

## Измерение параметров трехэлементных нерезонансных двухполюсников на фиксированной частоте

М. В. КЛЮЕВ\*, Е. В. ИСАЕВ\*\*, Н. К. ЮРКОВ\*

\* Пензенский государственный университет, Пенза, Россия

\*\* Пензенский государственный университет архитектуры и строительства, Пенза, Россия, e-mail: evis-555@yandex.ru

Предложен алгоритм косвенного измерения параметров трехэлементных нерезонансных двухполюсников, основанный на анализе переходного процесса, возникающего в двухполюснике при подаче на него гармонического напряжения фиксированной частоты. Получены расчетные формулы для вычисления параметров двухполюсников.

**Ключевые слова:** трехэлементный двухполюсник, переходный процесс, свободный ток, круговая диаграмма.

The algorithm of indirect measurement of three-element nonresonance two-terminal networks based on analysis of transition process occurring in two-terminal network at harmonic voltage of fixed frequency supply was suggested. The calculation formulae for two-terminal networks parameters computation were obtained.

**Key words:** three-element two-terminal networks, transition process, free current, circular graph.

Общеизвестно, что ряд элементов электронных устройств, в особенности активных, может менять свои параметры при изменении частоты протекающих через них сигналов. Поэтому задача измерения параметров трехэлементных нерезонансных двухполюсников на любой фиксированной частоте из диапазона, в котором предполагается функционирование двухполюсника, несомненно актуальна при разработке сложных электронных устройств. Предлагаемая методика основана на анализе переходных процессов, протекающих в указанных двухполюсниках при подаче на них переменного напряжения фиксированной частоты. В целом она представляется комплексом алгоритмов в составе специализированного измерительно-вычислительного комплекса (ИВК), предназначенного для измерения параметров сложных электронных систем.

Рассмотрим двухполюсники с одинаковой структурой в двух вариантах — с емкостной и индуктивной составляющими (рис. 1).

Пусть на двухполюсник, начиная с момента времени  $t = 0$ , подается гармоническое напряжение  $u(t) = U_0 e^{j\omega t}$ . Ток через двухполюсник принято представлять в виде [1]:

$$i = i_{\text{пр}} + i_{\text{св}}, \quad (1)$$

где  $i_{\text{пр}}$ ,  $i_{\text{св}}$  — принужденный и свободный токи.

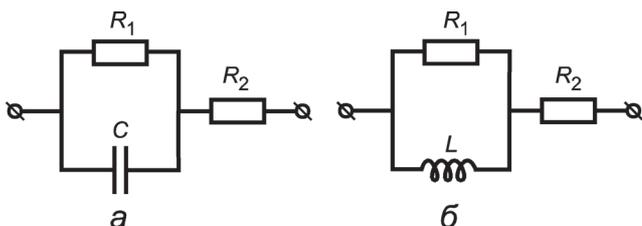


Рис. 1. Исследуемые двухполюсники (первый вариант) с емкостной (а) и индуктивной (б) составляющими

Обобщенные сопротивления двухполюсников соответственно для рис. 1, а, б:

$$Z_1(p) = \frac{R_1 R_2 C p + R_1 + R_2}{R_1 C p + 1}; \quad Z_2(p) = \frac{(R_1 + R_2) L p + R_1 R_2}{L p + R_1}.$$

Если эти сопротивления представлять в виде  $Z(p) = F(p)/f(p)$ , то можно заметить, что в обоих случаях степени полиномов  $F(p)$  и  $f(p)$  совпадают. Следовательно, обобщенные сопротивления  $Z_1(p)$  и  $Z_2(p)$  можно представить разложением Хэвисайда [2]. Таким образом, формула для свободного тока имеет вид

$$i_{\text{св}} = U_0 \sum_{k=1}^m \frac{f(a_k)}{(a_k - j\omega) F'(a_k)} e^{-a_k t}, \quad (2)$$

где  $a_k$  —  $k$ -й корень уравнения  $F(p) = 0$ ;  $m$  — число корней.

