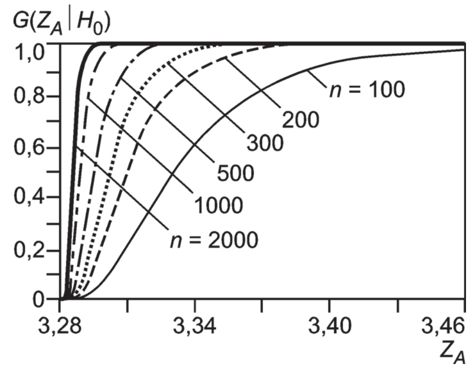

Рис. 2. Распределения $G_n(Z_A|H_0)$ статистики (5) в зависимости от объема n выборки при проверке простой гипотезы

Для сопоставления мощности рассматриваемых критериев и критериев Колмогорова (K), Крамера—Мизеса—Смирнова (KMC) и Андерсона—Дарлинга (AD) продемонстрируем результаты исследований на двух парах тех же конкурирующих законов, что и в [18—20]. Первую пару составляют нормальный и логистический законы: проверяемой гипотезе H_0 соответствует нормальный закон с плотностью

$$f(x) = \frac{1}{\theta_0\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{(x-\theta_1)^2}{2\theta_0^2}\right\},$$

а конкурирующей гипотезе H_1 — логистический с функцией плотности

$$f(x) = \frac{\pi}{\theta_0\sqrt{3}}\exp\left\{-\frac{\pi(x-\theta_1)}{\theta_0\sqrt{3}}\right\} \Big/ \left[1+\exp\left\{-\frac{\pi(x-\theta_1)}{\theta_0\sqrt{3}}\right\}\right]^2$$

и параметрами $\theta_0 = 1$, $\theta_1 = 0$. В случае простой гипотезы H_0 параметры нормального закона имеют те же значения. Эти два закона близки и трудно различимы с помощью критериев согласия.

Вторая пара: H_0 — распределение Вейбулла с плотностью

$$f(x) = \frac{\theta_0(x-\theta_2)^{\theta_0-1}}{\theta_1^{\theta_0}}\exp\left\{-\left(\frac{x-\theta_2}{\theta_1}\right)^{\theta_0}\right\}$$

и параметрами $\theta_0 = 2$, $\theta_1 = 2$, $\theta_2 = 0$; H_1 — гамма-распределение с плотностью

$$f(x) = \frac{1}{\theta_1\Gamma(\theta_0)}\left(\frac{x-\theta_2}{\theta_1}\right)^{\theta_0-1} e^{-(x-\theta_2)/\theta_1}$$

и параметрами θ_0 = 3,12154, θ_1 = 0,557706, θ_2 = 0, при которых гамма-распределение наиболее близко к данному закону Вейбулла.

Мощность критериев исследовалась при проверке простых и сложных гипотез H_0 против простой конкурирующей гипотезы H_1.

Для различных значений вероятности ошибки 1-го рода α и различных объемов выборок в табл. 1 приведены полученные оценки мощности критериев при проверке простой гипотезы H_0 (нормальное распределение) против гипотезы H_1 (логистическое); в табл. 2 — при проверке простой гипотезы H_0 (распределение Вейбулла с параметрами 2; 2; 0) против гипотезы H_1 (гамма-распределение с параметрами 3,12154; 0,557706; 0).

Таблица 1

Мощность критериев согласия при проверке простой гипотезы H_0 (нормальное распределение) против гипотезы H_1 (логистическое)

