620.1.08

Мотивы и направления пересмотра Руководства по выражению неопределенности измерения. Ч. 1. Недостатки Руководства и Дополнения 1

Э. А. ГОЛУБЕВ

Всероссийский научно-исследовательский институт метрологической службы, Москва, Россия, e-mail: goledu@mail.ru

Систематизированы недостатки Руководства по выражению неопределенности измерения, приводящие чаще всего к ошибочным результатам при использовании закона распространения для оценки неопределенности измерений. Дана новая интерпретация понятия случайной погрешности измерений. Аналитически обосновано совпадение мер неопределенности и прецизионности измерений.

Ключевые слова: *множества, случайная погрешность, влияющие факторы, субъективные вероятности, нелинейность функции передачи.*

The shortcomings of GUM that lead to unpredictable results when using the law of distribution for estimation of measurements uncertainty are systematized. The new interpretation of measurement random error concept is given. The coincidence of characteristics of measures of measurements uncertainty and precision is analytically substantiated.

Key words: *sets, random error, influence factors, subjective probabilities, nonlinearity of transfer function.*

Имеющиеся трудности использования Руководства по выражению неопределенности измерения (далее — Руководства) [1] возникают вследствие необоснованности продекларированных в нем правил оценки неопределенности и их излишнего усложнения. Эти правила должны бы быть следствием модели возникновения неопределенности, соответствующей приведенным ниже положениям.

Закон распространения неопределенностей. Согласно Руководству при косвенных измерениях оценку дисперсии $s^2(y)$, характеризующей неопределенность измерения выходной величины y, необходимо представлять в виде взвешенной суммы обыкновенных выборочных дисперсий[1] $\overline{\Delta x_k^2} = \overline{\left(x_{ik} - \overline{x_{ik}}\right)^2}$ и ковариаций $\overline{\Delta x_k \Delta x_l} = \overline{\left(x_{ik} - \overline{x_{ik}}\right)\left(x_{il} - \overline{x_{il}}\right)}$ коррелированных входных величин x_k (закон распространения неопределенностей):

$$s^2(y) \approx \sum_{k=1}^{N}\left(\frac{\partial y}{dx_k}\right)^2 \overline{\Delta x_k^2} + 2\sum_{k=1}^{N-1}\sum_{l=k+1}^{N}\frac{\partial y}{dx_k}\frac{\partial y}{dx_l}\overline{\Delta x_k \Delta x_l}. \qquad (1)$$

Здесь $y = f(x_k)$ — функция, отображающая зависимость выходной величины y от входных величин при косвенном измерении (функция передачи), а усреднения проводятся на множествах измеренных значений входных величин x_k. Таким образом, при оценке неопределенности в принципе нужно определять ряд обыкновенных дисперсий и еще больше ковариаций входных величин.

В Руководстве (и в метрологии в целом) практически не используется понятие множества, на котором выполняется усреднение при вычислении статистических характеристик случайных величин, с которыми имеют дело метрологи в процессах измерений и обработки данных. При этом речь идет о множествах не только измеренных значений или наблюдений, но и множествах значений той или иной статистической характеристики, полученных на небесконечных выборках[2]. Это не только множества влияющих (на результаты измерений и обработки данных) факторов, но и множества проявлений для каждого из них и для их комбинаций. Это также множество лабораторий, осуществляющих измерения по данной методике, множество различных цепочек прослеживаемости к эталонам и др. Значения неопределенности, полученные на этих множествах и при их различных сочетаниях, неизбежно отличаются друг от друга. При косвенных измерениях это относится не только к выходной величине, но и к входным величинам.

Фактически усреднения в Руководстве не подчиняются введенным в статистике правилам и часто имеют произвольный характер. Из текста Руководства неясно, на каких множествах следует выполнять усреднение входных величин при использовании закона распространения (1). Отсутствие пояснений побуждает рассматривать неопределенность как единственное значение, охватывающее все возможные множества. Однако эти неясности не коснулись таких средств измерений, как локационные и некоторые другие информационные системы, оптимизация функционирования которых в свое время во многом способствовала развитию математической статистики. И в настоящее время ее методическая база может быть основой не только при оценке неопределенности любых измерений, но и при решении задач оценки соответствия [2].

[1] Выборочные дисперсии получаются на конечном множестве и опираются на выборочное среднее значение.

[2] Выборочное значение любой статистики случайной величины, например, выборочное среднее значение, также является случайной величиной на множестве выборок.