Отдельно рассмотрим каждый из двухполюсников, представленных на рис. 1. Для двухполюсника с емкостной составляющей (см. рис. 1, а)  $F(p) = R_1 R_2 C p + R_1 + R_2$ ;  $f(p) = R_1 C p + 1$ . В данном случае  $m = 1$  и, значит,

$$a_1 = -\frac{R_1 + R_2}{C R_1 R_2}; \quad F'(p) = C R_1 R_2; \quad f(a_1) = -\frac{R_1 + R_2}{C R_1 R_2} C R_1 + 1 = -\frac{R_1}{R_2}.$$

Следовательно, в соответствии с (2)

$$i_{\text{св}} = -U_0 R_1 e^{\frac{R_1 + R_2}{C R_1 R_2} t} \left[ R_2 \left( -\frac{R_1 + R_2}{C R_1 R_2} - j\omega \right) C R_1 R_2 \right]^{-1}.$$

Поэтому (1) можно представить как

$$i = i_{\text{пр}} + \frac{U_0 R_1}{R_2 (R_1 + R_2 - j\omega C R_1 R_2)} e^{-\frac{R_1 + R_2}{C R_1 R_2} t}. \quad (3)$$

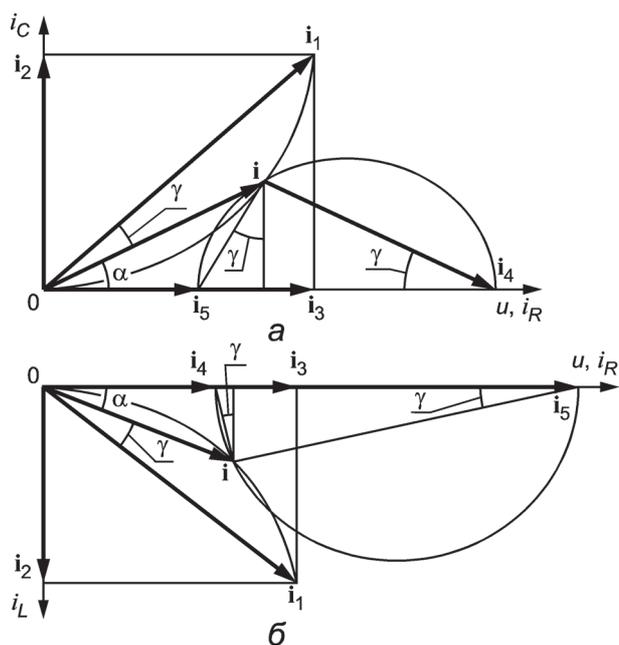


Рис. 2. Круговые диаграммы токов двухполюсников, изображенных на рис. 1, с емкостной (а) и индуктивной (б) составляющими

Для установления аналитической зависимости между параметрами двухполюсника и его токами построим круговые диаграммы токов [2] рассматриваемого двухполюсника, показанные на рис. 2, где  $i$  — установившийся ток по завершении переходного процесса, т. е.  $i_{np}$ ;  $i_1$  — ток при  $R_2 = 0$ ;  $i_2$ ,  $i_3$  — проекции тока  $i_1$  соответственно на оси  $i_C$  и  $i_R$ ;  $i_4$  — мгновенное значение тока при  $t = 0$ , которое эквивалентно току  $i$  при  $C \rightarrow \infty$ ;  $i_5$  — ток  $i$  при  $C \rightarrow 0$ ;  $\alpha$  — фазовый сдвиг тока  $i$  относительно входного напряжения  $u(t)$ .

Из схемы двухполюсника (см. рис. 1, а) следует, что при  $R_2 \rightarrow \infty$  все упомянутые выше токи стремятся к нулю. В то же время в соответствии с круговой диаграммой  $|i_{cb}| = |i_4 - i|$ . Конец вектора тока  $i$  описывает дугу окружности с центром на координатной оси  $i_C$  при изменении сопротивления  $R_2$  от 0 до  $\infty$ . Отношение токов  $i/i_1 = \sin \alpha / \sin(\alpha + \gamma)$ , откуда следует

$$i_2 = U_0 \omega C = i \frac{\sin^2(\alpha + \gamma)}{\sin \alpha}; i_3 = \frac{U_0}{R_1} = i \frac{\sin(\alpha + \gamma)}{\sin \alpha} \cos(\alpha + \gamma). \quad (4)$$