α	n = 10	n = 20	n = 50	n = 100	n = 300	n = 500	n = 2000
Критерий Жанга (Z_C)							
0,150	0,214	0,258	0,330	0,410	0,638	0,792	0,997
0,100	0,155	0,195	0,265	0,344	0,574	0,740	0,997
0,050	0,095	0,125	0,187	0,260	0,481	0,654	0,995
0,025	0,063	0,086	0,138	0,201	0,406	0,577	0,991
0,010	0,040	0,057	0,096	0,148	0,327	0,487	0,982
Критерий Жанга (Z_A)							
0,150	0,205	0,243	0,297	0,360	0,582	0,757	0,999
0,100	0,143	0,175	0,221	0,274	0,485	0,675	0,999
0,050	0,075	0,097	0,129	0,167	0,341	0,532	0,996
0,025	0,039	0,052	0,074	0,099	0,230	0,401	0,989
0,010	0,016	0,022	0,034	0,048	0,129	0,259	0,970
Критерий Жанга (Z_K)							
0,150	0,169	0,194	0,246	0,314	0,529	0,693	0,996
0,100	0,115	0,134	0,178	0,235	0,434	0,601	0,991
0,050	0,060	0,072	0,102	0,144	0,303	0,458	0,974
0,025	0,032	0,039	0,059	0,088	0,209	0,340	0,941
0,010	0,015	0,018	0,029	0,047	0,127	0,224	0,872
Критерий Ватсона							
0,150	0,163	0,175	0,214	0,278	0,506	0,680	0,995
0,100	0,111	0,120	0,153	0,208	0,421	0,602	0,992
0,050	0,057	0,064	0,086	0,126	0,301	0,477	0,981
0,025	0,029	0,033	0,048	0,075	0,211	0,368	0,964
0,010	0,012	0,014	0,022	0,037	0,128	0,250	0,929
Критерий Купера							
0,150	0,163	0,174	0,209	0,268	0,482	0,652	0,993
0,100	0,110	0,119	0,149	0,199	0,396	0,570	0,987
0,050	0,057	0,062	0,082	0,118	0,279	0,443	0,972
0,025	0,029	0,032	0,045	0,070	0,192	0,335	0,948
0,010	0,012	0,014	0,020	0,035	0,113	0,223	0,904

Таблица 2

Мощность критериев согласия при проверке простой гипотезы H_0 (распределение Вейбулла с параметрами 2; 2; 0) против гипотезы H_1 (гамма-распределение с параметрами 3,12154; 0,557706; 0)

α	n = 10	n = 20	n = 50	n = 100	n = 300	n = 500	n = 2000
Критерий Жанга (Z_C)							
0,150	0,194	0,224	0,305	0,427	0,786	0,938	1,000
0,100	0,140	0,168	0,239	0,350	0,718	0,906	1,000
0,050	0,084	0,106	0,163	0,254	0,603	0,837	1,000
0,025	0,053	0,070	0,116	0,188	0,499	0,756	1,000
0,010	0,031	0,044	0,077	0,131	0,384	0,641	1,000
Критерий Жанга (Z_A)							
0,150	0,183	0,204	0,272	0,394	0,774	0,935	1,000
0,100	0,127	0,142	0,196	0,300	0,693	0,898	1,000
0,050	0,068	0,076	0,107	0,180	0,549	0,815	1,000
0,025	0,036	0,040	0,057	0,103	0,413	0,711	1,000
0,010	0,015	0,017	0,024	0,047	0,264	0,558	1,000
Критерий Жанга (Z_K)							
0,150	0,183	0,205	0,266	0,364	0,684	0,868	1,000
0,100	0,129	0,146	0,198	0,282	0,593	0,805	1,000
0,050	0,070	0,082	0,118	0,182	0,451	0,684	1,000
0,025	0,039	0,047	0,071	0,116	0,335	0,561	0,999
0,010	0,018	0,022	0,037	0,065	0,222	0,415	0,996
Критерий Ватсона							
0,150	0,171	0,190	0,251	0,350	0,661	0,842	1,000
0,100	0,117	0,132	0,185	0,273	0,581	0,787	1,000
0,050	0,061	0,072	0,108	0,175	0,455	0,685	0,999
0,025	0,032	0,038	0,063	0,111	0,346	0,581	0,998
0,010	0,013	0,017	0,030	0,059	0,235	0,448	0,995
Критерий Купера							
0,150	0,170	0,187	0,243	0,335	0,633	0,819	1,000
0,100	0,116	0,130	0,178	0,258	0,550	0,759	1,000
0,050	0,060	0,069	0,103	0,163	0,423	0,649	0,999
0,025	0,031	0,037	0,058	0,102	0,317	0,541	0,997
0,010	0,013	0,016	0,028	0,054	0,208	0,407	0,992

Аналогично при проверке сложных гипотез соответствующие оценки мощности относительно тех же пар конкурирующих законов представлены в табл. 3 и 4. При проверке сложных гипотез в качестве метода оценивания параметров закона использовали метод максимального правдоподобия.

