

тивной дорогим и трудоёмким методам электронной микроскопии.

## Л и т е р а т у р а

1. Ушаков А. В., Баршутин М. Н., Баршутин С. Н. Идентификация наночастиц и измерение их концентрации в тонких плёнках наноструктурированных полимеров // Измерительная техника. 2014. № 9. С. 16—20.
2. Епифановский И. С., Пономарев А. Н., Донской А. А., Каширин С. В. Модификация свойств полимерных материалов малыми концентрациями фуллероидов // Перспективные материалы. 2006. № 2. С. 15—18.

3. Абдуллаев Х. М., Шаимов Э. Д., Табаров Ф. С. Ик-спектроскопическое исследование спектров поглощения исходных и фуллеренсодержащих плёнок полиметилметакрилата, полученных из растворов в толуоле, бромбензоле и ортоксилоле // Докл. Академии Наук Республики Таджикистан. 2013. Т. 56. № 3. С. 209—214.

4. Пат. 222976 РФ. Композиция для изготовления искусственного хрусталика глаза / В. Н. Мяков, Т. В. Махрова, М. А. Лотин // Изобретения. Полезные модели. 2004.

5. Кукуев В. И., Миттова И. Я., Домашевская Э. П. Физические методы исследования тонких плёнок и поверхностных слоев: Учеб. пособие. Воронеж; Изд-во ВГУ, 2001.

Дата принятия 27.07.2015 г.

## ЛИНЕЙНЫЕ И УГЛОВЫЕ ИЗМЕРЕНИЯ

681.2.087

### Определение периода больших колебаний маятника в элементарных функциях

А. В. КОЧЕТКОВ<sup>1, 2</sup>, И. Б. ЧЕЛПАНОВ<sup>3, 4</sup>, П. В. ФЕДОТОВ<sup>5</sup>

<sup>1</sup> Пермский национальный исследовательский политехнический университет, Пермь, Россия, e-mail: soni81@mail.ru

<sup>2</sup> Саратовский государственный технический университет им. Ю. А. Гагарина, Саратов, Россия, e-mail: soni.81@mail.ru

<sup>3</sup> Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики, С.-Петербург, Россия

<sup>4</sup> Концерн «ЦНИИ «Электроприбор», С.-Петербург, Россия, e-mail: iqorchelp@yandex.ru

<sup>5</sup> Научно-исследовательский центр технического регулирования, Пермь, Россия, e-mail: klk50@mail.ru

Впервые в элементарных функциях аналитически точно определён период колебаний физического маятника при больших угловых (до 90°) отклонениях от вертикальной оси.

**Ключевые слова:** физический маятник, период больших колебаний, теоретическое решение.

Analytically precise solution of physical pendulum swing period for the big angular deviations from vertical axis in the form of elementary function is received for the first time.

**Key words:** physical pendulum, period of big fluctuations, theoretical decisions.

Маятник — как элемент средств измерений времени — известен на протяжении нескольких веков. До изобретения кварцевых часов маятники использовали при изготовлении самых точных астрономических часов и хронометров. До сих пор маятник применяют для определения ускорения свободного падения в конкретной точке Земли. Задача измерения местной аномалии силы тяжести широко востребована в геологической разведке, при геофизических испытаниях и в других областях деятельности. При проведении экспериментов по установлению гравитационной постоянной в законе всемирного тяготения (опыт Кавендиша) также используют маятник. Незаменим он и при демонстрации суточного вращения Земли (маятник Фуко).

Схему маятника широко применяют в устройствах для испытания на удар, механизмах подъёмных кранов, динамических демпфирующих устройствах, механизмах манипулирования и переноса объектов, в биомеханике и т. д. Время колебания маятника исследуют в технических образовательных учреждениях и университетах (демонстрационные испытания в составе общеобразовательных курсов). Между тем, задача определения периода больших колебаний маятника (с отклонениями от вертикальной оси до 90°) до сих пор является предметом дискуссии [1—4].