При изменении емкости  $C$  от 0 до  $\infty$  конец вектора  $i$  описывает полуокружность с центром на координатной оси  $i_R$ . Из отношения токов  $i/i_4 = \sin \gamma / \sin(\alpha + \gamma)$  в соответствии с законом коммутации находим

$$i_4 = U_0 / R_2 = i \sin(\alpha + \gamma) / \sin \gamma. \quad (5)$$

Из отношения токов  $i/i_5 = \cos \gamma / \cos(\alpha + \gamma)$  получаем

$$i_5 = U_0 / (R_1 + R_2) = i \cos(\alpha + \gamma) / \cos \gamma. \quad (6)$$

В случае неизвестных параметров двухполюсника непосредственно измеряют токи  $i$  и  $i_4$ , протекающие через двухполюсник, и фазовый сдвиг  $\alpha$ . Угол  $\gamma$  находим из круговой диаграммы (см. рис. 2, а):

$$\gamma = \arctg [i \sin \alpha / (i_4 - i \cos \alpha)]. \quad (7)$$

Важно отметить, что при выводе приведенных выше соотношений входной сигнал рассматривался в виде  $u(t) = U_0 e^{j\omega t}$ , т. е.  $u(0) = U_0$ . Следовательно, при реальных измерениях этот сигнал в момент включения  $t = 0$  должен быть  $u(t) = U_0 \cos \omega t$ . Однако силу тока  $i$  измеряют, когда  $i_{cb}$  близка к нулю. Согласно (3) постоянная времени этого переходного процесса  $\tau = CR_1 R_2 / (R_1 + R_2)$ . В то же время до начала процесса измерения (предварительно)  $\tau$  оценить невозможно, поскольку неизвестны параметры двухполюсника. В связи с этим можно предложить двухэтапный процесс измерения.

На первом этапе исходя из предполагаемых значений параметров рассчитываем грубую оценку  $\tau_1$ , после чего измерение проводим при  $\tau \geq 3\tau_1$ . На втором этапе в соответствии с полученными оценками и требуемой погрешностью измерения можно рассчитать момент времени, после которого следует измерять  $i$ .

Таким образом, алгоритм косвенного измерения параметров двухполюсника с емкостной составляющей можно представить следующей последовательностью:

- 1) непосредственно измерить силы токов  $i$ ,  $i_4$  и фазовый сдвиг  $\alpha$ ;
- 2) по (7) вычислить угол  $\gamma$ ;
- 3) исходя из (5) рассчитать сопротивление  $R_2$  по формуле

$$R_2 = (U_0 / i) \sin \gamma / \sin(\alpha + \gamma); \quad (8)$$

- 4) согласно (6), (8) вычислить сопротивление  $R_1$  по формуле

$$R_1 = 2(U_0 / i) \sin \alpha / \sin 2(\alpha + \gamma);$$

- 5) из (4) найти емкость

$$C = (i / (U_0 \omega)) \sin^2(\alpha + \gamma) / \sin \alpha.$$

Обратимся теперь к измерениям параметров двухполюсника с индуктивной составляющей (см. рис. 1, б). В этом случае

$$F(p) = (R_1 + R_2) Lp + R_1 R_2; f(p) = Lp + R_1.$$

Здесь, как и ранее,  $m = 1$ , причем

$$a_1 = -\frac{R_1 R_2}{L(R_1 + R_2)}; F'(p) = L(R_1 + R_2); f(a_1) = \frac{R_1^2}{R_1 + R_2}.$$

Соответственно

$$i_{cb} = U_0 \frac{R_1^2}{R_1 + R_2} e^{-\frac{R_1 R_2}{L(R_1 + R_2)} t} [-R_1 R_2 + j\omega L(R_1 + R_2)]^{-1};$$

$$i = i_{np} - U_0 R_1^2 e^{-\frac{R_1 R_2}{L(R_1 + R_2)} t} [(R_1 + R_2)(R_1 R_2 - j\omega L(R_1 + R_2))]^{-1}. \quad (9)$$

Для установления аналитической связи между параметрами двухполюсника и его токами строим круговые диаграммы, показанные на рис. 2, б, где по аналогии с диаграммой на рис. 2, а параметры  $i$ ,  $i_1$ ,  $i_3$  и  $\alpha$  имеют тот же смысл, что и в предыдущем случае;  $i_2$  — проекция тока  $i_1$  на ось  $i_L$ ;  $i_4$  — мгновенное значение силы тока при  $t = 0$ , которое эквивалентно току  $i$  при  $L \rightarrow \infty$ ;  $i_5$  — ток  $i$  при  $L \rightarrow 0$ .