Таблица 3

Мощность критериев согласия при проверке сложной гипотезы H_0 (нормальное распределение) против гипотезы H_1 (логистическое)

α	n = 10	n = 20	n = 50	n = 100	n = 300	n = 500	n = 2000
Критерий Жанга (Z_A)							
0,150	0,210	0,259	0,340	0,434	0,706	0,865	1,000
0,100	0,153	0,198	0,272	0,358	0,633	0,815	1,000
0,050	0,090	0,126	0,185	0,256	0,512	0,718	0,999
0,025	0,052	0,080	0,126	0,180	0,403	0,615	0,998
0,010	0,025	0,045	0,075	0,112	0,282	0,478	0,995
Критерий Жанга (Z_C)							
0,150	0,195	0,236	0,321	0,427	0,711	0,866	0,998
0,100	0,142	0,186	0,270	0,374	0,662	0,831	0,998
0,050	0,086	0,126	0,205	0,302	0,584	0,770	0,998
0,025	0,052	0,086	0,156	0,243	0,510	0,705	0,997
0,010	0,026	0,051	0,105	0,176	0,411	0,609	0,996
Критерий Жанга (Z_K)							
0,150	0,176	0,221	0,316	0,424	0,692	0,839	0,999
0,100	0,123	0,162	0,249	0,349	0,614	0,779	0,998
0,050	0,068	0,097	0,167	0,248	0,492	0,668	0,995
0,025	0,038	0,058	0,111	0,176	0,386	0,557	0,988
0,010	0,018	0,029	0,066	0,112	0,271	0,424	0,966
Критерий Ватсона							
0,150	0,177	0,201	0,268	0,367	0,673	0,848	1,000
0,100	0,124	0,145	0,204	0,294	0,599	0,798	1,000
0,050	0,068	0,084	0,128	0,200	0,481	0,704	0,999
0,025	0,038	0,049	0,081	0,135	0,380	0,608	0,999
0,010	0,018	0,025	0,044	0,080	0,270	0,486	0,996
Критерий Купера							
0,150	0,171	0,194	0,256	0,346	0,633	0,812	1,000
0,100	0,119	0,139	0,192	0,273	0,554	0,752	0,999
0,050	0,064	0,079	0,118	0,181	0,433	0,646	0,998
0,025	0,035	0,045	0,073	0,119	0,333	0,544	0,996
0,010	0,016	0,022	0,039	0,069	0,228	0,416	0,989

Таблица 4

Мощность критериев согласия при проверке сложной гипотезы H_0 (распределение Вейбулла с параметрами 2; 2; 0) против гипотезы H_1 (гамма-распределение с параметрами 3,12154; 0,557706; 0)

α	n = 10	n = 20	n = 50	n = 100	n = 300	n = 500	n = 2000
Критерий Жанга (Z_A)							
0,150	0,165	0,219	0,358	0,533	0,880	0,974	1,000
0,100	0,112	0,161	0,287	0,456	0,837	0,960	1,000
0,050	0,059	0,095	0,196	0,345	0,754	0,925	1,000
0,025	0,030	0,056	0,132	0,256	0,664	0,879	1,000
0,010	0,013	0,028	0,077	0,169	0,540	0,799	1,000
Критерий Жанга (Z_C)							
0,150	0,170	0,215	0,341	0,509	0,867	0,971	1,000
0,100	0,113	0,152	0,264	0,426	0,818	0,954	1,000
0,050	0,055	0,081	0,166	0,303	0,722	0,913	1,000
0,025	0,024	0,041	0,098	0,203	0,610	0,853	1,000
0,010	0,007	0,014	0,044	0,107	0,440	0,732	1,000
Критерий Жанга (Z_K)							
0,150	0,147	0,173	0,277	0,436	0,814	0,947	1,000
0,100	0,097	0,117	0,206	0,352	0,747	0,916	1,000
0,050	0,048	0,060	0,121	0,236	0,623	0,844	1,000
0,025	0,023	0,030	0,070	0,151	0,499	0,751	1,000
0,010	0,009	0,012	0,032	0,081	0,350	0,609	1,000
Критерий Ватсона							
0,150	0,169	0,195	0,267	0,377	0,710	0,885	1,000
0,100	0,116	0,138	0,200	0,299	0,634	0,838	1,000
0,050	0,061	0,077	0,122	0,199	0,511	0,748	1,000
0,025	0,033	0,043	0,075	0,131	0,401	0,650	1,000
0,010	0,015	0,020	0,039	0,075	0,284	0,523	0,999
Критерий Купера							
0,150	0,167	0,189	0,248	0,343	0,661	0,852	1,000
0,100	0,114	0,132	0,183	0,266	0,579	0,797	1,000
0,050	0,060	0,072	0,108	0,171	0,450	0,691	1,000
0,025	0,032	0,040	0,064	0,109	0,341	0,583	0,999
0,010	0,014	0,018	0,032	0,059	0,230	0,449	0,998