**Постановка задачи.** Систематическое изучение вопросов о периоде колебаний маятника начинается с работ Х. Гюйгенса [1]. Для получения необходимых периодов коле-

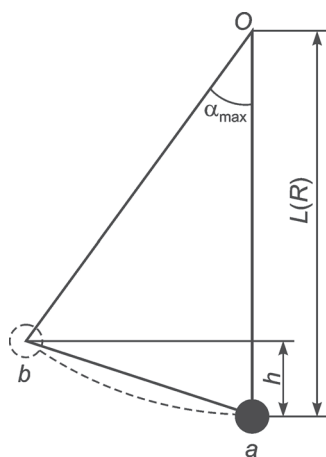


Схема качания маятника:

O — точка подвеса; a — точка равновесия; b — точка максимального отклонения или точка начала движения; h — максимум высоты подъема над уровнем равновесия;  $\alpha_{\max}$  — угол максимального отклонения;  $L(R)$  — длина маятника

баний он приводит простые методы расчёта длины маятника с малым углом отклонения. Что касается больших углов, то Х. Гюйгенс высказывает мысль, что «можно вычислить отношение периодов при разных дугах размаха на основании строгих принципов и с любой точностью. Можно показать, что время, в течение которого маятник проходит четверть окружности, относится к времени падения по очень малой дуге как 34:29. Это различие периодов колебаний ни в коем случае не объясняется сопротивлением воздуха, как думают некоторые, но вытекает из самой природы движения и свойств круга» [1]. Таким образом, учёный упоминает, что знает как вычислить период больших колебаний маятника, но знаний своих по данному вопросу не раскрывает. Только через 60 лет удалось найти метод решения этой задачи, и с помощью эллиптического интеграла проверить его расчёты.

Полное исследование эллиптических функций и их приложение в механику было проведено П. Аппелем и Е. Лакуром. В [2, 3] доказано, что решение дифференциального уравнения движения маятника для больших углов сводится к эллиптическим интегралам, однако они не позволяют получить ответ в элементарных функциях, а допускают только приближённое вычисление методом итераций.

**Обсуждение альтернативных способов решения задачи.** Рассмотрим решение задачи другим методом, без применения интегрирования дифференциального уравнения движения второго порядка. Чтобы найти полный период колебаний маятника, точное значение его мгновенной скорости в каждый момент времени не требуется, следовательно, необходимость в дифференциальных уравнениях отпадает. Вычислим интервал времени, за который маятник пройдет расстояние от начальной точки a до конечной b (рисунок). По теореме о среднем значении в интегральном исчислении, если функция  $f(x)$  интегрируема на участке ab и сохраняет знак на данном участке, то существует такое значение  $f(c)$ , при котором справедливо равенство

$$\int_a^b f(x) dx = f(c)(b-a). \quad (1)$$

Из (1) следует, что

$$c = \bar{f} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx,$$

где  $c = \bar{f}$  — среднее интегральное значение функции.

Рассчитав среднюю скорость колебаний за некоторый интервал времени и путь, пройденный маятником за то же время, можно вычислить период колебаний без интегрирования дифференциальных уравнений. За период колебаний скорость маятника меняет знак с положительного (при движении в одну сторону) на отрицательный (при перемещении в обратном направлении). Однако условием теоремы об интегральном среднем является неизменность знака функции, и применять теорему о среднем интегральном значении можно только к половине периода качания маятника.

Период колебания маятника можно разделить на четыре четверти. В первой четверти периода скорость нарастает от нуля до максимума в точке равновесия (ускорение положительно), а во второй — уменьшается, достигнув нуля в противоположной точке максимального отклонения (ускорение отрицательно). Закон изменения для всех четвертей периода колебаний идентичен, за исключением знаков скорости и ускорения. Таким образом, достаточно найти среднюю скорость маятника за одну четверть периода, а полный период получить, умножив длительность одной четверти на четыре.