Как и в Руководстве, дальнейшее изложение, кроме специально оговоренных случаев, будет относиться к оценкам неопределенности измерений, выполняемых одной (испытательной или калибровочной) лабораторией.

Природа случайной погрешности. Руководство опирается на принятое в метрологии понятие случайной погрешности, эффективное уменьшение которой связано с усреднением на множестве *n* повторных наблюдений в пределах одного измерения («быстрый» влияющий фактор — конечность числа *n*). Но это лишь небольшая часть реальных случайных воздействий, группы которых названы в Руководстве источниками неопределенности, а в стандарте [3] — влияющими факторами. Девять из десяти источников неопределенности — это «промежуточные» и гораздо более «медленные» (медленно меняющиеся) источники, которые соответствуют оценкам неопределенности по типу В применительно к входным величинам. По отношению к выходной величине подавляющую часть «метрологической» случайной погрешности вообще нельзя называть случайной погрешностью измерений, так как она относится лишь к повторным наблюдениям, но не к измерениям[3]. Получается, что, как это ни парадоксально, в Руководстве отсутствует понятие случайной погрешности измерений. Хотя именно она, как будет показано в дальнейшем, является случайной величиной, лежащей в основе неопределенности.

Введение в закон распространения дисперсий и ковариаций (входных величин), вызванных «промежуточными» и «медленными» влияющими факторами (при измерениях в различных звеньях цепочки прослеживаемости и разных лабораториях каждого уровня прослеживаемости), является попыткой учесть эту подавляющую часть. Это не очень удачная попытка, так как необходимых дисперсий и ковариаций много (особенно в группе внешних условий выполнения измерений), а данных о них явно недостаточно, и эти данные ненадежны, поскольку характеристики влияющих факторов в разных лабораториях различны. Кроме того, применяя для оценки неопределенности методику Руководства, невозможно учитывать неизвестные и неизмеримые факторы, а также факторы, зависимость от которых измеренной величины не может быть представлена аналитически или количественно. Ситуацию, когда известны все дисперсии и ковариации, входящие в закон распространения неопределенностей, нельзя рассматривать как типовую. Скорее всего, это редкое исключение. Кто может гарантировать, что учтены все факторы? Насколько значимы неизвестные факторы? Как учесть факторы, влияние которых на выходную величину нельзя формализовать? Эти вопросы не имеют ответа практически для любых измерений. По этой причине противоречия в оценке неопределенности, например между покупателем и продавцом, могут оказаться принципиально непреодолимыми. И здесь необходимо переходить к оценке рисков.

Более подробно вопросы моделирования случайных воздействий в метрологии и математической статистике рассмотрены в [4].

Аналитические представления неопределенности. Такие понятия, как неопределенность, нуждаются в менее сложных (чем закон распространения) и лучше интерпретируемых аналитических представлениях. В связи с этим неясно, почему вместо одного показателя изменчивости (дисперсии) выходной величины в (1) используется ряд показателей для входных величин (в том числе их ковариаций), что резко усложняет получение и обработку данных, необходимых для оценки неопределенности. Тем более, что в Приложении Е к Руководству воспроизведен известный вывод закона распространения как результат разложения дисперсии выходной величины в ряд Тейлора по малым приращениям входных величин.

В Руководстве не указано, в каких именно случаях можно применять закон распространения без ковариаций, а в каких их следует учитывать. Толкование этого вопроса в Руководстве привело к неоправданному расширению сферы, в которой используется простейшая форма закона распространения, исключающая ковариации. Действительно, на множестве звеньев цепочки прослеживаемости входные величины можно считать некоррелированными. Но их следует считать коррелированными на других множествах, например, в важном случае оценки неопределенности измерений одной лабораторией, при усреднении по времени выполнения измерений.

Однако в Руководстве неправомерно считается, что в большинстве случаев (а на практике — всегда) второй суммой в правой части приближенного равенства (1) можно пренебречь, так как входные величины x_k независимы (точнее некоррелированы). В действительности, в случае оценки неопределенности измерений, выполняемых данной лабораторией, входные величины коррелированы друг с другом, поскольку изменения проявлений многих влияющих факторов в ходе измерений (например, флуктуации напряжения питания) вызывают синхронные изменения входных величин. Эта причина коррелированности не учтена в [1].