В соответствии с круговой диаграммой  $|i_{cb}| = |i_4 - i|$ . Дальнейшие рассуждения полностью аналогичны предыдущим, а именно: конец вектора тока  $i$  описывает дугу окружности с центром на координатной оси  $i_L$  при изменении сопротивления  $R_2$  от 0 до  $\infty$ . Из отношения токов  $i/i_1 = |\sin \alpha / \sin(\alpha + \gamma)|$  следует

$$i_2 = \frac{U_0}{\omega L} = i \frac{\sin^2(\alpha + \gamma)}{|\sin \alpha|}; i_3 = \frac{U_0}{R_1} = i \left| \frac{\sin(\alpha + \gamma)}{\sin \alpha} \right| \cos(\alpha + \gamma). \quad (10)$$

При изменении индуктивности  $L$  от 0 до  $\infty$  конец вектора  $i$  описывает полуокружность с центром на координатной оси  $u$ . Ток  $i_5$  соответствует  $L \rightarrow \infty$ , а  $i_4 \rightarrow 0$ . Из отношения токов  $i/i_5 = |\sin \gamma / \sin(\alpha + \gamma)|$  в соответствии с законом коммутации находим

$$i_5 = U_0/R_2 = i |\sin(\alpha + \gamma) / \sin \gamma|. \quad (11)$$

Из отношения токов  $i/i_4 = \cos \gamma / \cos(\alpha + \gamma)$  получаем

$$i_4 = U_0/(R_1 + R_2) = i \cos(\alpha + \gamma) / \cos \gamma. \quad (12)$$

В случае неизвестных параметров двухполюсника непосредственно измеряют силы тока  $i$ ,  $i_5$  и фазовый сдвиг  $\alpha$ . Угол  $\gamma$  находят из круговой диаграммы (см. рис. 2, б):

$$\gamma = \arctg[i \sin \alpha / (i_5 - i \cos \alpha)]. \quad (13)$$

Здесь в отношении измерений сил токов  $i$ ,  $i_5$  справедливы те же замечания, что и для токов  $i$ ,  $i_4$  двухполюсника с емкостной составляющей. Разница состоит лишь в том, что согласно (9) постоянная времени переходного процесса  $\tau = L(R_1 + R_2)/(R_1 R_2)$ .

Таким образом, алгоритм косвенного измерения параметров двухполюсника с индуктивной составляющей можно представить следующей последовательностью:

- 1) непосредственно измерить силы токов  $i$ ,  $i_5$  и фазовый сдвиг  $\alpha$ ;
- 2) по (11) вычислить угол  $\gamma$ ;
- 3) исходя из (11) рассчитать сопротивление  $R_2$  по формуле

$$R_2 = (U_0/i) |\sin \gamma / \sin(\alpha + \gamma)|; \quad (14)$$

- 4) согласно (12), (14) вычислить сопротивление  $R_1$  по формуле

$$R_1 = (U_0/i) |2 \sin \alpha / \sin 2(\alpha + \gamma)|;$$

- 5) из (10) найти индуктивность

$$L = [U_0/(i\omega)] |\sin \alpha / \sin^2(\alpha + \gamma)|.$$

Теперь по тому же принципу, что и ранее, рассмотрим измерение параметров двухполюсников иной структуры (рис. 3).

В данном случае обобщенные сопротивления двухполюсников (рис. 3, а, б) соответственно выражаются

$$Z_3(p) = \frac{R_2(1 + pCR_1)}{1 + pC(R_1 + R_2)}; Z_4(p) = \frac{R_2(R_1 + pL)}{pL + R_1 + R_2}.$$

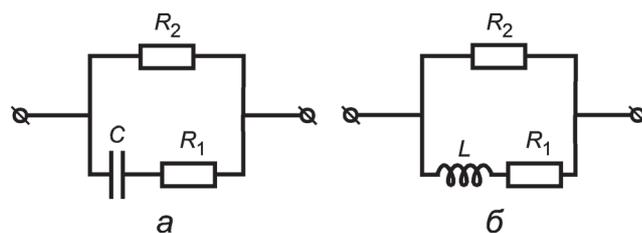


Рис. 3. Исследуемые двухполюсники (второй вариант) с емкостной (а) и индуктивной (б) составляющими

Для двухполюсника с емкостной составляющей (см. рис. 3, а)

$$F(p) = R_2(1 + pCR_1); f(p) = 1 + pC(R_1 + R_2);$$

$$a_1 = -(R_1 C)^{-1}; F'(p) = CR_1 R_2; f(a_1) = -R_2/R_1;$$

$$i = i_{np} + \frac{U_0}{R_1(1 - j\omega CR_1)} e^{-\frac{t}{CR_1}}.$$

Круговые диаграммы для данного случая приведены на рис. 4, а, где  $i$ ,  $\alpha$  — те же, что и ранее;  $i_1$  — ток через двухполюсник при  $R_1 = 0$ ;  $i_2$  — проекция  $i_1$  на ось  $i_C$ ;  $i_3$  — ток, протекающий через двухполюсник при  $R_1 \rightarrow \infty$  или  $C = 0$ , т. е. при разрыве ветви  $R_1$ ,  $C$ ;  $i_4$  — мгновенное значение тока при  $t = 0$ , которое согласно закону коммутации эквивалентно току через двухполюсник при  $C \rightarrow \infty$ .