**Метод нахождения периода колебаний маятника в элементарных функциях.** Направим ось ординат вниз и сопоставим её начальной точке нулевое значение ординаты. Закон сохранения энергии для физического маятника следующий:  $mv^2/2 = mgh$ , где  $m$  — масса тела;  $g$  — ускорение свободного падения;  $h$  — высота подъема центра масс (ЦМ) маятника над положением равновесия;  $v$  — скорость движения ЦМ. Тогда

$$v = \sqrt{2gh}. \quad (2)$$

В соответствии с рисунком  $h = L(1 - \cos \alpha)$ , подставим его в (2) и получим формулу мгновенного значения скорости ЦМ:

$$v(\alpha) = \sqrt{2gL(1 - \cos \alpha)}, \quad (3)$$

где  $L$  — длина ЦМ (радиус  $R$ ) маятника.

Для  $0 \leq \alpha \leq \pi/2$  функция  $\cos \alpha$  монотонно убывает от 1 до 0. Согласно (3) максимум скорости находится в начальной точке b, которая является максимальным углом  $\alpha_{\max}$  отклонения маятника, а в точке равновесия a ( $\alpha = 0$ ) наблюдается абсолютный минимум. Приведём ситуацию в соответствие с краевыми условиями, применив операцию нормировки. Сдвинем точки отсчёта угла отклонения на  $\pi/2$ , чтобы максимум скорости соответствовал точке a. В этом случае уравнение (3) примет вид

$$v(\alpha) = \sqrt{2gL[1 - \cos(\alpha - \pi/2)]} = \sqrt{2gL(1 - \sin \alpha)}. \quad (4)$$

Найдём среднее интегральное значение скорости в первой четверти периода качания маятника от начального положения при  $\alpha_{\max}$  до точки равновесия  $\alpha = 0$  (см. рисунок):

$$v_{cp} = \int_{\alpha_{\max}}^0 \sqrt{2gL(1 - \sin \alpha)} d\alpha = \sqrt{2gL} \int_{\alpha_{\max}}^0 \sqrt{1 - \sin \alpha} d\alpha. \quad (5)$$

Подставим (4) в (5) и получим  $v_{cp} = \int_{\alpha_{\max}}^0 v(\alpha) d\alpha$ .

Найдём интеграл  $\int \sqrt{1 - \sin \alpha} d\alpha$ . Обозначим  $t = 1 - \sin \alpha$ , откуда  $\alpha = \arcsin(1 - t)$ . Тогда  $d\alpha = -\left[1/\sqrt{t(2-t)}\right]dt$ . С учётом этих выражений запишем

$$\int \sqrt{1 - \sin \alpha} d\alpha = \int \frac{-\sqrt{t}}{\sqrt{t(2-t)}} dt = \int \frac{-1}{\sqrt{2-t}} dt. \quad (6)$$

При замене переменных  $z = 2 - t$  или  $t = 2 - z$  интеграл (6) сводится к табличному:  $\int \frac{-1}{\sqrt{2-t}} dt = 2\sqrt{2-t} + C$ , где  $C$  — постоянная интегрирования.

Принимая во внимание  $t = 1 - \sin \alpha$ , находим:

$$\int \sqrt{1 - \sin \alpha} d\alpha = 2\sqrt{2 - 1 + \sin \alpha} = 2\sqrt{1 + \sin \alpha} + C. \quad (7)$$