Субъективные вероятности. В том же Приложении Е к Руководству равенство неопределенностей, обусловленных погрешностями входных величин и самими входными величинами, неоправданно связывается с тем, чтобы «вероятность рассматривалась как мера степени уверенности в том, что событие произойдет», т. е. была бы субъективной. В то же время справедливость этого равенства не вызывает больших сомнений и без привлечения данной меры. Нужно только изменить представление о случайной погрешности (как предложено выше).

Тем самым Приложение Е к Руководству «дало старт» многочисленным публикациям, посвященным роли субъективных вероятностей в оценке неопределенности измерений. Но причем здесь субъективные вероятности, а тем более их распределения — непонятно. Напомним, что в имеющихся определениях неопределенности слово «вероятность» вообще не употребляется, тогда как слово «рассеяние» (разброс) является ключевым. Примем также во внимание, что опыт эксперта, определяющего подобные вероятности, по существу является отражением воспринятого им статистического материала.

[3] При серийных измерениях измеряемой величиной является среднее значение повторов, но не наблюдаемое значение. Вообще-то словосочетание «измеряемая величина» имеет два смысла: один — свойство измеряемого объекта и второй — название наблюдаемых или измеряемых значений. В данной ситуации случайные величины для наблюдений и измерений различны, хотя измеряемая величина одна и та же. Может быть, вторую величину лучше было бы назвать наблюдаемой (либо измеряемой) случайной величиной.

В настоящее время количество литературы по оценке неопределенности с помощью субъективных вероятностей стремительно растет. Можно считать, что неточность экспертной оценки этих вероятностей определяется отдельным неформализуемым влияющим фактором, относящимся к группе «оператор» стандарта [3]. Учет этого фактора может лишь увеличить неопределенность. Для такой методически простой задачи, как оценка неопределенности, нелогично привлекать нетрадиционные методы решения.

Отсутствие проблемы нелинейности. Использование подхода Дополнения 1 к Руководству, т. е. учет возможной нелинейности функции передачи косвенного измерения $y = f(x_k)$, не может повысить точность оценки неопределенности, но не вследствие недостатков подхода, а из-за фактического отсутствия проблемы: в действительности нелинейность функции передачи практически не влияет на неопределенность измерений. Это, в свою очередь, является следствием того, что в Дополнении 1 не учтена важная особенность любых измерений: их погрешности чрезвычайно малы по сравнению с измеряемой величиной. Узость дифференциальных распределений входных величин по сравнению с измеренными значениями приводит к тому, что при многократных измерениях одного и того же образца рабочие участки функций передачи ограничиваются небольшими областями вокруг средних значений. В соответствии с основным принципом дифференцирования при уменьшении размеров участка преобразование приближается к линейному. В случае $\Delta y \ll \bar{y}$ и $\Delta x_k \ll \overline{x_k}$ поправки (на нелинейность) к значениям неопределенности много меньше самих значений неопределенности, так что проблема учета нелинейности отсутствует.

В Дополнении 1 исходят из общего случая произвольных соотношений между измеряемыми значениями входных величин и погрешностями их измерения. Однако эта общность кажущаяся, так как большинство измерений относится не к общему, а к «крайнему» случаю малых погрешностей. Но именно тогда независимо от используемого подхода происходит линеаризация функции передачи. Что касается «общего» случая, то это странный случай чрезвычайно неточных измерений, при котором погрешности не очень отличаются от измеряемой величины. Более подробно этот вопрос освещен в [5], где приведены количественные примеры учета нелинейности.

Итак, к недостаткам Руководства относятся:

отсутствие понятия множеств, на которых должно проводиться усреднение при использовании закона распространения;

отсутствие понятия случайной погрешности измерений;

невозможность учета неизвестных факторов, трудности учета неизмеримых и непредставимых факторов;

привлечение к оценкам неопределенности входных величин, а также субъективных вероятностей;

представление неопределенности как единого значения для данной измеряемой величины;

фрагментарность данных по дисперсиям входных величин и отсутствие данных по их ковариациям, необходимых для оценки неопределенности по методике Руководства;

резкое усложнение процедур получения и обработки данных при оценке неопределенности.

К сожалению, эти недостатки ведут к субъективному результату — непредсказуемому искажению истинных значений неопределенности. Они настолько существенны, что Руководство не может служить основой при оценке неопределенности измерений, по крайней мере, для сети региональных и национальных метрологических институтов, где отсутствуют возможности кардинального уменьшения воздействия влияющих факторов, являющихся основными источниками неопределенности. Поэтому ничего нельзя сказать о том, в какой мере найденное по методике Руководства значение неопределенности будет соответствовать истинному «рассеянию значений, приписываемых измеряемой величине» [1], т. е. неизвестно, в какой мере Руководство выполняет свою задачу.