При изменении  $R_1$  от 0 до  $\infty$  конец вектора тока  $i$  описывает полуокружность с центром на прямой, параллельной оси  $i_C$  и проходящей через конец вектора тока  $i_3$ . В то же время при изменении  $C$  от 0 до  $\infty$  тот же вектор описывает полуокружность с центром на оси  $i_R$ .

Силы токов  $i$  и  $i_4$ , а также угол  $\alpha$  можно определить путем прямого измерения. Поэтому угол  $\gamma$  в соответствии с круговой диаграммой на рис. 4, а можно вычислить по формуле

$$\gamma = \arctg[i \sin \alpha / (i_4 - i \cos \alpha)]. \quad (15)$$

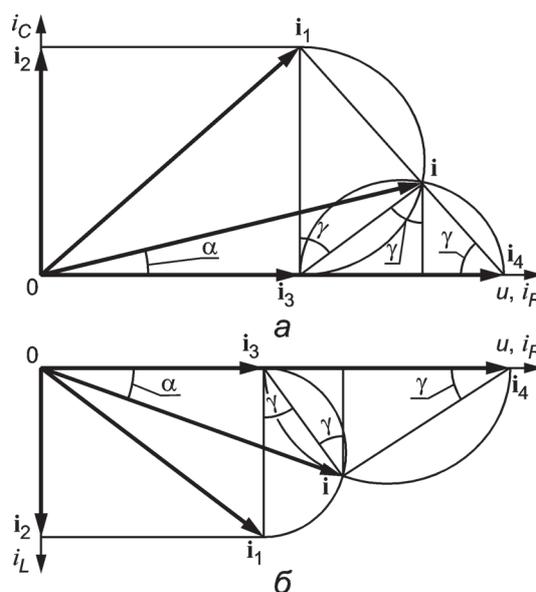


Рис. 4. Круговые диаграммы токов двухполюсников, изображенных на рис. 3, с емкостной (а) и индуктивной (б) составляющими

При этом  $i_3 = i \cos \alpha - i \sin \alpha \operatorname{tg} \gamma$ , откуда согласно (15)

$$i_3 = i (i_4 \cos \alpha - i) / (i_4 - i \cos \alpha). \quad (16)$$

Можно заметить, что  $i_3 = U_0 / R_2$ , тогда с учетом (16)

$$R_2 = U_0 / i_3 = U_0 (i_4 - i \cos \alpha) / [i (i_4 \cos \alpha - i)]. \quad (17)$$

Очевидно, что  $i_4 = U_0 (1/R_1 + 1/R_2)$ , откуда, подставляя (17), находим

$$R_1 = \frac{U_0 R_2}{i_4 R_2 - U_0} = \frac{U_0 (i_4 - i \cos \alpha)}{i_4^2 + i^2 - 2i_4 i \cos \alpha}.$$

Следует отметить, что величина, стоящая в знаменателе полученного выражения, равна квадрату свободного тока при

$$t = 0 \text{ (см. рис. 4, а), т. е. } i_{\text{св}}^2 \Big|_{t=0} = i_4^2 + i^2 - 2i_4 i \cos \alpha.$$

Далее, поскольку  $i_2$  — ток через емкость  $C$  (при  $R_1 = 0$ ),

$$i_2 = U_0 \omega C. \quad (18)$$

В то же время согласно рис. 4, а ток  $i_2 = i \sin \alpha / \cos^2 \gamma$  и в соответствии с (15), (16) и (18) получаем

$$C = i \sin \alpha (i_4^2 + i^2 - 2i_4 i \cos \alpha) / [U_0 \omega (i_4 - i \cos \alpha)^2].$$

Кроме того, отметим, что при непосредственном измерении тока  $i$  в рассматриваемом двухполюснике постоянная времени переходного процесса  $\tau = R_1 C$ .