Решим задачу нахождения средней скорости в первой четверти периода качания маятника, используя первообразную интеграла. Из (5), (7) окончательно имеем

$$v_{cp} = \sqrt{2gL} \int_{\alpha_{max}}^0 \sqrt{1 - \sin \alpha} d\alpha = 2\sqrt{2gL} \sqrt{1 + \sin \alpha} \Big|_{\alpha_{max}}^0 =$$

$$= 2\sqrt{2gL} \left( \sqrt{1 + \sin \alpha_{max}} - 1 \right). \quad (8)$$

Уравнение (8) определяет среднюю скорость прохождения маятника от положения максимального отклонения до точки равновесия. Вывод этого уравнения был получен авторами статьи несколькими способами. Скорости движения маятника от точки равновесия  $a$  до противоположного положения максимума зеркальны, т. е. если в первой четверти колебания маятник разгоняется от 0 до  $v_{max}$ , то в следующую четверть периода скорость уменьшается зеркально, от  $v_{max}$  до 0. При достижении второй точки максимума отклонения закончится и вторая четверть колебаний. Из-за изотропности пространства вторая половина колебаний (третья и четвертая четверти) полностью повторит первый полупериод колебаний. Из (8) можно определить период колебаний маятника  $T = S/v_{cp}$ , где  $S$  — пройденный путь. С учётом (8) и длины дуги центрального угла  $\varphi$  время прохождения маятником этой дуги запишем как  $T = S/v_{cp} = L\varphi / \left[ 2\sqrt{2gL} \left( \sqrt{1 + \sin \alpha_{max}} - 1 \right) \right] =$

$= \varphi \sqrt{L} / \left[ 2\sqrt{2g} \left( \sqrt{1 + \sin \varphi} - 1 \right) \right]$ . Тогда период полных колебаний физического маятника при условии, что  $0 \leq \alpha_{max} \leq \pi/2$  будет

$$T = S/v_{cp} = \left( \alpha_{max} \sqrt{2L} \right) / \left[ \sqrt{g} \left( \sqrt{1 + \sin \alpha_{max}} - 1 \right) \right]. \quad (9)$$

Приведём окончательные результаты. Если  $0 \leq \alpha_{max} \leq \pi/2$ , то период больших колебаний маятника находим из (9):

$$T = \left( \alpha_{max} \sqrt{2L} \right) / \left[ \sqrt{g} \left( \sqrt{1 + \sin \alpha_{max}} - 1 \right) \right].$$

**Обсуждение полученных результатов.** Период малых колебаний маятника  $T^M = 2\pi \sqrt{L/g}$ . Время падения маятника с малым углом отклонения равно одной четверти периода маятника, т. е.  $T_{1/4}^M = \pi / \left[ 2\sqrt{L/g} \right]$ .

Для большого угла отклонения, начиная с  $\pi/2$ , найдём  $T_{1/4}^6 = \pi \sqrt{L} / \left[ 4\sqrt{2g} \left( \sqrt{2} - 1 \right) \right]$  и отношение  $T_{1/4}^M : T_{1/4}^6 \approx 1:1,1716$ , что точнее значения, указанного Гюйгенсом (1:1,1724) на 0,07 % и полученного с помощью эллиптических интегралов (1,180) на 0,72 %.

**Заключение.** Статья посвящена теоретическому решению задачи определения времени больших колебаний маятника в элементарных функциях. Такой метод можно применять, когда ограничение амплитуды малыми колебаниями либо методически невозможно, например, в экспериментах по определению гравитационной постоянной, либо технологически сложно. Снятие ограничения на угол отклонения маятника позволит существенно уменьшить размеры устройства. Предложенный метод не требует повышенных вычислительных мощностей.

## Л и т е р а т у р а

1. Гюйгенс Х. Три мемуара по механике. М.: АН СССР, 1951.
2. Appell P., Lacour E. Principes de la Theorie des Fonctions Elliptiques et Applications. Paris: Gauthier-Villars, 1897.
3. Аппель П. Теоретическая механика. Т. 1. М.: Физматгиз, 1960.
4. Adlaj S. An eloquent formula for the perimeter of an ellipse // Notices of the AMS. 2012. N. 59(8). P. 1096—1097.

Дата принятия 23.06.2015 г.