Сравнив оценки мощности рассматриваемых критериев и критериев Колмогорова, Крамера—Мизеса—Смирнова и Андерсона—Дарлинга, приведенные в [19, 20], можно следующим образом упорядочить критерии по мощности при проверке:

простых гипотез относительно пары «нормальный закон — логистический закон» $Z_C \succ Z_A \succ Z_K \succ U_n^2 \succ V_n \succ AD \succ \succ K \succ KMC$;

простых гипотез относительно пары «закон Вейбулла — гамма-распределение» $Z_C \succ Z_A \succ Z_K \succ U_n^2 \succ V_n \succ AD \succ KMC \succ K$;

сложных гипотез относительно пары «нормальный закон — логистический закон» $Z_A \approx Z_C \succ Z_K \succ AD \succ KMC \succ U_n^2 \succ V_n \succ K$;

сложных гипотез относительно пары «закон Вейбулла — гамма-распределение» $Z_A \succ Z_C \succ AD \succ Z_K \succ KMC \succ U_n^2 \succ V_n \succ K$.

Если сравнить полученные результаты с мощностью критериев типа χ^2, то в случае проверки простых гипотез [19] критерий χ^2 Пирсона оказывается на третьей позиции при условии использования асимптотически оптимального группирования [17] и выбора числа интервалов, при котором критерий будет иметь максимальную мощность [17, 21]. Но при проверке сложных гипотез [20] позиции критериев χ^2 Пирсона и типа χ^2 Никулина—Рао—Робсона [22—24] ухудшаются: они оказываются на 7—8 месте в общем ряду критериев по убыванию мощности. Однако заметим, что мощность этих критериев можно максимизировать относительно заданной конкурирующей гипотезы за счет оптимального выбора границ и числа интервалов группирования [17, 21].

Окончательные итоги работы можно сформулировать следующим образом. Критерии Купера и Ватсона целесообразно использовать при проверке простых гипотез, так как в этой ситуации они имеют преимущество в мощности перед критериями Колмогорова, Крамера—Мизеса—Смирнова и Андерсона—Дарлинга. Проблем применения этих критериев при проверке простых гипотез нет.

При проверке сложных гипотез критерии Купера и Ватсона утрачивают преимущество перед критериями Крамера—Мизеса—Смирнова и Андерсона—Дарлинга. Однако отсюда не следует отказ от их использования в данном случае. В настоящий момент препятствием служит отсутствие знаний о распределениях (об их процентных точках) статистик критериев при проверке соответствующих сложных гипотез. В дальнейшем планируется представить результаты (модели предельных распределений и таблицы процентных точек), которые подобно [17, 25—27] позволят применять критерии Купера и Ватсона для проверки сложных гипотез относительно различных параметрических моделей законов распределения вероятностей.

Критерии Жанга, особенно со статистиками Z_C и Z_A, имеют неоспоримое преимущество в мощности перед остальными, более заметное при проверке простых гипотез. При этом определенные трудности с использованием критериев связаны с существенной зависимостью распределений статистик от объема выборок, но эти трудности не принципиальны.