Следует заметить, что сомнению подвергается не справедливость равенства (1), описывающего закон распространения неопределенности, а целесообразность его использования в связи с оценкой неопределенности. Правая часть (1) совпадает с давно известным представлением обыкновенной дисперсии повторяемости выходной величины y через обыкновенные дисперсии и ковариации входных величин при косвенных измерениях. Но это представление относится не только к дисперсии повторяемости. Собственно говоря, равенство (1) — это математическое соотношение, справедливое для любых случаев при $\Delta y \ll \bar{y}$ и $\Delta x_k \ll \overline{x_k}$. Естественно, оно справедливо и применительно к измерениям, причем для любых дисперсий и любых множеств, на которых выполняется усреднение, в том числе, к примеру (при измерениях по одной и той же методике), для дисперсии воспроизводимости и множества лабораторий.

Если же говорить об объеме работ, необходимых для оценки неопределенности, то, с одной стороны, совсем простых и безболезненных способов оценки быть не может, поскольку в ее основе лежит поиск статистических закономерностей, так или иначе связанный с проведением необходимого количества измерений. В этом аспекте речь может идти лишь о выполнении большего или меньшего объема измерений. Но, с другой стороны, априори ясно, что в общем случае получение опытных данных по дисперсиям и ковариациям ряда входных величин гораздо более трудоемко, чем по одной дисперсии (выходной величины).

В этом смысле ситуация с оценкой неопределенности по (1) вместо того, чтобы оценивать ее по обычным формулам нахождения дисперсий (стандартных отклонений), подобна ситуации с оценкой прецизионности (в том числе повторяемости и воспроизводимости) по аналогичной формуле. Если, например, в любых данных условиях выполняют несколько косвенных измерений (или наблюдений), то при практическом нахождении выборочной дисперсии полученных (измеренных) значений выходной величины никому и в голову не придет измерить все входные величины, найти их дисперсии и ковариации и провести вычисления по (1). Но, к сожалению, авторы Руководства не обратили внимания на эту аналогию.

Доказательства совпадения мер неопределенности и прецизионности. Согласно [3] прецизионность — это степень близости друг к другу независимых результатов измерений, полученных в конкретных регламентированных условиях. Основной мерой прецизионности считается стандартное отклонение измеренных значений.

Теорема Байеса. При кратком изложении аналитических доказательств совпадения мер неопределенности и прецизионности применительно к измерениям введем следующие обозначения: $p(z)$ — априорная (безусловная) вероятность выполнения измерения образца с приписанным значением z; $p(y)$ — априорная вероятность получения измеренного значения y; $p(y/z)$ — апостериорная вероятность получения измеренного значения y при условии измерения образца с приписанным значением z; $p(z/y)$ — апостериорная вероятность выполнения измерения образца с приписанным значением z при условии получения измеренного значения y. В этом общем случае формула Байеса [6] имеет вид

$$p(z/y) = p(y/z)p(z)/p(y).$$

В данной ситуации функции, входящие в эту формулу, можно рассматривать как распределения вероятностей для случайных величин y, z. При этом погрешности (и тем более неопределенности) измерений значительно меньше измеренных (или приписанных) значений. По этой причине «широкие» кривые априорных распределений $p(z)$, $p(y)$, полученные на множествах приписанных и измеренных значений в заданном диапазоне измерений, совпадают практически полностью. В то же время «узкие» кривые апостериорных распределений $p(z/y)$, $p(y/z)$, образованные микроизменениями z — y, y — z при совокупном воздействии влияющих факторов, совпадают по форме, но могут быть разнесены по положению (на любой из осей y или z). Это означает, что $p(z) \approx p(y)$ и, следовательно, $p(z/y) \approx p(y/z)$.