Теперь обратимся к расчету параметров двухполюсника с индуктивной составляющей (см. рис. 3, б). В этом случае

$$F(p) = R_2(R_1 + pL); \quad f(p) = pL + R_1 + R_2;$$

$$a_1 = -R_1/L; \quad F'(p) = R_2L; \quad f(a_1) = R_2.$$

Здесь, как и ранее, применимо разложение Хэвисайда, а значит

$$i = i_{\text{пр}} - U_0 e^{-\frac{R_1}{L}t} / (R_1 + j\omega L). \quad (19)$$

Круговые диаграммы токов рассматриваемого двухполюсника приведены на рис. 4, б, где в данном случае  $i$  — ток в установившемся режиме;  $i_1$  — ток через двухполюсник при  $R_1 = 0$ ;  $i_2$  — проекция  $i_1$  на ось  $i_L$ ;  $i_3$  — мгновенное значение тока при  $t = 0$ , что эквивалентно согласно закону коммутации току через двухполюсник при  $L \rightarrow \infty$  или  $R_1 \rightarrow \infty$ , т. е. при разрыве ветви  $R_1, L$ ;  $i_4$  — ток через двухполюсник при  $L = 0$ ;  $\alpha$  — фазовый сдвиг тока  $i$  относительно входного напряжения  $u(t)$ .

При изменении  $R_1$  от 0 до  $\infty$  конец вектора тока  $i$  описывает полуокружность с центром на прямой, параллельной оси  $i_L$  и проходящей через конец вектора тока  $i_3$ . При изменении  $L$  от 0 до  $\infty$  конец вектора тока  $i$  описывает полуокружность с центром на оси  $i_R$ .

Из круговой диаграммы на рис. 4, б находим

$$\gamma = \operatorname{arctg}[(i \cos \alpha - i_3) / i \sin \alpha]. \quad (20)$$

В то же время

$$R_2 = U_0 / i_3. \quad (21)$$

Из круговой диаграммы  $i_4 = i \sin(\alpha + \gamma) / \sin \gamma$ , а также  $i_4 = U_0 (1/R_1 + 1/R_2)$ . И в соответствии с (21)

$$R_1 = U_0 R_2 / (i_4 R_2 - U_0) = U_0 / (i_4 - i_3).$$

Поскольку можно утверждать, что  $i_2 = U_0 / \omega L$  и  $i_2 = i \sin \alpha / \cos^2 \gamma$  согласно рис. 4, б, в соответствии с (20) находим

$$L = \frac{U_0 \cos^2 \gamma}{\omega |\sin \alpha|} = \frac{U_0 i |\sin \alpha|}{\omega (i_4^2 + i_3^2 - 2i_4 i_3 \cos \alpha)},$$

где в знаменателе полученного выражения присутствует квадрат свободного тока при  $t = 0$  (см. рис. 4, б), т. е.

$$i_{\text{св}}^2 \Big|_{t=0} = i_4^2 + i_3^2 - 2i_4 i_3 \cos \alpha.$$

Исходя из (19) постоянную времени переходного процесса в данном случае можно оценить как  $\tau = L/R_1$ . Здесь справедливы те же рекомендации, которые относились к двухполюсникам иной структуры.

В начале статьи было отмечено, что методика в целом разработана как совокупность алгоритмов для специализированного ИВК. Поэтому точность и быстрдействие ее выполнения, в основном, зависят от характеристик цифровой аппаратуры, которой комплектуется ИВК, и в немалой степени от искусства программистов, реализующих алгоритмы в виде программы.

В заключение предлагаем описание обобщенного алгоритма косвенного измерения параметров рассмотренных выше двухполюсников.

1. На двухполюсник подать переменное напряжение  $u(t) = U_0 \cos \omega t$  с фиксированными амплитудой и частотой, так что  $u(0) = U_0$  при  $t = 0$ .

2. В момент включения  $t = 0$  измерить скачок тока через двухполюсник.

3. По завершении переходного процесса измерить силу установившегося тока и его сдвиг фазы относительно входного напряжения.

4. По соответствующим формулам вычислить вспомогательный угол  $\gamma$  и все три параметра каждого двухполюсника.

Работа выполнена в рамках реализации проекта «Разработка методов и средств неразрушающего диагностирования бортовых радиотехнических устройств космических систем» (Государственный контракт № 14.740.11.0840) Федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России (2009 — 2013 гг.)».

#### Л и т е р а т у р а

1. **Анго А.** Математика для электро- и радиоинженеров / Пер. с фр. М.: Наука, 1964.

2. **Бессонов Л. А.** Теоретические основы электротехники. М.: Высшая школа, 1983.

Дата принятия 25.05.2012 г.