При проверке сложных гипотез, когда к зависимости распределений статистик от n добавляется их зависимость от комбинации факторов, определяющих сложность гипотезы, эти трудности становятся принципиальными, так как невозможно для бесконечного числа вариантов сложных гипотез заранее найти законы распределения статистик критериев. Однако и здесь существует выход, который заключается в изменении технологии проверки сложной гипотезы с применением конкретного критерия [28]. Соответствующий подход предполагает исследование требуемой закономерности в интерактивном режиме. В данной ситуации это означает, что распределение статистики применяемого критерия, которое неизвестно к моменту начала решения задачи статистического анализа (так как неизвестны все факторы, определяющие характер сложной гипотезы), должно находиться в реальном времени данного анализа и использоваться на этапе формирования статистического вывода — принять или отклонить проверяемую гипотезу на основе вычисленного значения статистики критерия и полученного на основе компьютерных технологий знания о распределении статистики. Такой подход с использованием возможностей многоядерной и многопроцессорной вычислительной техники уже успешно реализован [28].

В заключение отметим следующее. Дальнейшее развитие аппарата прикладной математической статистики и достижение положительного эффекта от применения статистических методов в сфере науки, техники и экономики неразрывно связаны с интенсивным использованием компьютерных технологий имитационного моделирования и исследования статистических и вероятностных закономерностей, развитием соответствующего наукоемкого программного обеспечения.

Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки РФ в рамках госзадания (проект 8.1274.2011) и ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» (соглашение № 14.В37.21.0860).

Литература

1. **Kuiper N. H.** Tests concerning random points on a circle // Proc. Konikl. Nederl. Akad. Van Wettenschappen. 1960. Ser. A. V. 63. P. 38—47.

2. **Watson G. S.** Goodness-of-fit tests on a circle. I // Biometrika. 1961. V. 48. N 1—2. P. 109—114.

3. **Watson G. S.** Goodness-of-fit tests on a circle. II // Biometrika. 1962. V. 49. N 1—2. P. 57—63.

4. **Zhang J.** Powerful goodness-of-fit and multi-sample tests. Toronto: PhD Thesis. York University, 2001.

5. **Zhang J.** Powerful goodness-of-fit tests based on the likelihood ratio 2002. V. 64. Pt. 2. P. 281—294.

6. **Zhang J., Wub Yu.** Likelihood-ratio tests for normality // Computational Statistics & Data Analysis. 2005. V. 49, N 3. P. 709—721.

7. **Zhang J.** Powerful Two-Sample Tests Based on the Likelihood Ratio // Technometrics. 2006. V. 48, N 1. P. 95—103.

8. **Arsham H.** Kuiper's P-value as a measuring tool and decision procedure for the goodness-of-fit test // J. Appl. Statist. 1988. V. 15. P. 131—135.

9. **Stephens M. A.** The goodness-of-fit statistic V_N: distribution and significance points // Biometrika. 1965. V. 52, N 3—4. P. 309—321.

10. **Stephens M. A.** EDF statistics for goodness of fit and some comparisons // J. American Statistic. Association. 1974. V. 69. N 347. P. 730—737.

11. **Большев Л. Н., Смирнов Н. В.** Таблицы математической статистики. М.: Наука, 1983.

12. **Pearson E. S., Hartley H. O. T**ables for Statisticians// Biometrika. 1972. V. 2.

13. **Stephens M. A.** Use of the Kolmogorov-Smirnov, Cramer-Von Mises and related statistics without extensive tables // J. Royal Statistic. Soc. Ser. B (Methodological). 1970. V. 32. N 1. P. 115—122.

14. **Koziol J. A.** A modification of Watson's statistic for goodness-of-fit // Communications in Statistics — Theory and Methods. 1989. V. 18. N 10. P. 3739—3747.

15. **Nikitin Ya.Yu.** Bahadur effectiveness of Watson-Darling goodness-of-fit tests // J. Mathemat. Sci. 1988. V. 43. N 6. P. 2833—2838.

16. **Козлова А. В., Лемешко Б. Ю.** Исследование распределений статистик и мощности непараметрических критериев согласия, предложенных Jin Zhang // Информатика и проблемы телекоммуникаций: Матер. Рос. науч.-техн. конф.: Новосибирск, 2007. Т. 1. С. 136—139.