Разложение квадратичной формы. Приведем доказательство возможности выражения неопределенности как обыкновенной дисперсии выходной величины, основанное на более общей интерпретации закона распространения, чем описанная в начале статьи. Заметим, что вид закона распространения остается неизменным при замене случайных погрешностей Δx_k суммами $\delta x_{ik} + \Delta x_{ik}$ систематической и случайной погрешностей, хотя в этом случае входящие в него средние значения $\overline{\Delta x_k^2}$ и $\overline{\Delta x_k \Delta x_l}$ не являются дисперсиями и ковариациями входных величин. Но в каждом i-м (или j-м) приращении входной величины на множестве измерений (на котором проводятся усреднения) можно отделить смещение от разброса, представив приращение Δx_k в виде указанной суммы. При этом, поскольку $\overline{\Delta x_{ik}} = 0$, получим

$$\overline{\Delta x_k^2} = \overline{\left(\delta x_{ik} + \Delta x_{ik}\right)^2} = \delta x_k^2 + \overline{\Delta x_{ik}^2}; \quad \overline{\Delta x_k \Delta x_l} = \delta x_k \delta x_l + \overline{\Delta x_{ik} \Delta x_{il}}.$$

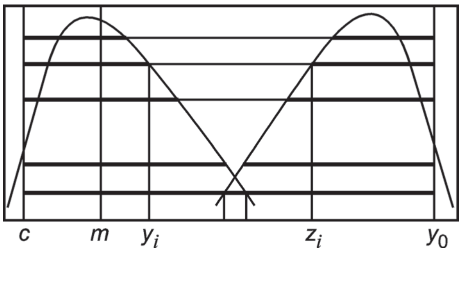

Иллюстрация условного эксперимента

В таком случае средний квадрат приращения $\Delta y = y - f(x_{0k})$ равен

$$\overline{\Delta y^2} \approx \overline{\left[\sum_{k=1}^{N}\left(\partial f / \partial x_k\right)\Delta x_k\right]^2} = \sum_{i=1}^{N}\left(\partial f / \partial x_k\right)^2 \overline{\Delta x_k^2} +$$

$$+ 2\sum_{k=1}^{N-1}\sum_{l=k+1}^{N}\left(\partial f / \partial x_k\right)\left(\partial f / \partial x_l\right)\overline{\Delta x_k \Delta x_l} + \qquad (2)$$

$$+ \sum_{k=1}^{N}\left(\partial f / \partial x_k\right)^2 \left(\overline{\Delta x_k}\right)^2 +$$

$$+ 2\sum_{k=1}^{N-1}\sum_{l=k+1}^{N}\left(\partial f / \partial x_k\right)\left(\partial f / \partial x_l\right)\overline{\Delta x_k}\,\overline{\Delta x_l}.$$

Равенство (2) можно трактовать как обобщение закона распространения на произвольные положения опорных значений для входных (и, следовательно, выходной) случайных величин. Если значения погрешностей входных (и выходной) величин не содержат смещений (т. е. все $\overline{\Delta x_k} = 0$ и $\Delta x_i = \Delta x_{ik}$), то в разложении (2) остаются только две первые суммы и оно преобразуется в обычный закон распространения неопределенности. Тем самым доказана и несостоятельность утверждения Руководства о неизменности неопределенности при замене выборочных средних значений на любые другие (в том числе на истинные, действительные и эталонные) опорные значения.

Равенство (2) демонстрирует тот факт, что неопределенность не только может, но и должна выражаться через обычные дисперсии и ковариации входных величин, а не через какие-либо другие квадратичные формы, в которых роль опорных вместо средних значений играют другие (в том числе действительные и эталонные) значения входных величин. Равенство (2) также означает, что для выходной величины произвольная квадратичная форма выражает неопределенность тогда и только тогда, когда в качестве опорного в этой форме используется среднее измеренных значений выходной величины, т. е. когда она является дисперсией и совпадает с дисперсией прецизионности.

Условный эксперимент. Однако более наглядно уяснить природу неопределенности можно, не применив теорему Байеса или обобщенный закон распространения, а гипотетически выполнив ряд N измерений одного и того же стабильного во времени объекта с известным действительным значением c и зафиксировав их результаты y_i, а также разности $y_i - c$ (рисунок). Естественно, эти разности (погрешности) могут быть как положительными, так и отрицательными и не обязательно симметричными относительно точки c. Далее выполним еще одно измерение и получим результат y_0. Затем перенесем в эту точку оси y все результаты y_i, сохранив неизменными величину и ориентацию отрезков (y_i, c). Точке c (противоположному концу отрезков) теперь будут соответствовать значения $z_i = y_i - c + y_0$. Таким образом, пришли к картинке, частично иллюстрирующей понятие неопределенности и его взаимосвязь с характеристиками множества погрешностей $y_i - c$. Ведь значения z_i — это и есть «значения, которые могут быть приписаны измеряемой величине» и «связаны с результатом измерения» y_0, являющимся для них опорным значением [1]. Важно, что полученные так реализации $z_i - y_0$ и $y_i - c$ по абсолютной величине равны друг другу, противоположны по знаку и антисимметричны относительно середины отрезка (c, y_0). То же самое можно сказать и о случайных величинах $z - y_0$ и $y - c$, реализациями которых являются $z_i - y_0$ и $y_i - c$. Дифференциальные распределения этих величин антисимметричны, поэтому их статистические характеристики совпадают за исключением одной детали: их нечетные моменты (в том числе смещения) совпадают с точностью до знака, тогда как всегда положительные четные моменты (в том числе дисперсии), а также стандартные отклонения и доверительные интервалы совпадают полностью.