17. **Лемешко Б. Ю. и др.** Статистический анализ данных, моделирование и исследование вероятностных закономерностей. Компьютерный подход / Монография. Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2011.

18. **Лемешко Б. Ю., Лемешко С. Б., Постовалов С. Н.** Мощность критериев согласия при близких альтернативах // Измерительная техника. 2007. № 2. С. 22—27; **Lemeshko B. Yu., Lemeshko S. B., Postovalov S. N.** The power of goodness of fit tests for close alternatives // Measurement Techniques. 2007. V. 50. № 2. P. 132—141.

19. **Лемешко Б. Ю., Лемешко С. Б., Постовалов С. Н.** Сравнительный анализ мощности критериев согласия при близких конкурирующих гипотезах. I. Проверка простых гипотез // Сибирский журнал индустриальной математики. 2008. Т. 11. № 2(34). С. 96—111; **Lemeshko B. Yu., Lemeshko S. B., Postovalov S. N.** Comparative Analysis of the Power of Goodness-of-Fit Tests for Near Competing Hypotheses. I. The Verification of Simple Hypotheses // J. Appl. and Industrial Mathematics. 2009. V. 3. N 4. P. 462—475.

20. **Лемешко Б. Ю., Лемешко С. Б., Постовалов С. Н.** Сравнительный анализ мощности критериев согласия при близких альтернативах. II. Проверка сложных гипотез // Сибирский журнал индустриальной математики. 2008. Т. 11. № 4(36). С. 78—93; **Lemeshko B. Yu., Lemeshko S. B., Postovalov S. N.** Comparative analysis of the power of goodness-of-fit tests for near competing hypotheses. II. Verification of complex hypotheses // J. Appl. and Industrial Mathematics. 2010. V. 4. N 1. P. 79—93.

21. **Лемешко Б. Ю., Чимитова Е. В.** О выборе числа интервалов в критериях согласия типа χ^2 // Заводская лаборатория. Диагностика материалов. 2003. Т. 69. № 1. С. 61—67.

22. **Никулин М. С.** О критерии хи-квадрат для непрерывных распределений // Теория вероятностей и ее применение. 1973. Т. 18. № 3. С. 675—676.

23. **Никулин М. С.** Критерий хи-квадрат для непрерывных распределений с параметрами сдвига и масштаба // Там же. С. 583—591.

24. **Rao K. C., Robson D. S.** A chi-squared statistic for goodness-of-fit tests within the exponential family // Comm. Statist. 1974. V. 3. P. 1139—1153.

25. **Лемешко Б. Ю., Лемешко С. Б.** Модели распределений статистик непараметрических критериев согласия при проверке сложных гипотез с использованием оценок максимального правдоподобия. Ч. I // Измерительная техника. 2009. № 6. С. 3—11; **Lemeshko B. Yu., Lemeshko S. B.** Distribution models for nonparametric tests for fit in verifying complicated hypotheses and maximum-likelihood estimators. Pt. 1 // Measurement Techniques. 2009. V. 52. N 6. P. 555—565.

26. **Лемешко Б. Ю., Лемешко С. Б.** Модели распределений статистик непараметрических критериев согласия при проверке сложных гипотез с использованием оценок максимального правдоподобия. Ч. II // Измерительная техника. 2009. № 8. С. 17—26; **Lemeshko B. Yu., Lemeshko S. B.** Models for statistical distributions in nonparametric fitting tests on composite hypotheses based on maximum-likelihood estimators. Pt. II // Measurement Techniques. 2009. V. 52. N 8. P. 799—812.

27. **Lemeshko B. Yu., Lemeshko S. B., Postovalov S. N.** Statistic distribution models for some nonparametric goodness-of-fit tests in testing composite hypotheses // Communications in Statistics — Theory and Methods, 2010. V. 39. N 3. P. 460— 471.

28. **Lemeshko B. Yu., Lemeshko S. B., Rogozhnikov A. P.** Real-time studying of statistic distributions of non-parametric goodness-of-fit tests when testing complex hypotheses // Proc. Intern. Workshop «Applied Methods of Statistical Analysis. Simulations and Statistical Inference» AMSA'2011, Novosibirsk, Russia, 20—22 September, 2011. P. 19—27.

Дата принятия 14.01.2013 г.