Получается, что характеристики величины z можно найти, выполнив многократные измерения величины y и зафиксировав погрешности[4]. Но нужен следующий шаг, так как в определениях неопределенности речь идет только о характеристиках рассеяния (разброса), но не смещения. Рассеяние — это свойство измерений, и у него три меры: дисперсия, стандартное отклонение и доверительный интервал. Опорным значением для рассеяния всегда является среднее значение $m = \overline{y_i}$, но не истинное, не действительное и не эталонное значения, которые будут опорными при оценках самой измеряемой величины или смещения измеренных значений.

Рассуждения, относящиеся к рисунку, не изменились бы, если в качестве опорного значения c вместо действительного значения использовалось бы любое другое, в том числе любое эталонное значение. Однако, как следует из рисунка, мера $s_c^2(y) = \frac{1}{N-1}\sum_i (y_i - c)^2$ при произвольных опорных значениях c — это вовсе не мера рассеяния, соответствующая закону распространения (1). Она комбинированная и характеризует не только рассеяние результатов y_i, необходимое для оценки неопределенности по ее определению, но и их общее смещение m — c относительно «метрологического» опорного значения c. Мерами рассеяния (а именно — дисперсиями) функции $s^2(y)$ и $s^2(z)$ становятся, лишь когда опорное значение c будет равно среднему значению $m = \overline{y_i}\ \frac{1}{N}\sum_i y_i$, т. е. когда в выражении для $s^2(y)$ из измеренного значения вычитается не условно истинное или эталонное значение c, а среднее значение. При этом разброс (рассеяние) случайной величины z характеризует неопределенность, а случайной величины y — прецизионность измерения. Особо отметим, что эти разбросы одинаковые.

В продолжении статьи, которое будет опубликовано в одном из ближайших номеров журнала, для обоснования нового подхода к оценке неопределенности измерений будут рассмотрены вопросы множественности показателей неопределенности, инвариантности разброса по отношению к сдвигу (смещению) и механизмы образования неопределенности, а также приведены исходные положения предлагаемой методики оценки неопределенности.

[4] Естественно, неопределенность и погрешность — это разные понятия.

Литература

1. **Guide** to the expression of uncertainty in measurement. ISO, 1993. Руководство по выражению неопределенности измерения / Пер. с англ. СПб.: ВНИИМ им. Д. И. Менделеева, 1999.

2. **Голубев Э. А., Исаев Л. К., Чирков А. П.** Об оценке качества поверки средств измерений // Измерительная техника. 2006. № 8. С. 18; **Golubev E. A., Isaev L. K., Chirkov A. P.** Estimating the quality of verification of measuring instruments // Measurement Techniques. 2006. V. 49. N 8. P. 762—768.

3. **ГОСТ Р ИСО 5725—2002.** Точность (правильность и прецизионность) методов и результатов измерений. Ч. 1—6.

4. **Голубев Э. А.** Альтернативный подход к оценке неопределенности измерений // Измерительная техника. 2010. № 4. С. 35—41; **Golubev E. A.** An alternative approach to the estimation of the uncertainty of measurements // Measurement Techniques. 2010. V. 53. N 4. P. 402—410.

5. **Голубев Э. А.** Об использовании распространения распределений при оценке неопределенности измерений // Измерительная техника. 2008. № 2. С. 15—18; **Golubev E. A.** Distribution propagation in estimating measurement uncertainty // Measurement Techniques. 2008. V. 51. N 2. P. 130—135.

6. **Bayes T., Price R.** An essay towards solving a problem in the Doctrine of Chances // Philosophical Transactions of the Royal Society of London. 1763. V. 53. P. 370—418.

Дата принятия 10.09.2012 г.